УДК 517.5

Л. Г. Коваленко, Э. А. Стороженко (Одес. нац. ун-т, Ин-т математики, экономики и механики)

О ДРОБНОМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ КОМПЛЕКСНЫХ ПОЛИНОМОВ В L_0

We establish Bernstein-type inequalities for the fractional integroderivatives of arbitrary algebraic polynomials in the space L_0.

Встановлено нерівності типу Бернштейна для дробових інтегропохідних довільних алгебраїчних поліномів у просторі L_0.

Введение. Пусть $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ — алгебраический полином степени n с комплексными коэффициентами. Как обычно, функционалы $\|P_n\|_p \equiv \|P_n\|_{L_p}$ для $0 \le p \le \infty$ определяются значениями полинома на единичной окружности $|z| = 1$:

$$\|P_n\|_\infty = \max\big\{|P_n(z)|, |z| = 1\big\},$$

$$\|P_n\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \big|P_n(e^{i\varphi})\big|^p d\varphi\right)^{1/p},$$

$$\|P_n\|_0 = \lim_{p\to 0}\|P_n\|_p = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\big|P_n(e^{i\varphi})\big| d\varphi\right).$$

Следуя Малеру [1], квазинорму $\|P_n\|_0$ будем называть мерой полинома $P_n(z)$ и обозначать $M(P_n)$.

Определим дробную производную и дробный интеграл действительного порядка $\alpha \ge 0$ полинома $P_n(z)$ равенствами

$$D^\alpha P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k k^\alpha z^{k-1} \qquad \text{и} \qquad I^\alpha P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{z^{k+1}}{(k+1)^\alpha}. \tag{1}$$

Производные и интегралы дробного порядка понимают по-разному в зависимости от класса рассматриваемых функций и конкретных задач. Наши определения ближе всего к определениям Флетт из [2, 3] для аналитических внутри единичного круга функций, которые возникли при изучении потенциалов Бесселя и Рисса.

В настоящей статье изучаются неравенства типа Бернштейна для дробных интегропроизводных порядка $0 \le \alpha < 1$ полиномов $P_n(z)$ в пространстве L_0, т. е. неравенства вида

$$M(D^\alpha P_n) \le A(n,\alpha) M(P_n)$$

и

© Л. Г. КОВАЛЕНКО, Э. А. СТОРОЖЕНКО, 2017

$$M(I^\alpha P_n) \le B(n,\alpha) M(P_n),$$

где $A(n,\alpha)$ и $B(n,\alpha)$ не зависят от полинома $P_n(z)$.

При $\alpha = 1$ это оценки типа Бернштейна для производной $P_n'(z)$ и неопределенного интеграла $IP_n(z) = \int_0^z P_n(z)\,dz$. Неравенство для интеграла еще называют неравенством типа Фавара. Обе точные постоянные $A(n,1)$ и $B(n,1)$ известны. Значение $A(n,1) = n$ установлено Малером в работе [1], а

$$B(n,1) = \frac{1}{n} \prod_{n/6<k<5n/6} 2\sin\frac{\pi k}{n} \approx \frac{(1,4)^n}{n}$$

— вторым автором данной статьи в [5].

Основными результатами настоящей статьи являются две теоремы.

Теорема 1. *Для любого полинома $P_n(z)$ степени $n \ge 2$ и его дробной производной $D^\alpha P_n(z)$ порядка $0 \le \alpha < 1$ выполняется неравенство*

$$M(D^\alpha P_n) \le A(n,\alpha) M(P_n), \tag{2}$$

где

$$A(n,0) = \prod_{n/6<k<5n/6} 2\sin\frac{\pi k}{n} \approx (1,4)^n,$$

$$A(n,\alpha) \le A_\alpha n^{2\alpha/3} A(n,0), \qquad A_\alpha = 1,6\cdot 2^{2(1-\alpha)/3}, \quad 0 \le \alpha < 1.$$

В случае $\alpha = 0$ неравенство (2) *на полиномах $P_n(z) = c(1+z)^n$, $c \in \mathbb{C}$, обращается в равенство.*

Теорема 2. *Для любого полинома $P_n(z)$ степени $n \ge 1$ и его дробного интеграла $I^\alpha P_n(z)$ порядка $0 < \alpha < 1$ выполняется неравенство*

$$M(I^\alpha P_n) \le B(n,\alpha) M(P_n), \tag{3}$$

где

$$B(n,\alpha) \le A_{1-\alpha} n^{-(1+2\alpha)/3} (1,4)^n, \qquad A_{1-\alpha} = 1,6\cdot 2^{2\alpha/3}.$$

Неравенство (3) ранее было получено авторами в статье [10]. Здесь приводится другой способ доказательства, улучшающий значение $B(n,\alpha)$.

Иные результаты относительно дробного интегродифференцирования полиномов авторам неизвестны. Оценки типа Бернштейна для операторов более общего вида можно найти в работе [4]. Однако для интегропроизводных (1) применение результатов из [4], по мнению авторов, не представляется возможным.

Вспомогательные понятия и факты. Напомним некоторые сведения об алгебраических полиномах. *Композицией* (*по Сеге*) полиномов

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k z^k \qquad \text{и} \qquad R_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_k z^k$$

называют полином $\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k b_k z^k = Q_n(z) \otimes R_n(z)$ (см. [6, с. 75], отд. V).

Важную роль в рассуждениях играет неравенство

$$\|Q_n(z) \otimes R_n(z)\|_p \leq M(R_n)\|Q_n\|_p, \tag{4}$$

впервые полученное де Брюйн и Спрингер [7] для $p = 0$, а для всех $0 < p \leq \infty$ — В. В. Арестовым [8].

Неравенство (4) при $p = 0$ является точным на полиномах $Q_n(z) = c(1+z)^n,\ c \in \mathbb{C}$.

Нам понадобятся также две леммы.

Лемма 1. *Для любого* $0 < \alpha < 1$ *справедливо равенство*

$$k^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-t^k) \frac{dt}{t \ln^{1+\alpha}(1/t)}, \tag{5}$$

где $\Gamma(\alpha)$ — *гамма-функция Эйлера.*

Доказательство. Проинтегрируем по частям интеграл, определяющий гамма-функцию Эйлера, при условии на параметр $0 < \alpha < 1$:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} d(1-e^{-x}) = (1-\alpha)\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^{2-\alpha}}\,dx =$$

$$= \frac{1-\alpha}{k^{1-\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-kx}}{x^{2-\alpha}}\,dx = \frac{1-\alpha}{k^{1-\alpha}} \int_0^1 \frac{1-t^k}{t \ln^{2-\alpha}(1/t)}\,dt.$$

Отсюда легко следует (5).

Лемма 2. *Для неравных по модулю комплексных чисел* $a, b \in \mathbb{C}$ *и любого* $n \in \mathbb{N}$ *выполняются неравенства*

$$|a^n - b^n| \leq |a-b| \sum_{k=0}^{n-1} |a|^{n-k-1}|b|^k, \tag{6}$$

$$|a^n - b^n| \leq |a-b| \frac{|a|^n - |b|^n}{|a|-|b|}. \tag{7}$$

Оба неравенства не вызывают сомнений.

***Доказательство теоремы* 1.** Чтобы установить связь между полиномами $D^\alpha P_n(z)$ и $P_n(z)$, воспользуемся композицией полиномов (по Сеге). Пусть

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k z^k \qquad \text{и} \qquad D^\alpha P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k a_k k^\alpha z^{k-1}.$$

Тогда

$$zD^\alpha P_n(z) = P_n(z) \otimes R_n^\alpha(z), \qquad \text{где} \quad R_n^\alpha(z) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k^\alpha z^k = D^\alpha(1+z)^n$$

и $M(R_n^\alpha)$, в силу (4), есть $A(n,\alpha),\ n = 1, 2, 3, \ldots$. Нас интересует случай $n \geq 2$.

При $\alpha = 0$ (для производной нулевого порядка) $R_n^0 = (1+z)^n - 1$. Мера полиномов $(1+z)^n - 1$ была подсчитана в [5]:

$$A(n,0) = M\big((1+z)^n - 1\big) = \prod_{n/6<k<5n/6} 2\sin\frac{\pi k}{n} \approx (1,4)^n, \quad n \geq 2.$$

Перейдем к основному случаю $0 < \alpha < 1$. Представим полином $R_n^\alpha(z)$ в интегральной форме, заменив множитель k^α интегралом (5):

$$R_n^\alpha(z) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 \big[(1+z)^n - (1+tz)^n\big] \frac{dt}{t\ln^{1+\alpha}(1/t)}.$$

Отсюда

$$\big|R_n^\alpha(z)\big| \leq \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 \big|(1+z)^n - (1+tz)^n\big| \frac{dt}{t\ln^{1+\alpha}(1/t)}. \tag{8}$$

Мера $M(R_n^\alpha)$ определяется значениями полинома R_n^α на единичной окружности, поэтому, оценивая $\big|R_n^\alpha(z)\big|$, считаем $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in (-\pi,\pi)$. Тогда для любого $t \in (0,1)$ справедливо равенство

$$|1+tz|^2 = |1+z|^2 t + (1-t)^2. \tag{9}$$

Дальнейшие рассуждения проведем в два приема: сначала при $|1+z| > 1$, а затем при $|1+z| < 1$.

Итак, пусть $|1+z| > 1$. По лемме 2 (неравенство (7))

$$|(1+z)^n - (1+tz)^n| \leq (1-t)\frac{|1+z|^n - |1+tz|^n}{|1+z| - |1+tz|} =$$

$$= (1-t)\frac{|1+z|^n - |1+tz|^n}{|1+z|^2 - |1+tz|^2}(|1+z| + |1+tz|).$$

Из (9) следует, что

$$|1+z|^2 - |1+tz|^2 = (1-t)(|1+z|^2 - 1 + t) > (1-t)(|1+z|^2 - 1)$$

и, в частности, $|1+z| > |1+tz|$, а также

$$|1+z|^n - |1+tz|^n \leq |1+z|^n(1 - t^{n/2})$$

для любого $t \in (0,1)$.

Применяя полученные неравенства, продолжаем оценку (8):

$$|R_n^\alpha(z)| \leq \frac{2|1+z|^{n+1}}{|1+z|^2 - 1} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 (1 - t^{\frac{n}{2}}) \frac{dt}{t\ln^{1+\alpha}(1/t)}.$$

Примечательно, что оценку $|R_n^\alpha(z)|$ мы начинали, используя интеграл (5), и окончательно пришли к интегралу того же вида. Далее, по лемме 1 для $k = n/2$ получаем

$$|R_n^\alpha(z)| \le 2^{1-\alpha} n^\alpha \frac{|1+z|^{n+1}}{|1+z|^2-1}. \tag{10}$$

Пусть теперь $|1+z| < 1$. Для оценки $|(1+z)^n - (1+tz)^n|$ применим лемму 2 (неравенство (6)) и учтем, что $|1+tz|^2 < |1+z|^2 t + 1 - t < 1$ при каждом $t \in (0,1)$:

$$|(1+z)^n - (1+tz)^n| < (1-t)\sum_{k=0}^{n-1} |1+z|^{n-k-1} < \frac{1-t}{1-|1+z|}.$$

Это позволяет продолжить оценку (8) для данного случая:

$$|R_n^\alpha(z)| \le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 (1-t) \frac{dt}{t \ln^{1+\alpha}(1/t)} \frac{1}{1-|1+z|}.$$

Тогда по лемме 1 при $k=1$ имеем

$$|R_n^\alpha(z)| \le \frac{1}{1-|1+z|}. \tag{11}$$

Остается перейти к оценке $M(R_n^\alpha)$, используя неравенства (10) и (11). По определению

$$M(R_n^\alpha) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|R_n^\alpha(e^{i\varphi})| d\varphi\right) \le$$

$$\le 2^{\frac{2(1-\alpha)}{3}} n^{\frac{2}{3}\alpha} \exp\left(\frac{n+1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \ln\left|1-2\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \ln\left(1+2\cos\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi\right).$$

Полученные интегралы выразим посредством функции Лобачевского $L(x)$ и воспользуемся ее табличными значениями (см. [9]):

$$L(x) = -\int\limits_0^x \ln\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/3} \ln(2\cos\varphi) d\varphi = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{\pi} L(\pi/3) \approx 0{,}323,$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \ln|1-2\cos\varphi| d\varphi = \frac{4}{\pi}\left(L\left(\frac{\pi}{12}\right) + L\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) - 2\ln 2 \approx -0{,}777,$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/3} \ln\bigl(1+2\cos\varphi\bigr) d\varphi = \frac{4}{3}\ln 2 - \frac{4}{\pi} L\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 0{,}646.$$

Окончательно

$$A(n,\alpha) = M(R_n^\alpha) \le 1{,}6 \cdot 2^{2(1-\alpha)/3} n^{2\alpha/3} A(n,0). \tag{12}$$

Теорема 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Запишем дробный интеграл $I^\alpha P_n(z)$ в виде композиции

$$\frac{1}{z} I^\alpha P_n(z) = P_n(z) \otimes B_n^\alpha(z),$$

где $B_n^\alpha(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k \dfrac{z^k}{(k+1)^\alpha} = I^\alpha(1+z)^n$. На основании неравенства (4) $B(n,\alpha) = M(B_n^\alpha)$. Заметим также, что между полиномами, составляющими композицию для дробного интеграла и для дробной производной, существует взаимосвязь

$$B_n^\alpha(z) = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} \frac{z^{k-1}}{k^\alpha} = \frac{1}{(n+1)z} \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k k^{1-\alpha} z^k = \frac{1}{(n+1)z} R_{n+1}^{1-\alpha}(z).$$

Но тогда, используя оценку (12) меры $M(R_n^\alpha)$, имеем

$$B(n,\alpha) = M(B_n^\alpha) = \frac{1}{n+1} M(R_{n+1}^{1-\alpha}) \le 1,6 \cdot 2^{2\alpha/3} n^{-(1+2\alpha)/3} (1,4)^n,$$

что и требовалось доказать.

***Замечание* 1.** Теорема 1 доказана в предположении, что $n \ge 2$. В случае $n = 1$ полином, составляющий композицию для производной $D^\alpha P_1(z)$ при любом $0 < \alpha < 1$, имеет простой вид $R_1^\alpha = z$ и $A(1,\alpha) = M(z) = 1$, очевидно, точная постоянная.

***Замечание* 2.** Остался открытым вопрос об окончательности оценок в теоремах 1 и 2 (кроме случая $\alpha = 0$ в теореме 1). Особое внимание привлекает множитель $(1,4)^n$. Отметим только его необходимое наличие для „граничных” коэффициентов $A(n,0)$ и $B(n,1)$.

***Замечание* 3.** Благодаря оценке (4), теоремы 1 и 2 обеспечивают выполнение неравенств

$$\|D^\alpha P_n\|_p \le A(n,\alpha)\|P_n\|_p \qquad \text{и} \qquad \|I^\alpha P_n\|_p \le B(n,\alpha)\|P_n\|_p, \quad 0 \le p \le \infty.$$

Литература

1. *Mahler K.* On the zeros of the derivative of a polynomial // Proc. Roy. Soc. London A. – 1961. – **264**. – P. 145 – 154.
2. *Flett T. M.* Mean values of power series // Pacif. J. Math. – 1968. – **25**. – P. 163 – 194.
3. *Flett T. M.* Temperatures Bessel potentials and Lipschitz spaces // Proc. London Math. Soc. – 1971. – **22**, № 3. – P. 385 – 481.
4. *Арестов В. В.* Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 4. – С. 7 – 18.
5. *Стороженко Э. А.* К одной задаче Малера о нулях полинома и его производной // Мат. сб. – 1996. – **187**, № 5. – С. 111 – 120.
6. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. – М.: Наука, 1978. – Т. 1. – 391 с.
7. *De Bruijn N. J., Springer T. A.* On the zeros of composition polynomials // Jndag. Math. – 1947. – **9**. – P. 406 – 414.
8. *Арестов В. В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1981. – **45**. – С. 3 – 22.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм и произведений. – М.: Гостехтеориздат, 1963. – 1100 с.
10. *Стороженко Э. А., Коваленко Л. Г.* Неравенство для дробных интегралов комплексных полиномов в L_0 // Мат. заметки. – 2014. – **96**, № 4. – С. 633 – 636.

Получено 08.11.16