УДК 517.5

В. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КОЛМОГОРОВСКИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ И ЭНТРОПИЙНЫЕ ЧИСЛА В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА С НОРМОЙ ЛЮКСЕМБУРГА

We obtain the exact-order estimates of the Kolmogorov widths and entropy numbers of unit balls from the binary Besov spaces $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ compactly embedded in the exponential Orlich $\exp L^{\nu}$ spaces equipped with the Luxembourg norm.

Встановлено точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників та ентропійних чисел одиничних куль із двійкових просторів Бєсова $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\theta}$, компактно вкладених в експоненціальні простори Орліча $\exp L^{\nu}$, що наділені нормою Люксембурга.

Введение. Мы рассматриваем функции, заданные на торе $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, идентифицируя их 1-периодическими функциями на $\mathbb{R}$. Через $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, обозначим пространства Лебега измеримых на $\mathbb{T}$ функций с конечной нормой

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\mathbb{T})} := \left(\int\limits_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{T})} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{T}} |f(x)|.$$

Обозначение $\exp L^{\nu}(\mathbb{T})$, $\nu > 0$ (или, сокращенно, $\exp L^{\nu}$), используется для пространства Орлича всех измеримых на $\mathbb{T}$ функций $u\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ таких, что для $\Phi_\nu(t) = t^2 \exp t^{\nu}$, $t \ge 0$, $\nu > 0$, интеграл $\int_{\mathbb{T}} \Phi_\nu(|u(x)|)dx$ конечен. Это пространство снабдим нормой Люксембурга

$$\|u\|_{\exp L^{\nu}(\mathbb{T})} := \inf\left\{\lambda > 0\colon \int\limits_{\mathbb{T}} \Phi_\nu\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right) dx \le 1\right\}. \tag{1}$$

Больше информации о нормированных пространствах Орлича, определяемых подобным образом, можно найти, например, в монографиях [1, 2].

Известно, что

$$\|u\|_{\exp L^{\nu}(\mathbb{T})} \sim \|u\|^{(1)}_{\exp L^{\nu}(\mathbb{T})} := \sup_{1\le p<\infty} p^{-1/\nu} \|u\|_{L_p(\mathbb{T})}. \tag{2}$$

Пусть $\Phi = \phi_0$ — четная бесконечно дифференцируемая на вещественной прямой функция (пишем $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R})$) такая, что $\operatorname{supp}\Phi = (-2, 2)$ и $\Phi(s) = 1$ при $|s| \le 1$.

Положим

$$\phi_k(s) = \Phi(2^{-k}s) - \Phi(2^{-k+1}s), \quad k \in \mathbb{N},$$

и для $f \in L_1(\mathbb{T})$

$$L_k f(x) = \phi_k(D)f(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_k(n)\widehat{f}_n e^{2\pi i n x}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{3}$$

где $\widehat{f}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье функции f по системе $\{e^{2\pi i n x}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ на торе $\mathbb{T}$:

$$\widehat{f}_n = \int\limits_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

В дальнейшем для любой функции $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ через $\psi(\alpha D)$, $\alpha > 0$, обозначаем оператор, действующий подобно оператору $\phi_k(D)$ по формуле (3) с заменой $\phi_k(n)$ на $\psi(\alpha n)$.

Для $1 \le q \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$ и $\gamma \ge 0$ определим пространства типа Бесова заданием нормы выражением, характеризующим степень убывания величин $\|L_k f\|_q$:

$$B^{0,\gamma}_{q,\theta} = \left\{ f \in L_1(\mathbb{T})\colon \|f\|_{B^{0,\gamma}_{q,\theta}} := \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\theta\gamma} \|L_k f\|_q^\theta \right)^{1/\theta} < \infty \right\}. \tag{4}$$

Известно, что пространства $B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ при таком определении не зависят от выбора функции Φ в выражении для $L_k f$ и, очевидно, $B^{0,\gamma}_{q_1,\theta_1} \subset B^{0,\gamma}_{q_2,\theta_2}$, если $1 \le q_2 \le q_1 \le \infty$ и $\theta_1 \le \theta_2$. Пространство $B^{0,0}_{\infty,\theta}$ (т. е. при $\gamma = 0$ и $q = \infty$) состоит из локально интегрируемых функций тогда и только тогда, когда $1 \le \theta \le 2$ [3, с. 112]. Более того, как следует из определения (4), распространенного на любые положительные значения $\theta > 0$, пространство $B^{0,0}_{\infty,\theta}$ вложено в $L_\infty(\mathbb{T})$, если $0 < \theta \le 1$, а при $1 < \theta \le 2$ имеет место вложение $B^{0,0}_{\infty,\theta} \hookrightarrow \exp L^{\theta'}$, $\theta' = \dfrac{\theta}{\theta - 1}$ [4] (теорема 1.1).

Здесь и далее запись $X \hookrightarrow Y$ для нормированных пространств X и Y означает непрерывное вложение X в Y.

Введем в рассмотрение так называемые двоичные пространства типа Бесова, заменив операторы L_k в определении пространств $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ операторами $\mathbb{D}_k$ иного вида (см. [4]). Итак, пусть $k \in \mathbb{Z}_+$. Для функции f, заданной на отрезке $[0,1]$, положим

$$\mathbb{E}_k f(x) = 2^k \int\limits_{(m-1)2^{-k}}^{m2^{-k}} f(t)dt, \quad (m-1)2^{-k} \le x < m2^{-k}, \quad m = 1, \ldots, 2^k, \tag{5}$$

и определим

$$\mathbb{D}_0 f(x) = \mathbb{E}_0 f(x) \quad \text{и} \quad \mathbb{D}_k f(x) = \mathbb{E}_k f(x) - \mathbb{E}_{k-1} f(x), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Заметим, что функции $\mathbb{D}_k f$ являются кусочно-постоянными с разрывами в точках $m2^{-k}$, $m = 0, \ldots, 2^k - 1$. Далее будем рассматривать 1-периодические продолжения функций $\mathbb{E}_k f$ и $\mathbb{D}_k f$ с интервала $[0,1)$ на $\mathbb{R}$ как функции, заданные на $\mathbb{T}$, и соответственно операторы $\mathbb{E}_k$ и $\mathbb{D}_k$, определенные на $L_1(\mathbb{T})$, со значениями в $L_\infty(\mathbb{T})$. Отметим, что для любой функции $f \in L_1(\mathbb{T})$ почти для всех $x \in \mathbb{T}$ справедливо равенство $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{D}_k f(x)$.

Теперь для $1 \le q \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$ и $\gamma \ge 0$ определим двоичные пространства Бесова

$$\operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{q,\theta} = \left\{ f \in L_1(\mathbb{T})\colon \|f\|_{\operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{q,\theta}} := \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\theta\gamma} \|\mathbb{D}_k f\|_q^\theta \right)^{1/\theta} < \infty \right\}. \tag{7}$$

Приведем некоторые сведения, касающиеся связи пространств $B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ и $\operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ с другими известными пространствами.

Б. С. Кашин и В. Н. Темляков в [5] ввели нормированные пространства LG^γ, $\gamma > 0$, функций f из $L_1(\mathbb{T})$, для которых $\|L_k f\|_\infty = O((k+1)^{-\gamma})$, $k \to +\infty$, полагая

$$LG^\gamma(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L_1(\mathbb{T}) \colon \|f\|_{LG^\gamma(\mathbb{T})} := \sup_{k\geq 0} (k+1)^\gamma \|L_k f\|_\infty < \infty \right\}. \tag{8}$$

Очевидно, что при $\gamma > \dfrac{1}{2}$ пространство $LG^\gamma(\mathbb{T})$ вложено в $B^{0,\gamma}_{\infty,2}$. Более того, при $\gamma > 1$ $LG^\gamma(\mathbb{T}) \subset L_\infty(\mathbb{T})$, а при $\dfrac{1}{2} < \gamma \leq 1$ $LG^\gamma(\mathbb{T}) \subset \exp L^\nu(\mathbb{T})$ для $\nu < \dfrac{1}{1-\gamma}$ [4] (теорема 1.1). Отметим также, что при $\gamma > \dfrac{1}{2}$, $\nu < 2$ или $\nu \geq 2$, $\gamma > 1 - \dfrac{1}{\nu}$ последнее вложение компактно [4] (теорема 1.3).

С определенной точки зрения пространства $LG^\gamma(\mathbb{T})$ можно рассматривать как граничные в шкале пространств $B^{0,\gamma}_{\infty,\theta}$, соответствующие „предельному значению” ∞ показателя θ. В этом же смысле в качестве граничных в шкале пространств $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{\infty,\theta}$ являются пространства $LG^\gamma_{\mathrm{dyad}}$, введенные в [4]:

$$LG^\gamma_{\mathrm{dyad}} = \left\{ f \in L_1(\mathbb{T}) \colon \|f\|_{LG^\gamma_{\mathrm{dyad}}} := \sup_{k\geq 0} (k+1)^\gamma \|\mathbb{D}_k f\|_\infty < \infty \right\}. \tag{9}$$

Обратим внимание на некоторые отличительные особенности в структуре функций из пространств LG^γ и $LG^\gamma_{\mathrm{dyad}}$. Так, при $\gamma > 1$ пространства LG^γ состоят из непрерывных функций, а пространствам $LG^\gamma_{\mathrm{dyad}}$ в этом случае могут принадлежать и разрывные функции. Более того, при $\gamma > \dfrac{1}{2}$

$$LG^\gamma \hookrightarrow LG^\gamma_{\mathrm{dyad}} \tag{10}$$

(см. [4], лемма 3.2).

Дополнив шкалу пространств $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ и $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ при $1 \leq \theta < \infty$ соответственно пространствами

$$B^{0,\gamma}_{p,\infty} = \left\{ f \in L_1(\mathbb{T}) \colon \|f\|_{B^{0,\gamma}_{p,\infty}} := \sup_{k\geq 0} (k+1)^\gamma \|L_k f\|_p < \infty \right\}$$

и

$$\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\infty} = \left\{ f \in L_1(\mathbb{T}) \colon \|f\|_{\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\infty}} := \sup_{k\geq 0} (k+1)^\gamma \|\mathbb{D}_k f\|_p < \infty \right\},$$

а также заметив, что в таких обозначениях $B^{0,\gamma}_{\infty,\infty} \equiv LG^\gamma$ и $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{\infty,\infty} \equiv LG^\gamma_{\mathrm{dyad}}$, докажем в пункте 3, что подобное (10) вложение сохраняется и между пространствами $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ и $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ при всех $1 \leq \theta \leq \infty$.

Укажем также на связь между пространствами $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$, $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ и $\exp L^\theta(\mathbb{T})$ в случае $\gamma = 0$: в [4] (предложение 2.2) показано, что при $p = \infty$ и $1 \leq \theta \leq 2$

$$B^{0,0}_{p,\theta} \hookrightarrow \mathrm{dyad}\, B^{0,0}_{p,\theta}; \tag{11}$$

там же [4] (предложение 2.5) доказано, что при $1 \leq \theta \leq 2$

$$\operatorname{dyad} B^{0,0}_{\infty,\theta} \hookrightarrow \exp L^{\theta'}(\mathbb{T}). \tag{12}$$

В заключение этого пункта обратим внимание на одно свойство операторов $\mathbb{D}_k$ и одну особенность операторов $\mathbb{E}_k$.

Лемма ST [4]. *Существует постоянная C такая, что для $1 \leq s \leq 2$, $s' = \dfrac{s}{s-1}$, $2 \leq p \leq \leq \infty$ и любой системы $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ функций из $L_p(\mathbb{T})$ выполняется неравенство*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{D}_k f_k \right\|_p \leq C p^{1/s'} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_p^s \right)^{1/s}. \tag{13}$$

Касательно оператора $\mathbb{E}_k$, определенного формулой (5), ограничимся только констатацией того факта, что при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ он тождествен оператору $P_k : L_1(\mathbb{T}) \to V_n$ ортогонального проектирования пространства $L_1(\mathbb{T})$ на пространство

$$V_n := \operatorname{span}\{h_k\}_{k=0}^{2^n-1} = \left\{ u : u(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k h_k(x), \quad c_k \in \mathbb{R} \right\},$$

порожденное первыми 2^n функциями базисной системы Хаара $\mathrm{H} = \{h_k\}_{k=0}^{\infty}$ (см., например, [6, с. 78 – 80]). Этот факт вскрывает множество свойств оператора $\mathbb{D}_k$ (и оператора $\mathbb{E}_k$), тождественных известным свойствам оператора P_k, установленных при изучении базиса H, а также кратного базиса H^{d}, $d \geq 1$ [7]. Однако использование этих свойств целью настоящей работы не предполагается.

1. О классах $\mathbb{B}^{0,\gamma}_{p,\theta}$ и $\operatorname{dyad}\mathbb{B}^{0,\gamma}_{p,\theta}$ в пространствах L_q и $\exp L^{\nu}$. Формулировка основного результата. Приведем вначале определение исследуемых величин. Пусть X — линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, $F \subset X$ и $\mathcal{L}_m$ — совокупность всех линейных подпространств L_m в X, $\dim L_m = m$, $m \in \mathbb{N}$.

Определение 1. *m-поперечником по Колмогорову центрально-симметричного множества F в пространстве X называется величина*

$$d_m(F, X) = \inf_{L_m \in \mathcal{L}_m} \sup_{f \in F} \inf_{u \in L_m} \|f - u\|_X.$$

Пусть теперь X содержит подпространство Y, снабженное нормой $\|\cdot\|_Y$.

Определение 2. *m-м энтропийным числом пространства Y относительно пространства X называется величина*

$$\epsilon_m(Y, X) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \exists \{u_j\}_{j=1}^{2^m-1},\ B_Y \subset \bigcup_{j=1}^{2^m-1} \{u_j + \varepsilon B_X\} \right\},$$

где B_X (B_Y) — единичный шар в X (Y).

Проведем краткий обзор и анализ известных результатов, касающихся решения задач о нахождении порядковых (по параметру m) значений определенных выше величин в пределах обозначенных во введении пространств функций. Отметим только, что для классических пространств Никольского и Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных, определяемых подобно пространствам $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ с заменой множителя $(k+1)^{\theta\gamma}$ на $2^{kr\theta}$, изучаемые здесь характеристики ϵ_n и d_n в пространствах $L_q(\mathbb{T}^d)$ довольно полно исследованы в [8, 9] (см. также приведенную там библиографию).

Единичные шары в пространствах $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$, $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\theta}$, LG^γ и $\mathrm{dyad}\, LG^\gamma$ будем обозначать соответственно через $\mathbb{B}^{0,\gamma}_{p,\theta}$, $\mathrm{dyad}\, \mathbb{B}^{0,\gamma}_{p,\theta}$, $\mathbb{LG}^\gamma$ и $\mathrm{dyad}\, \mathbb{LG}^\gamma$.

В [5] (теорема 3.1) установлено следующее утверждение.

Теорема КТ. *При $\gamma > 1$ справедливы соотношения*[1]

$$\epsilon_n(LG^\gamma, L_p) \asymp d_n(\mathbb{LG}^\gamma, L_p) \asymp \begin{cases} (\log_2 n)^{-\gamma+1}, & \text{если} \quad p = \infty, \\ (\log_2 n)^{-\gamma+1/2}, & \text{если} \quad 1 \le p < \infty. \end{cases}$$

Ключевым моментом на завершающем этапе доказательства теоремы КТ (заключении о совпадении по порядку величин ϵ_n и d_n) явилось применение следующей леммы, вытекающей из одного неравенства Карла (см. [10]).

Лемма А. *Пусть X — сепарабельное банахово пространство, Y компактно вложено в X и B_Y — единичный шар в Y. Предположим, что для пары (r, b), где либо $r > 0$, $b \in \mathbb{R}$, либо $r = 0$, $b < 0$, выполнены соотношения*

$$d_m(B_Y, X) \ll m^{-r}(\log_2 m)^b,$$

$$\epsilon_m(Y, X) \gg m^{-r}(\log_2 m)^b.$$

Тогда

$$\epsilon_m(Y, X) \asymp d_m(B_Y, X) \asymp m^{-r}\,(\log_2 m)^b\,.$$

В [4] A. Seeger и W. Trebels, исследуя в теореме КТ скачкообразный характер изменения порядковых значений энтропийных чисел при переходе от метрики в $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, к метрике в $L_\infty(\mathbb{T})$ и устраняя этот эффект, задействовали пространства $\exp\ L^\nu$ и установили порядковые значения величин $\epsilon_m(LG^\gamma, \exp L^\nu)$ в виде следующего утверждения.

Теорема ST. *Вложение $LG^\gamma(\mathbb{T}) \subset \exp L^\nu(\mathbb{T})$ компактно, если либо $\gamma > 1/2$, $\nu < 2$ либо $\nu \ge 2$, $\gamma > 1 - \dfrac{1}{\nu}$.*

Имеют место оценки:

1) *для $\gamma > 1/2$ и $\nu < 2$*

$$\epsilon_m\left(LG^\gamma, \exp L^\nu\right) \asymp (\log_2 m)^{1/2-\gamma};$$

2) *для $\nu \ge 2$ и $\gamma > 1 - \dfrac{1}{\nu}$*

$$\epsilon_m\left(LG^\gamma, \exp L^\nu\right) \asymp (\log_2 m)^{1-1/\nu-\gamma}.$$

[1] Для положительных последовательностей $\alpha(n)$ и $\beta(n)$ запись $\alpha(n) \asymp \beta(n)$ означает, что существует такая постоянная $C > 0$, не зависящая от n, что $\dfrac{1}{C} \le \dfrac{\alpha(n)}{\beta(n)} \le C$. Если $\alpha(n) \le C\beta(n)$ $\left(\alpha(n) \ge \dfrac{1}{C}\,\beta(n)\right)$, то пишем $\alpha(n) \ll \beta(n)$ $(\alpha(n) \gg \beta(n))$.

Отметим, что в методе установления оценок сверху для энтропийных чисел в теореме ST главная идея состояла во вложении пространства LG^γ в более широкое пространство $LG^\gamma_{\mathrm{dyad}}$.

В другом направлении результаты Б. С. Кашина и В. Н. Темлякова (теорема КТ) были распространены С. А. Стасюком [11] на пространства $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$. А именно, доказаны следующие теоремы.

Теорема С1. *Пусть* $1 \le \theta < \infty,\ r > 1 - \dfrac{1}{\theta}$. *Тогда*

$$\epsilon_m(B^{0,r}_{\infty,\theta}, L_\infty) \asymp d_m\left(\mathbb{B}^{0,r}_{\infty,\theta}, L_\infty\right) \asymp (\log_2 m)^{-r+1-1/\theta}.$$

Теорема С2. *Пусть* $1 \le q < \infty,\ q \le p,\ r > \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\theta}$. *Тогда при* $2 \le p \le \infty,\ 2 \le \theta < \infty$ *или* $2 \le p < \infty,\ \theta = \infty$ *имеют место порядковые равенства*

$$\epsilon_m\left(B^{0,r}_{p,\theta}, L_q\right) \asymp d_m\left(\mathbb{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q\right) \asymp (\log_2 m)^{-r+1/2-1/\theta}.$$

Целью настоящей работы, в развитие результатов из [4, 11], является установление точных по порядку оценок величин $\epsilon_m\left(B^{0,\gamma}_{p,\theta}, \exp L^\nu\right)$ и $d_m\left(\mathbb{B}^{0,\gamma}_{p,\theta}, \exp L^\nu\right)$ при различных соотношениях между параметрами $p,\ \theta,\ \gamma$ и ν, включая те, которые охвачены теоремами ST, C1 и C2. Чтобы сформулировать основной результат, введем дополнительные обозначения.

На плоскости $\mathbb{R}^2$ выделим множество

$$\Omega := \{(\gamma, \nu)\colon 0 < \gamma < \infty \ \text{ и } \ 0 < \nu < \infty\}$$

и определим следующие его подмножества:

$$D_1 := \left\{(\gamma,\nu) \in \Omega\colon \frac{1}{2} < \gamma < 1,\ \nu < \frac{1}{\gamma - 1}\right\},$$

$$D_2 := \left\{(\gamma,\nu) \in \Omega\colon \gamma \ge 1,\ 0 < \nu < \infty\right\},$$

$$G_1 := \left\{(\gamma,\nu) \in \Omega\colon \nu \le 2,\ \gamma > \frac{1}{2}\right\},$$

$$G_2 := \left\{(\gamma,\nu) \in \Omega\colon \nu \ge 2,\ \gamma > 1 - \frac{1}{\nu}\right\}.$$

Заметим, что $D_1 \cup D_2 = G_1 \cup G_2$.

Теорема 1. *Пусть* $(\gamma,\nu) \in D_1 \cup D_2$ *и* $\Lambda_n(q,\theta,\gamma,\nu)$ *обозначает либо* $\epsilon_n\left(\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{q,\theta}, \exp L^\nu\right)$, *либо* $d_n\left(\mathrm{dyad}\, \mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}, \exp L^\nu\right)$. *Тогда*

a) *если* $(\gamma,\nu) \in G_1$ *и* $2 \le q \le \infty,\ \theta = \infty$, *то*

$$\Lambda_n(q,\theta,\gamma,\nu) \asymp (\ln n)^{1/2-\gamma}; \tag{14}$$

b) *если* $(\gamma,\nu) \in G_2$ *и* $2 \le q \le \infty,\ \theta = \infty$, *то*

$$\Lambda_n(q,\theta,\gamma,\nu) \asymp (\ln n)^{1-1/\nu-\gamma}; \tag{15}$$

c) *если* $(\gamma,\nu)\in\Omega$ *и* $q=\infty,\ 1\le\theta<\infty,\ \gamma>1-\dfrac{1}{\theta}$, *то*

$$\Lambda_n(q,\theta,\gamma,\nu)\asymp(\ln n)^{1-1/\theta-\gamma}; \tag{16}$$

d) *если* $(\gamma,\nu)\in\Omega$ *и* $2\le q<\infty,\ 2\le\theta<\infty,\ \gamma>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\theta}$, *то*

$$\Lambda_n(q,\theta,\gamma,\nu)\asymp(\ln n)^{1/2-1/\theta-\gamma}. \tag{17}$$

Доказательство теоремы 1 проведем в три этапа:

I. Оценка сверху величин $\sup_{f\in\mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}}\|f-E_Mf\|_{\exp L^\nu}$, которая будет служить оценкой сверху для $d_n\left(\operatorname{dyad}\mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta},\exp L^\nu\right)$.

II. Оценка снизу для $\epsilon_n(\operatorname{dyad}B^{0,\gamma}_{q,\theta},\exp L^\nu)$.

III. Фактическое применение леммы A и заключение о точных по порядку оценках в теореме 1.

Второй этап включает в себя доказательство ряда вспомогательных утверждений (лемм), которые вынесены в отдельный пункт.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $\lambda\ge1$ *и* $k\ge0$, $\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$ — *четная функция с носителем на* $\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ *и* $\mathcal{L}_\lambda:=\psi(\lambda^{-1}D)$. *Тогда при* $1\le q\le\infty$

$$\|\mathbb{E}_k\mathcal{L}_\lambda\|_{L_q\to L_q}\le C\min\left\{\lambda^{-1}2^k,1\right\},\quad k\ge0, \tag{18}$$

$$\|\mathbb{D}_k\mathcal{L}_\lambda\|_{L_q\to L_q}\le C\min\left\{\lambda^{-1}2^k,\lambda2^{-k}\right\},\quad k\ge1, \tag{19}$$

где C — *некоторая положительная постоянная.*

Доказательство. В случае $q=\infty$ лемма 1 доказана в [4]. В случае $1\le q<\infty$ достаточно фактически воспроизвести доказательство в случае $q=\infty$, внеся незначительные поправки. Итак, наряду с функцией $\psi_0(s):=\psi(s)$ рассмотрим функции $\psi_{-1}(s)=s^{-1}\psi(s)$ и $\psi_1(s)==s\psi(s)$ и заметим, что все они являются функциями из $C^\infty(\mathbb{R})$ с компактными носителями, отделенными от начала координат.

По определению

$$\psi_j(\lambda^{-1}D)f(x):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi_j(\lambda^{-1}n)\widehat{f}_ne^{2\pi inx},\qquad f\in L_q(\mathbb{T}),\quad j=-1,0,1.$$

Обозначим через $\mathcal{F}g$ преобразование Фурье функции $g\in L_1(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}g(u):=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi itu}g(t)dt,$$

а через $\mathcal{F}^{-1}g$ — обратное преобразование Фурье.

Тогда, используя представление [12]

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi_j(\lambda^{-1}n)\widehat{f}_n e^{2\pi inx}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}^{-1}\psi_j\left(\lambda^{-1}y\right)f(x-y)dy,$$

с учетом свойств свертки [13, с. 33], при любом $1\le q\le\infty$ имеем

$$\|\psi_j(\lambda^{-1}D)f\|_q\le\|\mathcal{F}^{-1}\psi_j(\lambda^{-1}\cdot)\|_1\|f\|_q\le C\|f\|_q,\quad j=-1,0,1. \tag{20}$$

Теперь, очевидно, при любом $k\ge 0$ и $\lambda\ge 1$ (и, в частности, при $\lambda\le 2^k$)

$$\|\mathbb{E}_k\mathcal{L}_\lambda\|_{L_q\to L_q}\le C. \tag{21}$$

Далее, фиксируем k и пусть $\lambda>2^k$. Положим $x_{m,k}=m2^{-k}$. Тогда для $x\in[x_{m,k},x_{m+1,k})$

$$\mathbb{E}_k\mathcal{L}_\lambda f(x)=2^k\int\limits_{x_{m,k}}^{x_{m+1,k}}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\psi_0(\lambda^{-1}l)\int\limits_0^1 e^{2\pi ily}f(y)dye^{2\pi ilx}\right)dx=$$

$$=2^k\sum_{l\in\mathbb{Z}}\psi_0(\lambda^{-1}l)\lambda^{-1}\int\limits_0^1\frac{e^{2\pi il(x_{m+1,k}-y)}-e^{2\pi il(x_{m,k}-y)}}{2\pi il\lambda^{-1}}f(y)dy=$$

$$=2^k\lambda^{-1}(\psi_{-1}(\lambda^{-1}D)f(x_{m+1,k})-\psi_{-1}(\lambda^{-1}D)f(x_{m,k})) \tag{22}$$

и

$$\left(\int\limits_{x_{m,k}}^{x_{m+1,k}}|\mathbb{E}_k\mathcal{L}_\lambda f(x)|^q dx\right)^{1/q}\le$$

$$\le 2^k\lambda^{-1}\left(\int\limits_{x_{m,k}}^{x_{m+1,k}}|\psi_{-1}(D/\lambda)f(x_{m+1,k})-\psi_{-1}(D/\lambda)f(x_{m,k})|^q dx\right)^{1/q}. \tag{23}$$

Теперь заметим, что правая часть (23) в силу неравенства $|a+b|^q\le 2^{q-1}(|a|^q+|b|^q)$, $a,b\in\mathbb{R},\ q\ge 1$, не превышает $C_q^{(1)}2^k\lambda^{-1}\omega^{(q)}\left(\psi_{-1}(D/\lambda)f,\dfrac{1}{2^k}\right)$ с некоторой постоянной $C_q^{(1)}$, зависящей от q (здесь $\omega^{(q)}(\varphi,\cdot)$ обозначает q-интегральный при $1\le q<\infty$ модуль непрерывности функции φ на интервале $[x_{m,k},x_{m+1,k})$).

Последнее утверждение в сочетании с неравенством (23) и с учетом известных свойств модуля непрерывности $\omega^{(q)}(\varphi,\cdot)$ приводит к неравенству

$$\left(\int\limits_{x_{m,k}}^{x_{m+1,k}}|\mathbb{E}_k\mathcal{L}_\lambda f(x)|^q dx\right)^{1/q}\le C_q^{(2)}2^k\lambda^{-1}\left(\int\limits_{x_{m,k}}^{x_{m+1,k}}|\psi_{-1}(D/\lambda)f(x)|^q dx\right)^{1/q},$$

следствием которого является неравенство

$$\|\mathbb{E}_k\mathcal{L}_\lambda f\|_q\le C2^k\lambda^{-1}\|\psi_{-1}(D/\lambda)f\|_q \tag{24}$$

при $\lambda>2^k$. Из неравенств (20) и (24) получаем (18).

Неравенство (19) достаточно доказать в случае $k \geq 1$, $\lambda \leq 2^k$. Зафиксируем x. Тогда $\mathbb{E}_k\mathcal{L}_\lambda f(x)$ является усреднением $\mathcal{L}_\lambda f$ по некоторому интервалу $[x_{m,k}, x_{m+1,k})$ длины 2^{-k}, содержащему x. По теореме о среднем значении, примененной к $\mathbb{E}_k\mathcal{L}_\lambda f(x)$ и $\mathbb{E}_{k-1}\mathcal{L}_\lambda f(x)$ для $k \geq 1$, можем записать

$$\mathbb{D}_k\mathcal{L}_\lambda f(x) = \mathcal{L}_\lambda f(x') - \mathcal{L}_\lambda f(x'') = (\mathcal{L}_\lambda f)'(\widetilde{x})(x' - x''),$$

где x', x'', $\widetilde{x}$ отстоят от x на расстояние, не превышающее 2^{-k+1}. Далее, $(\mathcal{L}_\lambda f)' = \lambda\psi_1(D/\lambda)f$, и тогда при $1 \leq q \leq \infty$ с учетом (20) имеем

$$\|\mathbb{D}_k\mathcal{L}_\lambda f\|_q \leq 2^{-k+1}\|(\mathcal{L}_\lambda f)'\|_q \leq C\lambda 2^{-k}\|f\|_q.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ *и* $\gamma > \dfrac{1}{2}$. *Тогда*

$$B^{0,\gamma}_{q,\theta} \hookrightarrow \operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{q,\theta}. \tag{25}$$

Доказательство. В [4] (лемма 3.2) доказано, что при $\gamma > \dfrac{1}{2}$ справедливо вложение $LG^\gamma \hookrightarrow$ $\hookrightarrow LG^\gamma_{\text{dyad}}$. В принятых нами обозначениях это означает, что $B^{0,\gamma}_{q,\theta} \hookrightarrow \operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ при $q = \infty$ и $\theta = \infty$. В случае $1 \leq q < \infty$ и $\theta = \infty$ схема доказательства такая же, как и в случае $q = \infty$ и $\theta = \infty$. При этом используем лемму 1 для $1 \leq q < \infty$ (вместо $q = \infty$).

Итак, придерживаясь схемы доказательства леммы 3.2 из [4], докажем (25) в случае $1 \leq$ $\leq q \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$. Предварительно установим одно неравенство, связывающее последовательности норм $\|\mathbb{D}_k f\|_q$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и $\|L_n f\|_q$, $n \in \mathbb{Z}_+$, при $1 \leq q < \infty$, по аналогии с таким неравенством из [4, с. 151], полученным для $q = \infty$.

С этой целью рассмотрим последовательность функций $(\Psi_n(s))_{n=0}^\infty$, $s \in \mathbb{R}$, определенную следующим образом:

1) Ψ_0 — четная функция из $C^\infty(\mathbb{R})$ такая, что $\operatorname{supp}\Psi_0 = (-4, 4)$ и $\Psi_0(s) = 1$ при $s \in$ $\in (-2, 2)$;

2) $\Psi_n(s) := \Psi(2^{-n}s)$, $n \in \mathbb{N}$, где Ψ — четная функция из $C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющая условиям $\operatorname{supp}\Psi = \left(-8, -\dfrac{1}{8}\right) \cup \left(\dfrac{1}{8}, 8\right)$ и $\Psi(s) = 1$ при $|s| \in \left(\dfrac{1}{2}, 4\right)$.

Тогда, очевидно, $\Psi_n\phi_n = \phi_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ и соответственно этому $\Psi_n(D)L_n = L_n$. Следовательно, учитывая, что $f(x) = \sum_{n=0}^\infty L_n f(x)$ почти для всех $x \in \mathbb{R}$, для $1 \leq q \leq \infty$ можем записать

$$\|\mathbb{D}_k f\|_q = \left\|\mathbb{D}_k \sum_{n=0}^\infty \Psi_n(D)L_n f\right\|_q \leq \left\|\sum_{n=0}^\infty \mathbb{D}_n\Psi_n(D)\right\|_{L_q\to L_q} \|L_n f\|_q. \tag{26}$$

Но согласно определению $\Psi_n(D)$ — это $\psi(\lambda^{-1}D)$ с $\lambda = 2^{n+2}$ и функцией $\psi(s) = \Psi(s^{1/3})$ (а значит, $\psi(s^3) = \Psi(s)$). Поэтому в силу леммы 1

$$\|\mathbb{D}_k\Psi_n(D)\|_{L_q\to L_q} \leq C2^{-|k-n|},$$

и из (26) получаем

$$\|\mathbb{D}_k f\|_q \le C \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-|k-n|} \|L_n f\|_q. \tag{27}$$

Используя неравенство (27), для $f \in B^{0,\gamma}_{q,\theta}$, $1 \le q \le \infty$, при $\theta = 1$ имеем

$$\|f\|_{\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{\infty,\theta}} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\gamma} \|\mathbb{D}_k f\|_q \le C \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-|k-n|} \|L_n f\|_q \le$$

$$\le C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n f\|_q \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\gamma} 2^{-|k-n|} \le C_2 \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n f\|_q (n+1)^{\gamma} = C_2 \|f\|_{B^{0,\gamma}_{q,\theta}}.$$

В случае $1 < \theta < \infty$ и $1 \le q \le \infty$

$$\|f\|_{\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{q,\theta}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\gamma\theta} \|\mathbb{D}_k f\|_q^{\theta} \right)^{1/\theta} \le$$

$$\le C \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\gamma\theta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-|k-n|} \|L_n f\|_q \right)^{\theta} \right)^{1/\theta} \le$$

$$\le C_1 \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \left(\sum_{k=-m}^{\infty} (k+m+1)^{\gamma\theta} \|L_{k+m}\|_q^{\theta} \right)^{1/\theta} \le C_2 \|f\|_{B^{0,\gamma}_{q,\theta}}.$$

Лемма 2 доказана.

3. Доказательство теоремы 1. I. *Оценка сверху величин* $\sup_{f \in \mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}} \|f - \mathbb{E}_M f\|_{\exp L^{\nu}}$. Пусть $f \in \mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}$, $2 \le q \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$. Тогда из (6), учитывая, что последовательность операторов $(\mathbb{D}_n)_{n=0}^{\infty}$ обладает тем свойством, что для $f \in L_q(\mathbb{T})$ имеем $\mathbb{D}_k \mathbb{D}_l f(x) = 0$ при $k \ne l$ и $\mathbb{D}_k \mathbb{D}_l f(x) = \mathbb{D}_l f(x)$ при $k = l$, получаем

$$f(x) - \mathbb{E}_M f(x) = \sum_{k=M+1}^{\infty} \mathbb{D}_k \mathbb{D}_l f(x), \tag{28}$$

и это равенство выполняется почти всюду на $\mathbb{R}$.

Установим оценку сверху величин $\sup_{f \in \mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}} \|f - \mathbb{E}_M f\|_{\exp L^{\nu}}$ и, как следствие, оценку сверху в теореме 1 для $d_n(\mathrm{dyad}\, \mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}, \exp L^{\nu})$ отдельно в каждом из трех случаев:

(i) $2 \le q \le \infty$, $\theta = \infty$;

(ii) $q = \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $\gamma > 1 - \dfrac{1}{\theta}$;

(iii) $2 \le q < \infty$, $2 \le \theta < \infty$, $\gamma > \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\theta}$.

В случае (i) при $2 \le q < \infty$, используя (28), а также лемму ST при $2 \le p < \infty$ (полагая при этом $p = q$) и $1 \le s \le 2$ (тогда $s\gamma > 1$), имеем

$$p^{-1/\nu} \|f - \mathbb{E}_M f\|_p \le C_1 p^{1/s' - 1/\nu} \left(\sum_{k=M+1}^{\infty} \|\mathbb{D}_k f\|_p^s \right)^{1/s} =$$

$$= C_1 p^{1/s'-1/\nu} \left(\sum_{k=M+1}^{\infty} \|\mathbb{D}_k f\|_q^s \right)^{1/s} \le C_2 p^{1/s'-1/\nu} \left(\sum_{k=M+1}^{\infty} (k+1)^{-s\gamma} \right)^{1/s} \le$$

$$\le C(s,\gamma) p^{1-1/\nu-1/s} M^{1/s-\gamma}. \tag{29}$$

В последнем из неравенств в (29) мы воспользовались тем, что при $\alpha > 1$

$$\sum_{k=M}^{\infty} k^{-\alpha} \le \int_{M}^{\infty} t^{-\alpha} dt \le C(\alpha) M^{1-\alpha}. \tag{30}$$

Если $\nu \le 2$, то из (29) при $s = 2$, $\gamma > \frac{1}{2}$ $\left(\text{тогда } 1 - \frac{1}{\nu} - \frac{1}{s} < 0\right)$, имеем

$$\|f - \mathbb{E}_M f\|_{\exp L^\nu} \ll M^{\frac{1}{2}-\gamma}.$$

Если же $\nu > 2$, то из (29) при $s = \frac{\nu}{\nu-1}$ $\left(\text{тогда } s \in (1,2),\ 1 - \frac{1}{\nu} - \frac{1}{s} = 0, \text{ а условие } s\gamma > 1 \text{ влечет } \gamma > 1 - \frac{1}{\nu}\right)$ получаем

$$\|f - \mathbb{E}_M f\|_{\exp L^\nu} \ll M^{1-\frac{1}{\nu}-\gamma}.$$

Для доказательства оценки сверху величин $\sup_{f \in \mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}} \|f - \mathbb{E}_M f\|_{\exp L^\nu}$ в случае (i) при $q = \infty$ достаточно повторить ее доказательство при $2 \le q < \infty$, отправляясь от (29), заменив в нем знак $=$ на знак $<$.

Таким образом, в случае (i) оценка сверху в теореме 1 доказана.

В случае (ii) при $q = \infty$, $1 \le \theta < \infty$, используя (28) и лемму ST при $s = 1$, а затем учитывая условие $\gamma > 1 - \frac{1}{\theta}$, т. е. $\gamma\theta' > 1$, при любом $1 \le p < \infty$ имеем

$$p^{-1/\nu} \|f - \mathbb{E}_M f\|_p \le C p^{-1/\nu} \sum_{k=M+1}^{\infty} \|\mathbb{D}_k f\|_p \le$$

$$\le C p^{-1/\nu} \sum_{k=M+1}^{\infty} \|\mathbb{D}_k f\|_\infty \le C p^{-1/\nu} \sum_{k=M+1}^{\infty} (k+1)^{-\gamma} \|\mathbb{D}_k f\|_\infty (k+1)^{\gamma} \le$$

$$\le C p^{-1/\nu} \left(\sum_{k=M+1}^{\infty} (k+1)^{-\gamma\theta'} \right)^{1/\theta'} \left(\sum_{k=M+1}^{\infty} (k+1)^{\gamma\theta} \|\mathbb{D}_k f\|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} \le$$

$$\le C(\gamma) M^{-\gamma+1-1/\theta}. \tag{31}$$

Здесь, в последнем неравенстве, мы снова воспользовались соотношением (30).

Из (31) заключаем, что для $f \in \mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}$, $q = \infty$, $1 \le \theta < \infty$ и $\gamma > 1 - \frac{1}{\theta}$

$$\|f - \mathbb{E}_M f\|_{\exp L^\nu} \ll M^{-\gamma+1-1/\theta}. \tag{32}$$

В случае (iii) при $2<\theta<\infty$ и $\gamma>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\theta}$ рассуждения аналогичны случаям (i) и (ii). А именно, используя лемму ST при $2\leq p<\infty$ и $s=2$, полагая при этом $p=q$, для $f\in\mathrm{dyad}\,B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ имеем

$$p^{-1/\nu}\|f-\mathbb{E}_Mf\|_p\leq Cp^{-1/\nu}\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}\|\mathbb{D}_kf\|_p^2\right)^{1/2}\leq$$

$$\leq Cp^{-1/\nu}\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}(k+1)^{-2\gamma}[(k+1)^{2\gamma}\|\mathbb{D}_kf\|_p^2]\right)^{1/2}\leq$$

$$\leq Cp^{-1/\nu}\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}(k+1)^{-\frac{2\gamma\theta}{\theta-2}}\right)^{(1-2/\theta)/2}\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}(k+1)^{\gamma\theta}\|\mathbb{D}_kf\|_q^\theta\right)^{1/\theta}\leq$$

$$\leq C_0(\gamma)M^{-\gamma+1/2-1/\theta}\|f\|_{\mathrm{dyad}\,B^{0,\gamma}_{q,\theta}}. \tag{33}$$

В третьем неравенстве соотношения (33) мы воспользовались неравенством Гельдера

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{\mu}\right)^{1/\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty}b_k^{\mu'}\right)^{1/\mu'},\quad \frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu'}=1,$$

с $\mu=\dfrac{\theta}{2}$ $\left(\text{тогда }\ \dfrac{1}{\mu'}=1-\dfrac{2}{\theta}\ \text{ и }\ \mu'=\dfrac{\theta}{\theta-2}\right)$, полагая $a_k=(k+1)^{-2\gamma}$, $b_k=(k+1)^{2\gamma}\|\mathbb{D}_kf\|_p^2$ при $k=M+1,M+2,\ldots$ и $a_k=b_k=0$ при $k=1,\ldots,M$. Последнее же неравенство в (33) — следствие соотношения (30).

Теперь для любого $\nu>0$ и $f\in\mathrm{dyad}\,\mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}$ из (33) с учетом условия $\gamma>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\theta}$ получаем

$$\|f-\mathbb{E}_Mf\|_{\exp L^\nu}\ll M^{-\gamma+1/2-1/\theta}.$$

В случае (iii) при $\theta=2$ и $\gamma>0$ аналогичным образом приходим к соотношению

$$p^{-1/\nu}\|f-\mathbb{E}_Mf\|_p\leq C_1p^{-1/\nu}M^{-\gamma}\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}(k+1)^{\gamma\theta}\|\mathbb{D}_kf\|_q^\theta\right)^{1/\theta}\leq$$

$$\leq C_1p^{-1/\nu}M^{-\gamma}\|f\|_{\mathrm{dyad}\,B^{0,\gamma}_{q,\theta}},$$

откуда для $f\in\mathrm{dyad}\,\mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}$ имеем

$$\|f-\mathbb{E}_Mf\|_{\exp L^\nu}\ll M^{-\gamma}.$$

Теперь, учитывая, что для любой функции $f\in\mathrm{dyad}\,B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ имеет место вложение $\mathbb{E}_Mf\subset$ $\subset X_m$, где X_m — пространство, порожденное характеристическими функциями g_j, $j=$ $=0,1,\ldots,2^M-1$, интервалов $[j2^{-M},(j+1)2^{-M}]$ и $\dim X_m=2^M$, и полагая $n=2^M+j$, $j=0,1,\ldots,2^M-1$, как следствие установленных оценок сверху величин $\sup_{f\in\mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}}\|f-$ $-\mathbb{E}_Mf\|_{\exp L^\nu}$ получаем искомые оценки сверху величин $d_n\left(\mathrm{dyad}\,\mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta},\exp L^\nu\right)$ в теореме 1.

II. *Оценка снизу для* $\epsilon_n(\operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{q,\theta}, \exp L^\nu)$. В случае $q=\infty$, $\theta=\infty$ оценка снизу, с учетом отождествления $B^{0,\gamma}_{\infty,\infty}$ и LG^γ, а также вложения $B^{0,\gamma}_{\infty,\infty} \hookrightarrow \operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{\infty,\infty}$ при $\gamma > \dfrac{1}{2}$, известна (см. теорему ST):

$$\epsilon_n\left(\operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{\infty,\infty}, \exp L^\nu\right) \gg \begin{cases} (\log_2 n)^{-\gamma+1/2}, & \gamma > \dfrac{1}{2}, \quad \nu < 2, \\ (\log_2 n)^{-\gamma+1-1/\nu}, & \gamma > 1-\nu^{-1}, \quad \nu \geq 2. \end{cases}$$

В случае $2 \leq q < \infty$, $\theta = \infty$ (даже при $1 \leq q \leq \infty$), учитывая, что $B^{0,\gamma}_{\infty,\infty} \hookrightarrow B^{0,\gamma}_{q,\infty} \hookrightarrow$ $\hookrightarrow \operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{q,\infty}$, оценку снизу для $\epsilon_n\left(\operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{q,\infty}, \exp L^\nu\right)$ получаем автоматически из оценки снизу для $\epsilon_n(B^{0,\gamma}_{\infty,\infty}, \exp L^\nu)$, установленной в [4].

Оценку снизу в случаях $q=\infty$, $1 \leq \theta < \infty$ и $2 \leq q \leq \infty$, $2 \leq \theta < \infty$ снова получаем как следствие оценок снизу для $\epsilon_n\Big(B^{0,\gamma}_{q,\infty}, L_p\Big)$, $1 \leq p \leq \infty$, в теоремах C1 и C2, с учетом вложения $B^{0,\gamma}_{q,\theta} \hookrightarrow \operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ (см. лемму 2) и неравенства

$$\epsilon_n\Big(\operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{q,\theta}, \exp L^\nu\Big) \geq \epsilon_n\Big(\operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{q,\theta}, L_p\Big) \geq C\epsilon_n\Big(B^{0,\gamma}_{q,\theta}, L_p\Big).$$

III. *Заключение.* Применяя лемму A в ситуации установленных в пункте I оценок сверху величин $d_n\Big(\operatorname{dyad} \mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}, \exp L^\nu\Big)$ и в пункте II оценок снизу величин $\epsilon_n\Big(\operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{q,\theta}, \exp L^\nu\Big)$, окончательно получаем утверждение теоремы 1.

Литература

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
3. *Horoske D. D.* Enveloppes and sharp embedding of function spaces. – Chapman Hill, 2007.
4. *Seeger A., Trebels W.* Low regularity classes and entropy numbers // Arch. Math. – 2009. – **92**. – P. 147 – 157.
5. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* Об одной норме и аппроксимационных характеристиках классов функций многих переменных // Соврем. математика. Фундам. направления. – 2007. – **25**. – С. 58 – 79.
6. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 495 с.
7. *Романюк В. С.* Кратный базис Хаара и его свойства // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 9. – С. 1253 – 1264.
8. *Романюк А. С.* Оценки энтропийных чисел и колмогоровских поперечников классов Никольского – Бесова периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 11. – С. 1540 – 1556.
9. *Романюк А. С.* Энтропийные числа и поперечники классов $B^0_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 10. – С. 1403 – 1417.
10. *Pisier G.* The volume of convex bodies and Banach space geometry. – Gambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 251 p.
11. *Стасюк С. А.* Колмогоровские поперечники аналогов классов Никольского – Бесова с логарифмической гладкостью // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 11. – С. 1640 – 1645.
12. *Schmeisser H.-J., Triebel H.* Topic in Fourier analysis and function spaces. – Chichester: Wiley, 1987.
13. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.

Получено 10.02.17