УДК 517.983

В. Ф. Журавлев (Житомир. нац. агроэкол. ун-т)

СЛАБОВОЗМУЩЕННЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

We obtain the conditions of bifurcation of the solutions of weakly perturbed operator equations in Banach spaces from the point $\varepsilon = 0$ and propose a convergent iterative procedure for finding the solutions in the form of parts of the series in powers of ε with pole at the point $\varepsilon = 0$.

Отримано умови біфуркації з точки $\varepsilon = 0$ розв'язків слабкозбурених операторних рівнянь у банахових просторах. Запропоновано збіжну ітераційну процедуру побудови розв'язків у вигляді частини ряду за ступенями ε з полюсом у точці $\varepsilon = 0$.

Анализ слабовозмущенных уравнений

$$(Lz)(t) = f(t) + \varepsilon(Az)(t) \tag{1}$$

в банаховых пространствах продолжает развитие методов теории возмущений и существенным образом опирается на метод Вишика – Люстерника [1] и метод малого параметра Ляпунова – Пуанкаре [2].

Эти методы были обобщены на случай нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений [3 – 5].

Дальнейшим обобщением этих задач стало их рассмотрение в банаховых пространствах, когда конечномерное евклидово пространство значений функции заменялось общим банаховым пространством. Слабовозмущенные краевые задачи в случае, когда L — дифференциальный оператор, действующий в банаховом пространстве, исследовали А. А. Бойчук и Е. В. Панасенко [6]. Важной особенностью этих задач является то, что уравнение $Lz = f$ линейной порождающей краевой задачи $(\varepsilon = 0)$ имеет решения при любой правой части, т. е. оператор L является везде разрешимым [7].

Исследование слабовозмущенных не везде разрешимых сингулярных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в конечномерных пространствах проводили А. А. Бойчук, Л. М. Шегда и И. А. Головацкая [8, 9].

Постановка задачи. Пусть $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — банахово пространство ограниченных вектор-функций $z(t)$, определенных на конечном промежутке $\mathcal{I}$, со значениями в банаховом пространстве $\mathbf{B}_1$, $z(\cdot) \colon \mathcal{I} \to \mathbf{B}_1$ с равномерной нормой $|||z(t)||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|z(t)\|_{\mathbf{B}_1}$, а $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — банахово пространство ограниченных вектор-функций $f(t)$, определенных на том же промежутке $\mathcal{I}$, со значениями в банаховом пространстве $\mathbf{B}_2$, $f(\cdot) \colon \mathcal{I} \to \mathbf{B}_2$ с равномерной нормой $|||f(t)||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|f(t)\|_{\mathbf{B}_2}$ [10].

Рассмотрим слабовозмущенное уравнение (1), где L — линейный ограниченный обобщенно-обратимый [11], A — линейный ограниченный операторы, которые действуют из банахова пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ в банахово пространство $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, ε — малый параметр.

Обобщенная обратимость оператора L означает, что ядро $N(L)$ и образ $R(L)$ оператора L дополняемы [12] в банаховых пространствах $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ и $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ соответственно. С каждой парой взаимно дополняемых подпространств связаны ограниченные проекторы $\mathcal{P}_{N(L)}:$ $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)\to N(L)$ и $\mathcal{P}_{R(L)}:\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)\to R(L)$, которые индуцируют разбиения $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ и $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$ в прямые топологические суммы

$$\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)=N(L)\oplus X_L,\quad \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)=Y_L\oplus R(L).$$

Дополнительные ограниченные проекторы на подпространства X_L и Y_L соответственно будем обозначать $\mathcal{P}_{X_L}=I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}-\mathcal{P}_{N(L)}$ и $\mathcal{P}_{Y_L}=I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)}-\mathcal{P}_{R(L)}$.

В дальнейшем класс линейных ограниченных обобщенно-обратимых операторов, действующих из банахова пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ в банахово пространство $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$, будем обозначать $\mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1),\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2))$. Очевидно, что оператор из $\mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1),\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2))$ является нормально разрешимым.

Предположим, что порождающее уравнение

$$(Lz)(t)=f(t),\tag{2}$$

которое получается из (1) при $\varepsilon=0$, не имеет решений при произвольной неоднородности $f(t)\in\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$.

Возникает вопрос: можно ли с помощью малого линейного возмущения сделать уравнение (2) разрешимым, а если можно, то каким условиям должен удовлетворять оператор A в уравнении (1)?

В этой работе, применив теорию обобщенного обращения операторов в банаховых пространствах [4, 5], а также теоремы о разрешимости операторных уравнений с обобщенно-обратимыми операторами L [14], рассмотрим задачу об условиях существования и способах построения решений слабовозмущенных операторных уравнений в банаховых пространствах с обобщенно-обратимым оператором в линейной части.

Предварительные сведения. Для порождающего уравнения (2) справедлива следующая теорема.

Теорема 1 [14]. *Пусть* $L\in\mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1),\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2))$.

Тогда соответствующее (2) *однородное* $(f(t)=0)$ *операторное уравнение имеет семейство решений*

$$z(t)=(\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z})(t),$$

где $\mathcal{P}_{N(L)}$ *— ограниченный проектор,* $\hat{z}(t)$ *— произвольный элемент банахова пространства* $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$.

Неоднородное операторное уравнение (2) *разрешимо для тех и только тех* $f(t)\in\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$, *для которых выполняется условие*

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(t)=0,\tag{3}$$

и при этом имеет семейство решений

$$z(t)=(\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z})(t)+(L^-f)(t),\tag{4}$$

где $\mathcal{P}_{Y_L}$ *— ограниченный проектор,* L^- *— ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору* L.

Из теоремы 1 имеем два „крайних” случая, когда уравнение (2) однозначно и везде разрешимо [7].

***Следствие* 1.** *Пусть* $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$ — n*-нормальный оператор и* $N(L) \equiv \equiv 0$. *Операторное уравнение* (2) *разрешимо для тех и только тех* $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, *для которых выполняется условие* (3), *и при этом имеет единственное решение*

$$z(t) = (L_l^{-1} f)(t),$$

где L_l^{-1} — *ограниченный левый обратный оператор к оператору* L.

Действительно, если $N(L) \equiv 0$, то $\mathcal{P}_{N(L)} = 0$. Тогда обобщенно-обратный оператор L^- будет левым обратным оператором L_l^{-1} [13], а из (4) следует, что уравнение (2) однозначно разрешимо.

***Следствие* 2.** *Пусть* $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$ — d*-нормальный оператор и* $Y_L \equiv \equiv 0$. *Операторное уравнение* (2) *разрешимо для любых* $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ *и при этом имеет семейство решений*

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z})(t) + \left(L_r^{-1} f\right)(t),$$

где L_r^{-1} — *ограниченный правый обратный оператор к оператору* L.

Действительно, если $Y_L \equiv 0$, то $\mathcal{P}_{Y_L} = 0$. Тогда обобщенно-обратный оператор L^- будет правым обратным оператором L_r^{-1} [13], а из (3) следует, что уравнение (2) везде разрешимо.

Основной результат. Пусть порождающее уравнение (2) не имеет решений при произвольной неоднородности $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$. По теореме 1 это означает, что условие разрешимости (3) не выполняется, т. е.

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) \neq 0.$$

Для решения поставленной задачи используем метод Вишика – Люстерника [1]. Решение уравнения (1) будем искать в виде части ряда по степеням малого параметра ε с полюсом в точке $\varepsilon = 0$:

$$z(t, \varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t). \tag{5}$$

Подставим ряд (5) в уравнение (1) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε.

Приравнивая коэффициенты при ε^{-1}, приходим к однородному уравнению

$$(Lz_{-1})(t) = 0 \tag{6}$$

для определения $z_{-1}(t)$.

По теореме 1 однородное уравнение (6) имеет решение

$$z_{-1}(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z}_{-1})(t), \tag{7}$$

где $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to N(L)$ — ограниченный проектор, а $\hat{z}_{-1}(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — произвольный элемент, который будет определен ниже.

Приравнивая коэффициенты при ε^0, получаем уравнение

$$(Lz_0)(t) = f_{-1}(t) \tag{8}$$

для определения коэффициента $z_0(t)$, где

$$f_{-1}(t) = f(t) + (Az_{-1})(t).$$

По теореме 1 критерий разрешимости линейного неоднородного уравнения (8) имеет вид

$$\left(\mathcal{P}_{Y_L}\left[f(\cdot) + (Az_{-1})(\cdot)\right]\right)(t) = 0.$$

Подставив $z_{-1}(t)$ из (7), получим операторное уравнение

$$(B_0\hat{z}_{-1})(t) = -(\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) \tag{9}$$

относительно элемента $\hat{z}_{-1} \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, где

$$B_0 = \mathcal{P}_{Y_L}A\mathcal{P}_{N(L)}. \tag{10}$$

Пусть оператор $B_0 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), Y_L)$. Тогда он нормально разрешим и существуют ограниченные проекторы $\mathcal{P}_{N(B_0)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to N(B_0)$, $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} : Y_L \to Y_{B_0}$.

Уравнение (9) может быть [7]: однозначно разрешимым $(\mathcal{P}_{N(B_0)} \equiv 0)$, везде разрешимым $(\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \equiv 0)$, неоднозначно и не везде разрешимым $(\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0, \mathcal{P}_{Y_{B_0}} \neq 0)$. Тривиальный случай, когда $\mathcal{P}_{N(B_0)} \equiv 0$ $(\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \equiv 0)$ (существует B_0^{-1}), мы рассматривать не будем.

1. *Построение единственного решения.* Рассмотрим сначала случай, когда уравнение (9) однозначно разрешимо, т. е. $\mathcal{P}_{N(B_0)} \equiv 0$. В этом случае оператор B_0 будет n-нормальным с нулевым ядром. Тогда по следствию 1 уравнение (9) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию

$$(\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) = 0.$$

Последнее условие будет выполняться, если выполнено условие

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_L} = 0, \tag{11}$$

а операторное уравнение (9) при этом будет иметь единственное решение [13]

$$\hat{z}_{-1}(t) = -\left((B_0)_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_L}f\right)(t).$$

Подставляя $\hat{z}_{-1}(t)$ в (7), получаем решение однородного уравнения (6)

$$z_{-1}(t) = -\left(\mathcal{P}_{N(L)}(B_0)_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_L}f\right)(t) = \left((\widetilde{B}_0)_l^{-1}f\right)(t),$$

где $\left(\widetilde{B}_0\right)_l^{-1} = -\mathcal{P}_{N(L)}(B_0)_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_L}$.

При этом уравнение (8) по теореме 1 имеет семейство решений

$$z_0(t) = \left(\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z}_0\right)(t) + \bar{z}_0(t), \tag{12}$$

где

$$\bar{z}_0(t) = \left(L^- f_{-1}\right)(t) = \left(L^-[f(\cdot) + Az_{-1}(\cdot)]\right)(t) = \left(L^- \left[I + A(\widetilde{B}_0)_l^{-1}\right] f\right)(t),$$

$\hat{z}_0(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — произвольный элемент пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, который будет определен на следующем шаге итерационного процесса, L^- — ограниченный обобщенно-обратный оператор [4, 5, 13, 14] к оператору L.

Приравнивая коэффициенты при ε^1, приходим к уравнению для определения коэффициента $z_1(t)$

$$(Lz_1)(t) = f_0(t), \tag{13}$$

где

$$f_0(t) = \left(A\left[(\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z}_0)(\cdot) + \bar{z}_0(\cdot)\right]\right)(t),$$

$\hat{z}_0 \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — произвольный элемент, который будет определен из критерия разрешимости уравнения (13).

По теореме 1 уравнение (13) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f_0)(t) = \left(\mathcal{P}_{Y_L} A\left[(\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z}_0)(\cdot) + \bar{z}_0(\cdot)\right]\right)(t) = 0.$$

Из последнего соотношения получаем операторное уравнение относительно элемента $\hat{z}_0 \in$ $\in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$:

$$(B_0\hat{z}_0)(t) = -(\mathcal{P}_{Y_L} A\bar{z}_0)(t). \tag{14}$$

По предположению оператор B_0 обобщенно обратим. По теореме 1 операторное уравнение (14) разрешимо тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\left(\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_L} A\bar{z}_0\right)(t) = 0,$$

при выполнении которого оно имеет единственное ($\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$) решение

$$\hat{z}_0(t) = -\left((B_0)_l^{-1} \mathcal{P}_{Y_L} A\bar{z}_0\right)(t). \tag{15}$$

Подставляя (15) в (12), получаем

$$z_0(t) = -(\mathcal{P}_{N(L)}(B_0)_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_L} A\bar{z}_0(\cdot))(t) + \bar{z}_0(t) =$$

$$= ((\widetilde{B}_0)_l^{-1} A\bar{z}_0)(t) + \bar{z}_0(t) = ([I + (\widetilde{B}_0)_l^{-1} A]\bar{z}_0)(t).$$

При выполнении (14) уравнение (13) по теореме 1 имеет семейство решений

$$z_1(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z}_1)(t) + \bar{z}_1(t), \tag{16}$$

где $\hat{z}_1(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — произвольный элемент, который будет определен на следующем шаге итерационного процесса,

$$\bar{z}_1(t) = \left(L^- f_0\right)(t) = \left(L^- A z_0\right)(t) = \left(L^- A \left[I + (\widetilde{B}_0)_l^{-1} A\right] \bar{z}_0\right)(t).$$

Действуя по индукции, для определения коэффициентов $z_i(t)$ при ε^i ряда (5) приходим к операторным уравнениям

$$(Lz_i)(t) = f_{i-1}(t), \tag{17}$$

где

$$f_{i-1}(t) = (Az_{i-1})(t) = \left(A\left[(\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z}_{i-1})(\cdot) + \bar{z}_{i-1}(\cdot)\right]\right)(t),$$

$\hat{z}_{i-1}(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — произвольные элементы, которые будут определяться из критериев разрешимости операторных уравнений (17).

При условии (11) произвольные элементы $\hat{z}_i(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ находятся по формулам

$$\hat{z}_i(t) = -\left((B_0)_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_L} A \bar{z}_i\right)(t).$$

При этом каждое из операторных уравнений (17) имеет семейство решений

$$z_i(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z}_i)(t) + \bar{z}_i(t),$$

где $\bar{z}_i(t)$ имеют вид

$$\bar{z}_i(t) = \left(L^- A z_{i-1}\right)(t) = \left(L^- A \left[I + (\widetilde{B}_0)_l^{-1} A\right] \bar{z}_{i-1}\right)(t).$$

Таким образом, имеем итерационный алгоритм построения решения уравнения (1):

$$\begin{gathered} z_i(t) = \begin{cases} \left((\widetilde{B}_0)_l^{-1} f\right)(t), & \text{если} \quad i = -1, \\ \left(\left[I + (\widetilde{B}_0)_l^{-1} A\right] \bar{z}_i\right)(t), & \text{если} \quad i = \overline{0, \infty}, \end{cases} \\ \bar{z}_i(t) = \begin{cases} \left(L^- \left[I + A(\widetilde{B}_0)_l^{-1}\right] f\right)(t), & \text{если} \quad i = 0, \\ \left(L^- A\left[I + (\widetilde{B}_0)_l^{-1} A\right] \bar{z}_{i-1}\right)(t), & \text{если} \quad i = \overline{1, \infty}. \end{cases} \end{gathered} \tag{18}$$

Докажем сходимость ряда (5) при фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$.

Пусть

$$\begin{gathered} |||(\widetilde{B}_0)_l^{-1}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} = \tilde{b}_0 < \infty, \quad |||L^-|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} = l < \infty, \\ |||A|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} = a < \infty, \quad |||f(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} = f < \infty. \end{gathered} \tag{19}$$

Запишем ряд (5) в виде

$$z(t,\varepsilon)=\sum_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^i z_i(t)=\varepsilon^{-1}z_{-1}(t)+z_0(t)+\sum_{i=1}^{+\infty}\varepsilon^i z_i(t).$$

Сначала оценим коэффициенты первых двух членов ряда:

$$|||z_{-1}(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}=|||((\widetilde{B}_0)_l^{-1}f)(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}\leq\tilde{b}_0|||f(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}. \tag{20}$$

Следовательно, первый коэффициент $z_{-1}(t)$ ряда (5) ограничен по норме.

Для оценки второго коэффициента $z_0(t)$ ряда (5) сначала оценим $\bar{z}_0(t)$:

$$|||\bar{z}_0(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}=\sup_{t\in\mathcal{I}}\left\|\left(L^-\left[I+A(\widetilde{B}_0)_l^{-1}\right]f\right)(t)\right\|\leq l(1+a\tilde{b}_0)|||f(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)}.$$

Тогда для $z_0(t)$ имеем

$$|||z_0(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}=\sup_{t\in\mathcal{I}}\left\|\left(\left[I+(\widetilde{B}_0)_l^{-1}A\right]\bar{z}_0\right)(t)\right\|\leq$$

$$\leq\left(1+a\tilde{b}_0\right)|||\bar{z}_0(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}\leq l\left(1+a\tilde{b}_0\right)^2|||f(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)},$$

откуда следует ограниченность по норме $z_0(t)$.

Далее докажем сходимость ряда $\sum_{i=1}^{+\infty}\varepsilon^i z_i(t)$. Для всех $i=\overline{1,\infty}$ имеем

$$|||\bar{z}_i(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}=\sup_{t\in\mathcal{I}}\left\|\left(L^-A\left[I+(\widetilde{B}_0)_l^{-1}A\right]\bar{z}_{i-1}\right)(t)\right\|\leq$$

$$\leq al(1+a\tilde{b}_0)|||\bar{z}_{i-1}(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}.$$

Тогда для $z_i(t)$ получим оценку по норме

$$|||z_i(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}=\sup_{t\in\mathcal{I}}\left\|\left(\left[I+(\widetilde{B}_0)_l^{-1}A\right]\bar{z}_i\right)(t)\right\|\leq(1+a\tilde{b}_0)|||\bar{z}_i(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}.$$

Таким образом, имеем

$$|||z_1(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}\leq al(1+a\tilde{b}_0)^2|||\bar{z}_0(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}\leq al^2(1+a\tilde{b}_0)^3|||f(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)},$$

$$|||z_2(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}\leq(1+a\tilde{b}_0)|||\bar{z}_2(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}\leq al(1+a\tilde{b}_0)^2|||\bar{z}_1(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}\leq$$

$$\leq(al)^2(1+a\tilde{b}_0)^3|||\bar{z}_0(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}\leq a^2l^3(1+a\tilde{b}_0)^4|||f(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)}.$$

Продолжая этот процесс далее, по индукции получаем

$$|||z_i(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}\leq a^il^{i+1}(1+a\tilde{b}_0)^{i+2}|||f(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)}.$$

Из полученных оценок следует, что ряд (5) мажорируется рядом

$$\sum_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^i z_i(t)\leq\varepsilon^{-1}\tilde{b}_0|||f(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}+\sum_{i=0}^{+\infty}\varepsilon^i a^il^{i+1}(1+a\tilde{b}_0)^{i+2}|||f(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)},$$

в котором первый член ограничен, а ряд

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i a^i l^{i+1} (1 + a\tilde{b}_0)^{i+2} |||f(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)}$$

равномерно сходится для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, где $\varepsilon_* < \left[al(1 + a\tilde{b}_0)\right]^{-1}$.

Таким образом, для слабовозмущенного операторного уравнения (1) с обобщенно-обратимым оператором в линейной части справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$ *и порождающее уравнение* (2) $(\varepsilon = 0)$ *при произвольной неоднородности* $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ *не имеет решений.*

Тогда если оператор $B_0 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), Y_L)$ *и*

$$\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0, \quad \mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_L} = 0,$$

то слабовозмущенное уравнение (1) *при произвольной неоднородности* $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ *имеет единственное решение в виде ряда*

$$z(t, \varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t),$$

абсолютно сходящегося при произвольных фиксированных $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, *а коэффициенты ряда определяются с помощью итерационного алгоритма* (18).

2. *Построение семейства решений.* Рассмотрим более общий случай, когда уравнение (9) неоднозначно ($\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0$) и не везде разрешимо ($\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \neq 0$). Тогда по теореме 1, в результате нормальной разрешимости оператора B_0, при выполнении условия (11) операторное уравнение (9) будет иметь семейство решений

$$\hat{z}_{-1}(t) = (\mathcal{P}_{N(B_0)} \hat{z})(t) + \hat{\bar{z}}_{-1}(t),$$

где $\hat{z}(t)$ — произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$,

$$\hat{\bar{z}}_{-1}(t) = -\left(B_0^- \mathcal{P}_{Y_L} f\right)(t).$$

Подставляя $\hat{z}_{-1}(t)$ в (7), получаем решение однородного уравнения (6):

$$z_{-1}(t) = (\mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{P}_{N(B_0)} \hat{z})(t) - (\mathcal{P}_{N(L)} \hat{\bar{z}}_{-1})(t) = (\mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{P}_{N(B_0)} \hat{z})(t) + \bar{z}_{-1}(t),$$

где $\bar{z}_{-1}(t) = -(\mathcal{P}_{N(L)} \hat{\bar{z}}_{-1})(t) = -(\mathcal{P}_{N(L)} B_0^- \mathcal{P}_{Y_L} f)(t)$.

Обозначив $\widetilde{B}_0^- = -\mathcal{P}_{N(L)} B_0^- \mathcal{P}_{Y_L}$, получим

$$z_{-1}(t) = (\mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{P}_{N(B_0)} \hat{z})(t) + (\widetilde{B}_0^- f)(t).$$

При этом уравнение (8) по теореме 1 имеет семейство решений

$$z_0(t) = (\mathcal{P}_{N(L)} \hat{z}_0)(t) + F_{-1}(t), \tag{21}$$

где $\hat{z}_0(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — произвольный элемент пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, который будет определен на следующем шаге итерационного процесса,

$$F_{-1}(t) = \left(L^- f_{-1}\right)(t) = \left(L^- \left[f(\cdot) + Az_{-1}(\cdot)\right]\right)(t) =$$

$$= \left(L^- f\right)(t) + \left(L^- A\left[(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{z})(t) + (\widetilde{B}_0^- f)\right]\right)(t) =$$

$$= \widetilde{F}_{-1}(t) + (H_{-1}\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{z}(\cdot))(t), \tag{22}$$

L^- — ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору L,

$$\widetilde{F}_{-1}(t) = \left(L^- f\right)(t) + \left(L^- A\widetilde{B}_0^- f\right)(t) = \left(L^-[I + A\widetilde{B}_0^-]f\right)(t),$$

$$H_{-1} = L^- A\mathcal{P}_{N(L)},$$

$\hat{z}(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — произвольный элемент пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

Приравнивая коэффициенты при ε^1, получаем уравнение для определения решения $z_1(t)$

$$(Lz_1)(t) = f_0(t), \tag{23}$$

где

$$f_0(t) = (Az_0)(t) = \left(A\left[(\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z}_0)(\cdot) + F_{-1}(\cdot)\right]\right)(t),$$

$\hat{z}_0(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — произвольный элемент, который будет определен из критерия разрешимости уравнения (23).

По теореме 1 уравнение (23) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f_0)(t) = 0.$$

С учетом (21) будем иметь

$$\left(\mathcal{P}_{Y_L} A\left[(\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z}_0)(\cdot) + F_{-1}(\cdot)\right]\right)(t) = 0. \tag{24}$$

Из последнего соотношения с учетом (22) получим операторное уравнение относительно элемента $\hat{z}_0 \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$:

$$\left(B_0\hat{z}_0\right)(t) = -\left(\mathcal{P}_{Y_L} A\left[(H_{-1}\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{z})(\cdot) + \widetilde{F}_{-1}(\cdot)\right]\right)(t). \tag{25}$$

По предположению оператор B_0 обобщенно-обратим и, как следствие, нормально разрешим. В этом случае по теореме 1 операторное уравнение (25) разрешимо тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\left(\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_L} A\left[(H_{-1}\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{z})(\cdot) + \widetilde{F}_{-1}(\cdot)\right]\right)(t) = 0, \tag{26}$$

при выполнении которого оно имеет семейство решений

$$\hat{z}_0(t) = (\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{z})(t) - \Big(B_0^{-}\mathcal{P}_{Y_L}A\Big[(H_{-1}\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{z})(\cdot) + \widetilde{F}_{-1}(\cdot)\Big]\Big)(t) =$$

$$= \left(\left[I - B_0^{-}\mathcal{P}_{Y_L}AH_{-1}\right]\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{z}\right)(t) - \Big(B_0^{-}\mathcal{P}_{Y_L}A\widetilde{F}_{-1}(\cdot)\Big)(t) =$$

$$= \left(D_0\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{z}\right)(t) + \hat{\bar{z}}_0(t), \tag{27}$$

где $\hat{z}(t)$ — произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$,

$$D_0 = I - B_0^{-}\mathcal{P}_{Y_L}AH_{-1},$$

$$\hat{\bar{z}}_0(t) = -(B_0^{-}\mathcal{P}_{Y_L}A\widetilde{F}_{-1}(\cdot))(t).$$

Условие (26) будет выполнено, если $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_L} = 0$.

Подставив (27) в (21), получим

$$z_0(t) = \left(\mathcal{P}_{N(L)}\left[\hat{\bar{z}}_0(\cdot) + (D_0\mathcal{P}_{N(B_0)})\hat{z}(\cdot)\right]\right)(t) +$$

$$+\widetilde{F}_{-1}(t) + (H_{-1}\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{z})(t) = (X_0\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{z})(t) + \bar{z}_0(t),$$

где

$$\bar{z}_0(t) = \widetilde{F}_{-1}(t) + \mathcal{P}_{N(L)}\hat{\bar{z}}_0 = \Big(\Big[I + \widetilde{B}_0^{-}A\Big]\widetilde{F}_{-1}\Big)(t),$$

$$X_0 = H_{-1} + \mathcal{P}_{N(L)}D_0 = H_{-1} + \mathcal{P}_{N(L)}\left[I - B_0^{-}\mathcal{P}_{Y_L}AH_{-1}\right] =$$

$$= \mathcal{P}_{N(L)} + \Big[I + \widetilde{B}_0^{-}A\Big]H_{-1}.$$

При выполнении (24) уравнение (23) по теореме 1 имеет семейство решений

$$z_1(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z}_1)(t) + F_0(t), \tag{28}$$

где $\hat{z}_1(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — произвольный элемент, который будет определен на следующем шаге итерационного процесса,

$$F_0(t) = \left(L^{-}Az_0\right)(t) = \left(L^{-}A\left[\bar{z}_0(\cdot) + X_0\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{z}(\cdot)\right]\right)(t) =$$

$$= \widetilde{F}_0(t) + \left(H_0\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{z}(\cdot)\right)(t),$$

$$\widetilde{F}_0(t) = L^{-}A\Big[I + \widetilde{B}_0^{-}A\Big]\widetilde{F}_{-1}(t), \quad H_0 = L^{-}AX_0.$$

Действуя по индукции, для определения $z_i(t)$ при ε^i, $i = \overline{0, \infty}$, ряда (5) приходим к операторным уравнениям

$$(Lz_i)(t) = f_{i-1}(t), \tag{29}$$

где

$$f_{i-1}(t) = \left(A\left[\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z}_{i-1}(\cdot) + F_{i-2}(\cdot)\right]\right)(t),$$

$\hat{z}_{i-1}(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — произвольные элементы, которые будут определяться из критериев разрешимости операторных уравнений (29).

Каждое из операторных уравнений (29), вследствие нормальной разрешимости оператора L, будет иметь решения тогда и только тогда, когда

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f_{i-1})(t) = \left(\mathcal{P}_{Y_L} A\left[\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z}_{i-1}(\cdot) + F_{i-2}(\cdot)\right]\right)(t) = 0$$

или

$$(B_0\hat{z}_{i-1})(t) = -\left(\mathcal{P}_{Y_L} A\left[\widetilde{F}_{i-2}(\cdot) + H_{i-2}\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{z}(\cdot)\right]\right)(t). \tag{30}$$

По предположению оператор B_0 обобщенно-обратим, поэтому по теореме 1 при выполнении условий

$$\left(\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_L} A\left[\widetilde{F}_{i-2}(\cdot) + H_{i-2}\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{z}(\cdot)\right]\right)(t) = 0 \tag{31}$$

уравнения (30) разрешимы, и каждое из них имеет семейство решений

$$\hat{z}_{i-1}(t) = (D_{i-1}\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{z})(\cdot) + \hat{\bar{z}}_{i-1}(t),$$

где

$$D_{i-1} = I - B_0^- \mathcal{P}_{Y_L} A H_{i-2},$$

$$\hat{\bar{z}}_{i-1}(t) = -\left(B_0^- \mathcal{P}_{Y_L} A\widetilde{F}_{i-2}\right)(t).$$

Условия (31) будут всегда выполняться, если $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_L} = 0$.

Тогда уравнения (29) будут иметь общие решения

$$z_i(t) = (X_i\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{z})(t) + \bar{z}_i(t),$$

где $\hat{z}(t)$ — произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$,

$$\bar{z}_i(t) = \left([I + \widetilde{B}_0^- A]\widetilde{F}_{i-1}\right)(t),$$

$$X_i = \mathcal{P}_{N(L)} + \left[I + \widetilde{B}_0^- A\right] H_{i-1} = \mathcal{P}_{N(L)} + \widetilde{X}_i,$$

$$\widetilde{X}_i = \left[I + \widetilde{B}_0^- A\right] H_{i-1}.$$

Таким образом, имеем итерационный алгоритм построения семейства решений операторного уравнения (1):

$$z_i(t) = \left(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{z}\right)(t) + \left(\widetilde{X}_i\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{z}\right)(t) + \bar{z}_i(t),$$

$$\widetilde{X}_i = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i = -1, \\ \left[I + \widetilde{B}_0^- A\right] L^- A \mathcal{P}_{N(L)}, & \text{если} \quad i = 0, \\ \left[I + \widetilde{B}_0^- A\right] L^- A \widetilde{X}_{i-1}, & \text{если} \quad i = \overline{1, \infty}, \end{cases}$$

$$\bar{z}_i(t) = \begin{cases} \left(\widetilde{B}_0^- f\right)(t), & \text{если} \quad i = -1, \\ \left(\left[I + \widetilde{B}_0^- A\right] \widetilde{F}_{i-1}\right)(t), & \text{если} \quad i = \overline{0, \infty}, \end{cases} \tag{32}$$

$$\widetilde{F}_{i-1}(t) = \begin{cases} \left(L^- \left[I + A\widetilde{B}_0^-\right] f\right)(t), & \text{если} \quad i = 0, \\ \left(L^- A \left[I + \widetilde{B}_0^- A\right] F_{i-2}\right)(t), & \text{если} \quad i = \overline{1, \infty}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что при выполнении условия (11) слабовозмущенное операторное уравнение (1) имеет семейство решений в виде ряда

$$z(t, \varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i (\mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{P}_{N(B_0)} \hat{z})(t) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i (\widetilde{X}_i \mathcal{P}_{N(B_0)} \hat{z})(t) + \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i \bar{z}_i(t). \tag{33}$$

Использовав обозначения (19) и

$$|||\widetilde{B}_0^-|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} = \tilde{b} < \infty, \quad |||\mathcal{P}_{N(L)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} = p < \infty, \quad |||\mathcal{P}_{N(B_0)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} = \tilde{p} < \infty,$$

докажем равномерную сходимость ряда (33).

Очевидно, что в силу ограниченности операторов проектирования $\mathcal{P}_{N(L)}$ и $\mathcal{P}_{N(B_0)}$ ряд

$$\sum_{i=-1}^{+\infty} (\mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{P}_{N(B_0)} \hat{z})(t) \varepsilon^i = (\mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{P}_{N(B_0)} \hat{z})(t) \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i$$

для $\varepsilon < 1$ сходится.

Далее докажем сходимость ряда

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i (\widetilde{X}_i \mathcal{P}_{N(B_0)} \hat{z})(t). \tag{34}$$

При $i = 0$ имеем

$$|||\widetilde{X}_0|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} \leq ap\,l(1 + a\tilde{b}).$$

Аналогично при $i = 1$ получаем

$$|||\widetilde{X}_1|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} \leq al(1 + a\tilde{b}) |||\widetilde{X}_0|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)}.$$

Продолжая этот процесс дальше, для операторов $\widetilde{X}_i$ находим оценки

$$|||\widetilde{X}_i|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \leq [al(1+a\tilde{b})]^i |||\widetilde{X}_0|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}.$$

Тогда для каждого $t \in \mathcal{I}$ имеем

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i (\widetilde{X}_i \mathcal{P}_{N(B_0)} \hat{z})(t) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i K_1^i |||\widetilde{X}_0|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} |||\mathcal{P}_{N(B_0)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} |||\hat{z}(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)},$$

где $K_1 = al(1+a\tilde{b})$. Следовательно, при фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, где $\varepsilon_* < K_1^{-1}$, ряд (34) равномерно сходится.

Аналогично доказывается сходимость ряда

$$\sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i \bar{z}_i(t).$$

Для оценки $\bar{z}_i(t),\ i = \overline{1, \infty}$, получаем

$$|||\bar{z}_i(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \leq a^i l^{i+1} (1+a\tilde{b})^{i+2} |||f(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}.$$

Тогда для каждого $t \in \mathcal{I}$ имеем

$$\sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i \bar{z}_i(t) \leq \varepsilon^{-1} \tilde{b} |||f(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i a^i l^{i+1} (1+a\tilde{b})^{i+2} |||f(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} =$$

$$= \varepsilon^{-1} \tilde{b} |||f(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i K_1^i \alpha |||f(t)|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)},$$

где $\alpha = l(1+a\tilde{b})^2$.

Таким образом, для фиксированного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, где $\varepsilon_* < K_1^{-1}$, ряд

$$\sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i \bar{z}_i(t)$$

равномерно сходится.

Пусть $\varepsilon_* < \min(1, K_1^{-1})$, тогда ряд (33) будет равномерно сходящимся.

Теорема 3. *Пусть* $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2))$ *и порождающее уравнение* (2) $(\varepsilon = 0)$ *при произвольной неоднородности* $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$ *не имеет решений.*

Тогда если оператор $B_0 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1) \to Y_L)$ *и*

$$\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0, \quad \mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_L} = 0,$$

то слабовозмущенное уравнение (1) *при произвольной неоднородности* $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ *имеет семейство решений в виде ряда*

$$z(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t),$$

абсолютно сходящегося при произвольных фиксированных $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, *а коэффициенты ряда определяются с помощью итерационного алгоритма* (32).

***Замечание* 1.** Если $\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0,$ то теорема 3 переходит в теорему 2, поскольку операторные уравнения вида (25) и т. д. на каждом шаге итерационного процесса будут n-нормальными и по следствию 1 однозначно разрешимыми. При этом оператор B_0^- будет левым обратным оператором $(B_0)_l^{-1}$ [13].

***Замечание* 2.** Если $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} = 0,$ то операторные уравнения вида (25) на каждом шаге итерационного процесса будут d-нормальными и по следствию 2 везде разрешимыми. При этом оператор B_0^- будет правым обратным оператором $(B_0)_r^{-1}$ [13].

Тогда условие

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_L} = 0$$

будет всегда выполнено и уравнение (1) будет иметь по крайней мере одно решение в виде ряда (5), коэффициенты которого определяются с помощью итерационного алгоритма (32), в котором $B_0^- = (B_0)_r^{-1}.$

***Замечание* 3.** Условие $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_L} = 0$ является достаточным условием существования решения уравнения (1). Если это условие не выполняется, то решение уравнения (1) в виде ряда (5) не существует. Но решение уравнения (1) может существовать в виде ряда (5), где $i = -2, -3, \ldots.$

Литература

1. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, вып. 3. – С. 3 – 80.
2. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950. – 472 с.
3. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1990. – 96 с.
4. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 319 с.
5. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalised inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 323 p.
6. *Бойчук А. А., Панасенко Є. В.* Слабкозбурені крайові задачі для диференціальних рівнянь в банаховому просторі // Нелінійні коливання. – 2010. – **13**, № 3. – С. 291 – 304.
7. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
8. *Boichuk A. A., Shegda L. M.* Bifurcation of solutions of singular Fredholm boundary value problems // Different. Equat. – 2011. – **47**, № 4. – P. 453 – 461.
9. *Головацька І. А.* Слабкозбурені системи інтегро-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2012. – **15**, № 2. – С. 151 – 164.
10. *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу. – М.: МЦНМО, 2004. – 552 с.
11. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.
12. *Попов М. М.* Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха // Математика сьогодні'07. – 2007. – Вип. 13. – С. 78 – 116.
13. *Zhuravlev V. F.* Solvability criterion and representation of solutions of n-normal and d-normal linear operator equations in a Banach space // Ukr. Math. J. – 2010. – **62**, № 2. – P. 186 – 202.
14. *Boichuk A. A., Zhuravlev V. F., Pokutnyi A. A.* Normally solvable operator equations in a Banach space // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 2. – P. 179 – 192.

Получено 14.11.16