УДК 512.54

В. И. Сенашов (Сиб. федер. ун-т, Красноярск, Ин-т вычислит. моделирования СО РАН, Россия)

ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ГРУПП С ПОЧТИ СЛОЙНО КОНЕЧНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЧАСТЬЮ*

Construction of the set of finite subgroups of the form $L_g = \langle a, a^g \rangle$ in Shunkov's groups is studying. As a corollary of this result follows two characterizations of groups with an almost layer-finite periodic part.

Вивчається будова сім'ї скінченних підгруп вигляду $L_g = \langle a, a^g \rangle$ у групах Шункова. Як наслідок із основної теореми отримано дві характеризації груп із майже шарово скінченною періодичною частиною.

В статье С. Н. Черникова [1] был введен и начал изучаться класс слойно конечных групп. Группа называется *слойно конечной*, если множество ее элементов любого данного порядка конечно. *Почти слойно конечные группы* — это конечные расширения слойно конечных групп.

В настоящей работе мы изучаем бесконечные группы с условием почти слойной конечности периодических частей нормализаторов конечных нетривиальных подгрупп. Среди таких групп можно назвать группы Новикова – Адяна [2] и группы Ольшанского [3]. Рассматривается классический вопрос: как свойства системы подгрупп влияют на свойства всей группы? Найдены условия, при которых почти слойная конечность распространяется на периодическую часть группы G с периодических частей нормализаторов нетривиальных конечных подгрупп группы G.

Кроме того, исследуется также класс сопряженно бипримитивно конечных групп, введенных В. П. Шунковым. В 1997 году за такими группами закрепилось новое название — группы Шункова. Ранее автором рассматривались группы Шункова при условии почти слойной конечности всех нетривиальных собственных подгрупп [4, 5] и при условии периодичности группы [6 – 8]. Случай смешанных групп, рассматриваемый в этой статье, исследовался автором в [9 – 12]. Автором изучались группы Шункова с сильно вложенной подгруппой [5, 6, 13, 14]. Наиболее полный случай, когда группа Шункова содержит сильно вложенную подгруппу, имеющую почти слойно конечную периодическую часть, рассмотрен в [10], и этот результат мы используем в данной работе.

Основная теорема этой статьи посвящена строению конечных подгрупп вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$ в группах Шункова, и в качестве следствий получены две характеризации групп с почти слойно конечной периодической частью.

Нам будут необходимы следующие определения и обозначения.

Группой Шункова (*сопряженно бипримитивно конечной группой*) называется группа G, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любая пара сопряженных элементов простого порядка порождает конечную подгруппу.

Группа называется *черниковской*, если она либо конечна, либо является конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп.

Будем обозначать через $F(L)$ нормальную подгруппу наибольшего порядка группы L, являющуюся прямым произведением простых неабелевых групп.

* Выполнена при поддержке гранта Сибирского федерального университета (проект — алгебро-логические структуры и комплексный анализ).

Если произведение всех нормальных слойно конечных подгрупп группы слойно конечно, то оно называется *слойно конечным радикалом* группы.

Разрешимый радикал — максимальная нормальная разрешимая подгруппа.

Нильпотентный радикал — максимальная нормальная нильпотентная подгруппа.

Инволюция — элемент второго порядка.

Почти регулярный элемент — элемент с конечным централизатором.

Почти нильпотентная группа — конечное расширение нильпотентной группы.

Сильно вложенной называется собственная подгруппа, содержащая инволюции, которая пересекается с сопряженными с ней подгруппами по подгруппам без инволюций.

$O_{p'}(G)$ — максимальная нормальная подгруппа конечной группы G, не содержащая p-элементов;

$R(H)$ — максимальная нормальная слойно конечная подгруппа группы H;

$\pi(G)$ — множество простых делителей порядков элементов группы G;

$\pi(c)$ — множество простых делителей числа c.

Рассмотрим группу Шункова G, не имеющую почти слойно конечной периодической части, нормализатор любой ее нетривиальной конечной подгруппы имеет почти слойно конечную периодическую часть.

Через S обозначим некоторую силовскую 2-подгруппу из G. Если группа S конечна, то по теореме Силова в ней найдется центральная инволюция, если же S бесконечна, то по теореме из [11] она является черниковской и по свойствам черниковских примарных групп в ней пересечение центра и полной части нетривиально и, значит, содержит хотя бы одну инволюцию. Обозначим через i эту центральную инволюцию из S.

По условиям теоремы централизатор $C_G(i)$ инволюции i имеет почти слойно конечную периодическую часть C. Если C не содержится в большей почти слойно конечной подгруппе из G, то она и есть максимальная почти слойно конечная подгруппа группы G, содержащая C. В противном случае найдется почти слойно конечная подгруппа C_1 группы G, строго содержащая C. Продолжая дальше аналогичное рассуждение, мы либо найдем максимальную почти слойно конечную подгруппу группы G, содержащую C, либо построим возрастающую цепь почти слойно конечных подгрупп

$$C < C_1 < C_2 < C_3 < \ldots .$$

Объединение этой цепи локально конечных подгрупп, являясь локально конечной группой, по теореме Шункова (теорема 1 из [9]) будет почти слойно конечной группой. Согласно лемме Цорна, если любая цепь в частично упорядоченном множестве имеет верхнюю грань, то любой элемент из этого множества подчинен некоторому максимальному. В рассматриваемом случае это означает, что в группе G найдется максимальная почти слойно конечная подгруппа H, содержащая периодическую часть группы $C_G(i)$.

Следующая теорема посвящена строению семейства конечных подгрупп вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$ в группе Шункова при условии почти слойной конечности периодических частей нормализаторов конечных нетривиальных подгрупп.

Теорема. *Пусть G — группа Шункова с инволюциями, в которой нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы имеет почти слойно конечную периодическую часть, S — ее силовская 2-подгруппа, i — центральная инволюция из S (в случае, когда S бесконечна, i берется из полной части группы S), H — максимальная почти слойно конечная подгруппа, содержащая периодическую часть группы $C_G(i)$. Тогда либо группа G имеет почти слойно конечную периодическую часть, либо справедливы следующие утверждения*:

если H — нечерниковская группа, то найдется элемент a простого порядка из H такой, что среди групп $L_g = \langle a, a^g \rangle$, $g \in G \setminus N_G(H)$, бесконечно много полупростых с подгруппой $F(L_g)$, изоморфной $PSL_2(q)$, $q > 3$ — нечетное;

если H — черниковская группа, то в G найдутся нечерниковская подгруппа B и элемент b простого порядка из B такие, что среди групп $L_g = \langle b, b^g \rangle$, $g \in G \setminus N_G(B)$, бесконечно много полупростых с подгруппой $F(L_g)$, изоморфной $PSL_2(q)$, $q > 3$ — нечетное.

Аналогичная теорема для периодических групп доказана в работе [8]. Доказательство теоремы настоящей работы следует схеме доказательства из [8], но имеет специфику работы со смешанными группами. Например, мы не можем воспользоваться известной теоремой Шункова о периодической группе с почти регулярной инволюцией, которую использовали в [8]. Нужно также иметь в виду, что практически при одинаковых формулировках доказательства лемм отличны от доказательств для периодического случая в работе [8]. Для случая, который изучается в данной работе, мы ссылаемся на доказательства аналогичных лемм из работ [9 – 12], в которых рассматривается случай смешанных групп.

В качестве следствий из полученного результата приведем две характеризации групп с почти слойно конечной периодической частью.

***Следствие* 1.** *Пусть G — группа Шункова без элементов третьего порядка. Если в G нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы имеет почти слойно конечную периодическую часть, то группа G также имеет почти слойно конечную периодическую часть.*

Доказательство. Следствие 1 при наличии в группе инволюций вытекает из теоремы данной статьи и известного факта, что группа $PSL_2(q)$ содержит элемент третьего порядка. Если в группе нет инволюций, то утверждение вытекает из теоремы 2 работы [9].

Следствие 2. *Пусть G — группа Шункова без подгрупп вида $PSL_2(q)$. Если в G нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы имеет почти слойно конечную периодическую часть, то группа G также имеет почти слойно конечную периодическую часть.*

Доказательство. Следствие 2 вытекает из теоремы данной статьи и теоремы 2 из [9].

Если в формулировках следствий не требовать, чтобы группа была группой Шункова, то они теряют силу вследствие известного примера p-группы А. Ю. Ольшанского [3].

Предположим, что G — группа Шункова, не имеющая почти слойно конечной периодической части, и нормализатор любой ее нетривиальной конечной подгруппы имеет почти слойно конечной периодическую часть.

Через S обозначим некоторую силовскую 2-подгруппу из G. Как было показано перед формулировкой теоремы, в S найдется центральная инволюция. Обозначим эту центральную инволюцию из S через i.

Там же показано, что в группе G найдется максимальная почти слойно конечная подгруппа H, содержащая периодическую часть группы $C_G(i)$.

Обозначим через M нормализатор подгруппы H в группе G. Почти слойно конечная группа H имеет слойно конечный радикал $R(H)$. Любой слой неединичных элементов из $R(H)$ представляет собой конечное инвариантное множество элементов. По лемме Дицмана из [15, с. 338] он порождает конечную нетривиальную нормальную в $R(H)$ подгруппу, очевидно, являющуюся характеристической в $R(H)$ и, следовательно, нормальной в M. Тогда по условиям теоремы группа M имеет почти слойно конечную периодическую часть, которая вследствие максимальности подгруппы H совпадает с H.

Предположим, что централизаторы всех инволюций из M имеют бесконечные пересечения с H. По теореме из [10] в группе G нет сильно вложенных подгрупп с почти слойно конечной периодической. Значит, группа M не является сильно вложенной в группу G. Тогда для некоторого элемента g из множества $G \setminus M$ пересечение $M \cap M^g$ содержит инволюцию. Согласно сделанному предположению, по условиям теоремы и лемме 2 из [11] группа H содержит бесконечную периодическую часть централизатора этой инволюции в группе G. Аналогично получаем, что H^g также содержит бесконечную периодическую часть централизатора этой инволюции. Но тогда по лемме 3 из [11] $H = H^g$, что противоречит выбору элемента g.

Таким образом, в группе M найдется инволюция, централизатор которой в M имеет конечную периодическую часть. Зафиксируем за этой инволюцией обозначение j. В силу теоремы 7 из [16], не нарушая общности рассуждений, можем считать, что инволюция j выбрана из подгруппы S.

Пусть K — подгруппа из H, порожденная всеми инволюциями с бесконечными централизаторами в H. Слойно конечный радикал группы H будем обозначать $R(H)$. По лемме 8 из [12] K является абелевой подгруппой порядка не большего четырех.

Предварим доказательство теоремы рядом лемм.

Лемма 1. *В группе G централизаторы инволюций имеют почти разрешимые периодические части.*

Доказательство. Пусть t — произвольная инволюция из G. Включим периодическую часть ее централизатора $C_G(t)$, являющуюся почти слойно конечной по условию теоремы, в максимальную почти слойно конечную подгруппу W из G. Если все инволюции из W имеют бесконечные централизаторы в W, то по леммам 1, 2 из [11] W сильно вложена в G. Но эта ситуация невозможна по теореме из [10]. Тогда в W есть почти регулярная инволюция, и отсюда по теореме Шункова [17] группа W почти разрешима.

Лемма 1 доказана.

Пусть L — полупростая конечная группа, т. е. не имеет разрешимой нормальной подгруппы. Будем обозначать через $F(L)$ нормальную подгруппу наибольшего порядка из L, являющуюся прямым произведением простых неабелевых групп.

Лемма 2. *Подгруппа $F(L)$ любой нетривиальной полупростой конечной подгруппы L группы G является простой неабелевой группой.*

Доказательство совпадает с доказательством леммы 2 из [8].

Лемма 3. *В группе G число классов сопряженных инволюций конечно.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы ошибочно и в группе G нашлось бесконечное множество классов сопряженных инволюций с представителями

$$i_1,\, i_2, \ldots, i_n, \ldots,$$

взятыми по одному из каждого класса. Из сопряженно бипримитивной конечности группы G и попарной несопряженности указанных инволюций по свойствам групп диэдра следует наличие в группах вида $\langle i_j, i_1\rangle$ центральных инволюций i_{j1}.

Рассмотрим максимальную почти слойно конечную подгруппу из G, содержащую периодическую часть группы $C_G(i_1)$. В ней, очевидно, будут содержаться инволюции

$$i_{12},\, i_{13}, \ldots, i_{1n}, \ldots,$$

среди которых по лемме 10 из [6] лишь конечное число несопряженных. Будем считать, что мы сразу выбрали представителей классов сопряженных инволюций так, что все инволюции $i_k,\ k = 1, 2, \ldots,$ сопряжены между собой, т. е.

$$i_{12} = i_{13}^{g_3} = i_{14}^{g_4} = \ldots = i_{1n}^{g_n} = \ldots .$$

Рассмотрим максимальную почти слойно конечную подгруппу из G, содержащую периодическую часть группы $C_G(i_{12})$. В ней будут содержаться инволюции $i_3^{g_3}, i_4^{g_4}, \ldots, i_n^{g_n}, \ldots$ как перестановочные с инволюцией i_{12}. Но опять среди этих инволюций лишь конечное число несопряженных. Противоречие с предположением.

Лемма 3 доказана.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех конечных подгрупп группы G вида $L_g = \langle a, a^g\rangle$, где элемент a простого порядка p выбираем из H, если H — нечерниковская группа, и из B — нечерниковской почти слойно конечной подгруппы, содержащей инволюции, которая найдется в G по теореме 3.1 из [18] (так как иначе группа G имела бы черниковскую и, значит, почти слойно конечную периодическую часть) и условиям теоремы, если группа H — черниковская ($g \in G \setminus N_G(H)$ в первом случае и $g \in G \setminus N_G(B)$ во втором). Множество таких элементов бесконечно, так как периодическая часть группы $N_G(H)$ (соответственно, группы $N_G(B)$) почти слойно конечна в силу условий теоремы, а по предположению группа G не имеет почти слойно конечной периодической части. Группу B можем считать максимальной почти слойно конечной подгруппой в группе G в силу леммы Цорна и теоремы 1 из [9].

Вследствие бесконечности множества вариантов выбора порядка элемента a и строения почти слойно конечной группы выберем его порядок таким достаточно большим, что он не делит индекс $|H : R(H)|$, где $R(H)$ — слойно конечный радикал группы H в первом случае, и индекс $|B : R(B)|$, где $R(B)$ — слойно конечный радикал группы B во втором случае. Это можно сделать на основании строения нечерниковской почти слойно конечной группы. Во втором случае будем также предполагать, что $p \notin \pi(H)$ (это можно сделать вследствие черниковости группы H) и p не делит индекс $|B : L(B)|$, где $L(B)$ — нильпотентный радикал группы B.

Докажем, что B — почти нильпотентная группа.

По свойствам слойно конечных групп (см., например, [19, с. 130]) слойно конечный радикал V группы B имеет полную часть A, причем $A \leq Z(V)$. Точно так же, как мы доказали перед леммой 1 то, что H имеет почти регулярную инволюцию, доказывается, что в B найдется почти регулярная инволюция k, которая в силу свойств слойно конечных групп содержится в разности $B \setminus V$. В группе $V\lambda(k)$, очевидно, A является нормальной подгруппой, причем k действует регулярно на A в силу предложения 7 из [17].

Рассмотрим фактор-группу $\overline{V}\lambda(kA)$, где $\overline{V} = V/A$. Поскольку $\overline{V}$ не имеет бесконечных силовских подгрупп, то по свойствам слойно конечных групп с конечными силовскими подгруппами (см., например, [19, с. 142]) для каждого простого p в $\overline{V}$ найдется p'-подгруппа $\overline{V}_p$ конечного индекса, нормальная в $\overline{V}\lambda(iA)$. Рассмотрим $\overline{C}$ — пересечение $\overline{V}_p$ по всем $p \in \pi(C_{\overline{V}}(kA))$. Группа $\overline{C}$ имеет конечный индекс в $\overline{V}$ вследствие почти регулярности kA в $\overline{V}\lambda(kA)$. По теореме Бернсайда (см., например, [20, с. 39]) $\overline{C}$, как локально конечная группа, имеющая регулярный автоморфизм порядка 2, является абелевой группой. Вследствие локальной конечности $\overline{C}\lambda(kA)$ и свойств групп Фробениуса подгруппа $\overline{C}$ состоит из элементов, строго вещественных относительно kA.

Так как A и $\overline{C}$ являются абелевыми 2-полными группами, то по предложению 3.2 из [21] полный прообраз C группы $\overline{C}$ в группе V является абелевой группой. Поскольку она имеет конечный индекс в B, это доказывает почти нильпотентность группы B.

Согласно лемме 11 из [6], множество несопряженных элементарных абелевых подгрупп из почти слойно конечной группы с конечными централизаторами в ней конечно. Поэтому в дополнение к выбору числа p можем считать, что оно не принадлежит множеству $\cup\pi(C_B(K))$, где K пробегает все элементарные абелевы подгруппы из B, имеющие в B конечные централизаторы в случае черниковской группы H. В случае нечерниковской H число $p \notin \pi(C_H(K))$ для элементарных абелевых подгрупп K из H с конечными централизаторами в H.

Лемма 4. *В множестве $\mathfrak{M}$ бесконечно много подгрупп имеют тривиальный разрешимый радикал.*

Доказательство. Пусть сначала H — нечерниковская группа. Рассмотрим подгруппы вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$, $g \notin N_G(H)$. Предположим, что лемма несправедлива и разрешимый радикал в группах L_g нетривиален для всех подгрупп L_g, за исключением не более чем конечного числа подгрупп. Далее в доказательстве леммы речь идет только о подгруппах L_g с нетривиальным разрешимым радикалом. Вследствие сопряженно бипримитивной конечности группы G подгруппы L_g конечны. Обозначим через P силовскую p-подгруппу из L_g, содержащую элемент a. Поскольку P, будучи конечной p-группой, имеет нетривиальный центр, то выбираем элемент b простого порядка из $Z(P)$. Вследствие выбора элемента a централизатор $C_H(b)$ бесконечен. Тогда по лемме 3 из [10] периодическая часть централизатора $C_G(b)$ содержится в H. Следовательно, P также содержится в H.

Предположим, что P не является циклической подгруппой. Обозначим элементарную абелеву подгруппу порядка p^2 из P, содержащую элемент a, через R. Рассмотрим подгруппу $O_{p'}(L_g)\lambda R$ ($O_{p'}(L_g) \neq 1$ по предположению). Согласно теореме Брауэра [22],

$$O_{p'}(L_g) \leq \langle C_G(r) \mid r \in R^{\#} \rangle.$$

Как отмечалось выше, элементы r из $R^{\#}$ имеют бесконечные централизаторы в H и в силу леммы 3 из [10] их периодические части содержатся в H вместе с $O_{p'}(L_g)$.

Проводя аналогичные рассуждения относительно подгруппы H^g вместо H и элемента a^g вместо a, видим, что $O_{p'}(L_g) < H^g$. При этом p выбран настолько большим, что в централизаторах элементов порядка p из H нет элементов с конечными централизаторами в H; для сопряженной подгруппы H^g это же справедливо.

Таким образом, $O_{p'}(L_g) < H \cap H^g$. Если $\pi(O_{p'}(L_g))$ не содержится в множестве $\pi(|H : R(H)|)$, то слойно конечные радикалы $R(H)$ и $R(H^g)$ подгрупп H и H^g пересекаются нетривиально и по лемме 2 из [10] $H = H^g$. Вследствие максимальности подгруппы H получили противоречие с выбором элемента g.

Значит, множество $\pi(O_{p'}(L_g))$ включено в $\pi(|H : R(H)|)$, а так как последнее множество конечно, то и для $\pi(O_{p'}(L_g))$ имеется только конечное множество вариантов при различных способах выбора элемента a. Тогда, учитывая строение почти слойно конечной группы H и бесконечность множества вариантов выбора порядков элемента a, получаем бесконечность нормализатора $N_H(O_{p'}(L_g))$ для данного элемента g. Значит, периодическая часть нормализатора $N_G(O_{p'}(L_g))$ содержится в H по лемме 3 из [10] вместе с L_g. Полученное противоречие с выбором подгруппы L_g означает, что силовские p-подгруппы в L_g циклические.

Пусть теперь H — черниковская группа. Как мы доказали перед леммой 4, B — почти нильпотентная группа, а значит, она имеет вид $B = L(B) \cdot K$, где $L(B)$ — нильпотентный радикал группы B, K — ее конечная подгруппа.

Рассмотрим подгруппы вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$, $g \in G \setminus N_G(B)$, и предположим, что разрешимый радикал в L_g нетривиален для бесконечного множества таких подгрупп. Повторяя проведенные выше рассуждения для подгруппы B вместо H, получаем включение $O_{p'}(L_g) \leq B$. Подгруппа R содержится в B вследствие включения группы R в периодическую часть группы $C_G(a)$. Таким образом, имеем $O_{p'}(L_g) \lambda R \leq B$.

Вследствие выбора p подгруппа R содержится в нильпотентном радикале $L(B)$ подгруппы B. Пусть Q — силовская q-подгруппа из $O_{p'}(L_g)$. По лемме Фраттини Q выберем таким образом, чтобы Q нормализовалась подгруппой R. Если $Q < L(B)$, то, очевидно, $Q \times R$. Если же q — делитель индекса $|B : L(B)|$, то, по определению нильпотентного радикала, R также нормализуется подгруппой Q. Таким образом, опять получаем $Q \times R$. Поскольку это рассуждение справедливо для любого $q \in \pi(O_{p'}(L_g))$, то заключаем, что $O_{p'}(L_g)$ содержится в периодической части группы $C_G(a)$. Отсюда вследствие выбора элемента a все элементы из $O_{p'}(L_g)$ имеют в B бесконечные централизаторы, периодические части которых, по лемме 3 из [10], содержатся в B. Фиксируем произвольный элемент $c \neq 1$ из $O_{p'}(L_g)$. Как показано выше, $a \in C_G(c)$ и периодическая часть группы $C_G(c)$ содержится в B. Проводя аналогичные рассуждения относительно подгруппы B^g вместо B и элемента a^g вместо a, видим, что $a^g \in C_G(c)$, $c \in O_{p'}(L_g)$. Таким образом, $a^g \in B$. Вследствие выбора числа p элемент a^g принадлежит пересечению слойно конечных радикалов подгрупп B и B^g, а это в силу леммы 2 из [10] означает, что $B = B^g$ для элемента g из $G \setminus N_G(B)$. Полученное противоречие с выбором подгруппы B означает, что силовские p-подгруппы в L_g циклические.

Завершим доказательство леммы. Пусть сначала H — нечерниковская подгруппа группы G. В силу доказанного выше считаем, не нарушая общности рассуждений, что найдется такой элемент $a \in H$ порядка p, что силовская p-подгруппа в L_g будет циклической.

Предположим, что в $C_{L_g}(a)$ нашелся элемент b простого порядка, который перестановочен с нетривиальным элементом w из нильпотентного радикала N_g группы $L_g = \langle a, a^g \rangle$.

По выбору порядка p элемента a элемент b имеет бесконечный централизатор в H, значит, по лемме 3 из [10] его периодическая часть содержится в H вместе с элементом w. Отсюда следует, что пересечение $D_g = N_g \cap H$ нетривиально, так как содержит элемент w. Рассмотрим максимальную нормальную элементарную абелеву q-подгруппу A_g из D_g. Если a действует регулярно на A_g, то в силу строения группы регулярных автоморфизмов q-группы, отсутствия в G бесконечных элементарных абелевых подгрупп, сопряженности примарных силовских погрупп в группе G и конечности индекса слойно конечного радикала в почти слойно конечной группе добиваемся за счет выбора p, чтобы число q было настолько большим, что оно не делит индекс $|H : R(H)|$. Тогда $A_g < R(H)$. По свойствам слойно конечных групп и лемме 3 из [10] периодическая часть централизатора $C_G(A_g)$ содержится в H.

Пусть теперь элемент a перестановочен с нетривиальным элементом из A_g. Тогда либо он централизует всю A_g и вследствие выбора числа p периодическая часть группы $C_G(A_g)$ содержится в группе H, либо A_g расщепляется: $A_g = B_g \times C_g$, где $C_g < C_G(a)$, а на B_g элемент a действует регулярно. Тогда, как и выше, получаем ограничение на порядок q: q не делит индекс $|H : R(H)|$.

Окончательно получаем независимо от действия a на A_g включение периодической части группы $C_G(A_g)$ в группу H, что влечет по лемме 2 из [10] включение периодической части нормализатора $N_G(A_g)$ в H. Тогда периодическая часть группы $N_G(D_g)$ содержится в H.

Если $N_g \neq D_g$, то в силу нормализаторного условия в нильпотентных группах нормализатор подгруппы D_g в N_g отличен от D_g и по доказанному содержится в H. Получили противоречие с построением D_g.

Если же $N_g = D_g$, то вследствие нормальности N_g в L_g и включения периодической части группы $N_G(D_g)$ в H получаем $L_g < H$ вопреки выбору группы L_g.

Таким образом, любой элемент простого порядка из $C_{L_g}(a)$ действует регулярно на N_g. Тогда по доказанному выше и по лемме 4.27 из [21] L_g — группа Фробениуса с неинвариантным множителем (a). По теореме Созутова – Шункова [23] G имеет нетривиальную нормальную локально конечную подгруппу вопреки предположению.

Случай черниковской подгруппы H рассматривается аналогично с заменой в рассуждениях подгруппы H на подгруппу B.

Лемма 4 доказана.

В силу леммы 4 будем считать, не нарушая общности рассуждений, что в бесконечном подмножестве $\mathfrak{N}$ подгрупп множества $\mathfrak{M}$ разрешимый радикал единичен.

В леммах 5, 6 будем предполагать, что некоторая силовская 2-подгруппа в группе G конечна.

Лемма 5. *Порядки фактор-групп $C_K(t)/O_{2'}(C_K(t))$, где K — произвольная силовская 2-подгруппа из G, t — ее инволюция, ограничены в совокупности.*

Доказательство. В силу леммы 3 в группе G конечное число классов сопряженных инволюций. Тогда, зафиксировав в каждом классе некоторую инволюцию t, достаточно для нее доказать конечность фактор-группы $C_K(t)/O_{2'}(C_K(t))$. Последнее утверждение следует из конечности силовской 2-подгруппы S в G и леммы 7 из [12].

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Можно считать, не нарушая общности рассуждений, что порядок p элемента a выбран таким достаточно большим, что для подгрупп множества $\mathfrak{N}$ выполняется первая альтернатива теоремы Брауэра* [24]: *в конечной группе U с силовской 2-подгруппой V для любой пары инволюций w, t из V и любого элемента d из V существуют такие элементы x, y, z, что $x^{-1}wx$, $y^{-1}ty$, $z^{-1}dz \in V$ и $z^{-1}dz = x^{-1}wxy^{-1}ty$.*

Доказательство. Поскольку мы можем увеличивать как угодно порядок p элемента a, то подберем его таким достаточно большим, что для подгрупп множества $\mathfrak{N}$ не будет выполняться вторая альтернатива теоремы Брауэра [24]: в конечной группе U с силовской 2-подгруппой $V \neq 1$ существует функция

$$f\Big(|V|, |C_U(w)/O_{2'}(C_U(w))|,\ |C_U(t)/O_{2'}(C_U(t))|\Big)$$

такая, что $|U| \leq \max(f)$ (для любых инволюций w, t из V). Из леммы 5 следует, что такой функции не существует, а это означает справедливость леммы.

Лемма 6 доказана.

Дальнейшее доказательство теоремы с учетом лемм 1 – 6 и основного результата из [12] по-существу повторяет завершение доказательства теоремы из [8].

Теорема доказана.

Литература

1. *Черников С. Н.* К теории бесконечных специальных p-групп // Докл. АН СССР. – 1945. – С. 71 – 74.
2. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
3. *Ольшанский А. Ю.* Бесконечные группы с циклическими подгруппами // Докл. АН СССР. – 1979. – **245**, № 4. – С. 785 – 787.
4. *Сенашов В. И.* Группы с условием минимальности для не почти слойно конечных подгрупп // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7-8. – С. 1002 – 1008.
5. *Сенашов В. И.* Достаточные условия почти слойной конечности группы // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 4. – С. 472 – 485.
6. *Сенашов В. И.* Строение бесконечной силовской подгруппы в некоторых периодических группах Шункова // Дискрет. математика. – 2002. – **14**, № 4. – С. 133 – 152.
7. *Сенашов В. И.* О силовских подгруппах периодических групп Шункова // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 11. – С. 1548 – 1556.
8. *Сенашов В. И.* Характеризации групп Шункова // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 8. – С. 1110 – 1118.
9. *Сенашов В. И., Шунков В. П.* Почти слойная конечность периодической части группы без инволюций // Дискрет. математика. – 2003. – **15**, № 3. – С. 91 – 104.
10. *Сенашов В. И.* О группах с сильно вложенной подгруппой, имеющей почти слойно конечную периодическую часть // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 3. – С. 384 – 391.
11. *Сенашов В. И.* Строение бесконечной силовской подгруппы в некоторых группах Шункова // Вестн. СибГАУ. – 2013. – № 1. – С. 182 – 189.
12. *Сенашов В. И.* О силовских подгруппах некоторых групп Шункова // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 3. – С. 397 – 405.
13. *Сенашов В. И.* О группах Шункова с сильно вложенной подгруппой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2009. – **15**, № 2. – С. 203 – 210.
14. *Сенашов В. И.* О группах Шункова с сильно вложенной почти слойно конечной подгруппой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2010. – **16**, № 3. – С. 234 – 239.
15. *Курош А. Г.* Теория групп. – 3-е изд. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
16. *Шунков В. П.* О группах конечного ранга // Алгебра и логика. – 1970. – **10**, № 2. – С. 199 – 225.

17. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. – 1972. – **11**, № 4. – С. 470 – 493.
18. *Шунков В. П.* О вложении примарных элементов в группе. – Новосибирск: Наука, 1992. – 133 с.
19. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
20. *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы. – М.: Наука, 1968. – 111 с.
21. *Шунков В. П.* M_p-группы. – М.: Наука, 1990. – 160 с.
22. *Brauer R., Suzuki M.* On finite groups with an abelian Sylow subgroups // Can. J. Math. – 1962. – **14**. – P. 436 – 450.
23. *Созутов А. И., Шунков В. П.* О бесконечных группах, насыщенных фробениусовыми подгруппами, 1, 2 // Алгебра и логика. – 1977. – **16**, № 6. – С. 711 – 735; 1979. – **18**, № 2. – С. 206 – 223.
24. *Brauer R.* Some applications of theory of block of characters of finite groups II // J. Algebra. – 1964. – **1**. – P. 307 – 334.

Получено 15.10.15,
после доработки — 30.11.16