УДК 517.956

С. А. Алдашев (Казах. нац. пед. ун-т им. Абая, Алматы)

КОРРЕКТНОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВОЛНОВЫМ ОПЕРАТОРОМ

We establish the unique solvability and obtain the explicit expression for the classical solution of the mixed problem for multidimensional hyperbolic equations with wave operator.

Показано однозначну розв'язність та отримано явний вигляд класичного розв'язку мішаної задачі для багатовимірних гіперболічних рівнянь із хвильовим оператором.

1. Введение. В работах [1, 2] доказаны существование и единственность классического решения краевых задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений. Обобщенные решения основной смешанной задачи в цилиндрической области для этих уравнений изучены в [3, 4]. Однако вопросы гладкости решений до сих пор не исследованы.

В данной работе показана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения смешанной задачи для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором.

2. Постановка задачи и результат. Пусть D_α — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m,\ t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_α области D_α, обозначим через $\Gamma_\alpha,\ S_\alpha,\ S_0$ соответственно.

В области D_α рассмотрим взаимно-сопряженные многомерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \tag{1}$$

$$L^* \upsilon \equiv \Delta_x \upsilon - \upsilon_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i \upsilon_{x_i} - b\upsilon_t + d\upsilon = 0, \tag{1*}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m,\ m \geq 2,\ d(x,t) = c - \sum_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t$.

В качестве смешанной задачи рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D_α из класса $C^1(\bar{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{S_0} = \tau(x), \qquad u_t\Big|_{S_0} = \nu(x), \qquad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi(x,t). \tag{2}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m,\ t$ к сферическим $r,\ \theta_1, \ldots, \theta_{m-1},\ t$ [5]:

$$x_1 = r\cos\theta_1 = rp_1(\theta_1),$$

$$x_2 = r\sin\theta_2\cos\theta_2 = rp_2(\theta_1, \theta_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{m-1} = r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{m-2}\cos\theta_{m-1} = rp_{m-1}(\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}),$$

$$x_m = r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{m-2}\sin\theta_{m-1} = rp_m(\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}),$$

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta_i \leq \pi, \quad i = 1, \ldots, m-2, \quad 0 \leq \theta_{m-1} < 2\pi,$$

при этом $\sum_{i=1}^{m} p_i^2 = 1$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$, W_2^l, $l = 0, 1, \ldots,$ — пространства Соболева.

Справедлива следующая лемма [5].

Лемма 1. *Пусть* $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$. *Если* $l \geq m-1$, *то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{3}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, *сходятся абсолютно и равномерно.*

Лемма 2. *Для того чтобы* $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$, *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда* (3) *удовлетворяли неравенствам*

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}|f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \mathrm{const}.$$

Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k(r,t)$, $\tilde{d}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, $\bar{\tau}_n^k(r)$, $\bar{\nu}_n^k(r)$, $\psi_n^k(t)$ обозначим коэффициенты ряда (3) соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i p_i \rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, \ldots, m$, $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, H — единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(r,\theta,t)$, $b(r,\theta,t)$, $c(r,\theta,t) \in W_2^l(D_\alpha) \subset C(\bar{D}_\alpha)$, $l \geq m+1$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если* $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$, $\psi(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $l > \dfrac{3m}{2}$ *и* $\tau(1,\theta) = \psi(0,\theta)$, $\nu(1,\theta) = \psi_t(0,\theta)$, *то задача* 1 *имеет единственное решение.*

3. Разрешимость задачи 1. Уравнение (1) можно записать в виде [5]

$$\begin{gathered} Lu \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{\delta u}{r^2} - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t + c(r,\theta,t)u = 0, \\ \delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right), \\ g_1 = 1, \quad g_j = (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{j-1})^2, \quad j > 1. \end{gathered} \tag{4}$$

Известно [5], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \ldots,$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 в сферических координатах будем искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{5}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (5) в (4), умножая затем полученное выражение на $\rho(\theta)\neq 0$ и интегрируя по единичной сфере H, для $\bar{u}_n^k$ получаем [6–8]

$$\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1-\rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1+\left(\frac{m-1}{r}\rho_0^1+\sum_{i=1}^{m}a_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1+\tilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1+\tilde{c}_0^1\bar{u}_0^1+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k+\left(\frac{m-1}{r}\rho_n^k+\sum_{i=1}^{m}a_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k+\tilde{b}_n^k\bar{u}_{nt}^k+\right.$$

$$\left.+\left[\tilde{c}_n^k-\lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}+\sum_{i=1}^{m}(\tilde{a}_{in-1}^k-na_{in}^k)\right]\bar{u}_n^k\right\}=0. \tag{6}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1-\rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1+\frac{m-1}{r}\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1=0, \tag{7}$$

$$\rho_1^k\bar{u}_{1rr}^k-\rho_1^k\bar{u}_{1tt}^k+\frac{m-1}{r}\rho_1^k\bar{u}_{1r}^k-\frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^k\bar{u}_1^k=$$

$$=-\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1+\tilde{b}_0^1\bar{u}_{0t^1}+\tilde{c}_0^1\bar{u}_0^1\right),\qquad n=1,\quad k=\overline{1,k_1}, \tag{8}$$

$$\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}\rho_n^k\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k\bar{u}_n^k=$$

$$=-\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m}a_{in-1}^k\bar{u}_{n-1r}^k+\tilde{b}_{n-1}^k\bar{u}_{n-1t}^k+\right.$$

$$\left.+\left[\tilde{c}_{n-1}^k+\sum_{i=1}^{m}(\tilde{a}_{in-2}^k-(n-1)a_{in-1}^k)\right]\bar{u}_{n-1}^k\right\},\qquad k=\overline{1,k_n},\quad n=2,3\ldots. \tag{9}$$

Суммируя уравнение (8) от 1 до k_1, а уравнение (9) от 1 до k_n, а затем слагая полученные выражения с (7), приходим к уравнению (6). Отсюда следует, что если $\left\{\bar{u}_n^k\right\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots,$ — решение системы (7)–(9), то оно является решением уравнения (6).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (7)–(9) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k-\bar{u}_{ntt}^k=f_n^k(r,t), \tag{10}$$

где $f_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0^1(r,t)\equiv 0$.

Далее, из краевого условия (2) в силу (5) с учетом леммы 1 имеем

$$\bar{u}_n^k(r,0)=\bar{\tau}_n^k(r),\qquad \bar{u}_{nt}^k(r,0)=\bar{\nu}_n^k(r),\qquad \bar{u}_n^k(1,t)=\psi_n^k(t),\qquad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots. \tag{11}$$

Выполняя в (10), (11) замену переменных $\bar{\upsilon}_n^k(r,t) = \bar{u}_n^k(r,t) - \psi_n^k(t)$, получаем

$$\bar{\upsilon}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{\upsilon}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\upsilon}_n^k - \bar{\upsilon}_{ntt}^k = \bar{f}_n^k(r,t), \tag{12}$$

$$\begin{gathered} \bar{\upsilon}_n^k(r,0) = \tau_n^k(r), \qquad \bar{\upsilon}_{nt}^k(r,0) = \nu_n^k(r), \qquad \bar{\upsilon}_n^k(1,t) = 0, \qquad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots, \\ \bar{f}_n^k(r,t) = f_n^k(r,t) + \frac{\lambda_n}{r^2}\psi_n^k - \psi_{ntt}^k, \quad \tau_n^k(r) = \bar{\tau}_n^k(r) - \psi_n^k(0), \quad \nu_n^k(r) = \bar{\nu}_n^k(r) - \psi_{nt}^k(0). \end{gathered} \tag{13}$$

Выполняя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t) = r^{(1-m)/2}\upsilon_n^k(r,t)$ задачу (12), (13) сводим к следующей задаче:

$$L\upsilon_n^k \equiv \upsilon_{nrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k - \upsilon_{ntt}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \tag{14}$$

$$\begin{gathered} \upsilon_n^k(r,0) = \tilde{\tau}_n^k(r), \qquad \upsilon_{nt}^k(r,0) = \tilde{\upsilon}_n^k(r), \qquad \upsilon_n^k(1,t) = 0, \\ \bar{\lambda}_n = \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4}, \qquad \tilde{f}_n^k(r,t) = r^{(m-1)/2}\bar{f}_n^k(r,t), \\ \tilde{\tau}_n^k(r) = r^{(m-1)/2}\tau_n^k(r), \qquad \tilde{\nu}_n^k(r) = r^{(m-1)/2}\nu_n^k(r). \end{gathered} \tag{15}$$

Решение задачи (14), (15) ищем в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t), \tag{16}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \tag{17}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,0) = \upsilon_{1nt}^k(r,0) = 0, \qquad \upsilon_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{18}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k = 0, \tag{19}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,0) = \tilde{\tau}_n^k(r), \qquad \upsilon_{2nt}^k(r,0) = \tilde{\nu}_n^k(r), \qquad \upsilon_{2n}^k(1,t) = 0. \tag{20}$$

Решение указанных выше задач рассмотрим в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)T_s(t), \tag{21}$$

при этом пусть

$$\tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t)R_s(r), \qquad \tilde{\tau}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k R_s(r), \qquad \tilde{\nu}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n}^k R_s(r). \tag{22}$$

Подставляя (21) в (17), (18), с учетом (22) получаем

$$R_{srr} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}R_s + \mu R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{23}$$

$$R_s(1) = 0, \qquad |R_s(0)| < \infty, \tag{24}$$

$$T_{stt} - \mu T_s(t) = -a_{s,n}(t), \quad 0 < t < \alpha, \tag{25}$$

$$T_s(0) = 0, \qquad T_{st}(0) = 0. \tag{26}$$

Ограниченным решением задачи (23), (24) является следующее [9]:

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{27}$$

где $\nu = n + \dfrac{m-2}{2}$, $\mu_{s,n}$ — нули функций Бесселя первого рода $J_\nu(z)$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Задача (25), (26) сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $T_{s,n}(t)$ [10]

$$T_{s,n}(t) - \mu_{s,n}^2 \int\limits_0^t (t-\xi) T_{s,n}(\xi)\, d\xi = \int\limits_0^t (t-\xi) a_{s,n}(\xi)\, d\xi, \tag{28}$$

которое имеет решение, и притом единственное.

Подставляя (27) в (22), получаем

$$\begin{gathered} r^{-1/2} \tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \qquad r^{-1/2} \tilde{\tau}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k J_\nu(\mu_{s,n} r), \\ r^{-1/2} \tilde{\nu}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n}^k J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad 0 < r < 1. \end{gathered} \tag{29}$$

Ряды (29) — разложение в ряды Фурье – Бесселя [11], если

$$a_{s,n}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{f}_n^k(\xi, t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{30}$$

$$\begin{gathered} b_{s,n}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\tau}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \\ e_{s,n}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\nu}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi)\, d\xi, \end{gathered} \tag{31}$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \ldots,$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величин.

Из (27), (28) получим решение задачи (17), (18) в виде

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{32}$$

где $a_{s,n}^k(t)$ определяются из (30).

Далее, подставляя (27) в (19), (20), с учетом (22) имеем

$$V_{stt} - \mu_{s,n}^2 V_s = 0, \quad 0 < t < \alpha,$$

$$V_s(0) = b_{s,n}^k, \qquad V_{st}(0) = e_{s,n}^k.$$

Выполняя здесь замену

$$G_{s,n}(t) = V_{s,n}(t) - b_{s,n}^k - te_{s,n}^k, \tag{33}$$

приходим к задаче

$$G_{stt} - \mu_{s,n}^2 G_s = -q_{s,n}^k(t), \tag{34}$$

$$G_s(0) = 0, \qquad G_{st}(0) = 0, \tag{35}$$

$$q_{s,n}^k(t) = \mu_{s,n}^2 (b_{s,n}^k + te_{s,n}^k).$$

Задача (34), (35) сводится также к интегральному уравнению (28), где вместо $a_{s,n}^k(t)$ взято $q_{s,n}^k(t)$.

Из (27), (28) и (33) находим решение задачи (19), (20):

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} V_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{36}$$

где $b_{s,n}^k$, $e_{s,n}^k$ определены в (31).

Следовательно, решив сначала задачу (7), (11) $(n = 0)$, а затем (8), (11) $(n = 1)$ и т. д., найдем последовательно все $\upsilon_n^k(r,t)$ из (16), где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (32), (36), $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,\ldots$.

Итак, в области D_α имеет место

$$\int_H \rho(\theta) Lu \, dH = 0. \tag{37}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1$, V_1 плотна в $L_2((0,\alpha))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ плотна в $L_2(D_\alpha)$ [12].

Отсюда и из (37) следует, что

$$\int_{D_\alpha} f(r,\theta,t) Lu dD_\alpha = 0$$

и

$$Lu = 0 \quad \forall (r,\theta,t) \in D_\alpha.$$

Таким образом, решением задачи 1 является ряд

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_n^k(t) + r^{(1-m)/2} \left[\upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t) \right] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \tag{38}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t),\ \upsilon_{2n}^k(r,t)$ определены в (32), (36).

Учитывая формулу $2J_\nu'(z)=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)$ [11], оценки [5, 13]

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right),\quad \nu\geq 0,$$
$$|k_n|\leq c_1 n^{m-2},\qquad \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\leq c_2 n^{m/2-1+q},\qquad j=\overline{1,m-1},\quad q=0,1,\ldots, \tag{39}$$

а также леммы, ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta),\ \psi(t,\theta)$, как в [1, 2], можно показать, что полученное решение (38) принадлежит классу $C^1(\bar D_\alpha)\cap C^2(D_\alpha)$.

Следовательно, разрешимость задачи D установлена.

4. Единственность решения задачи 1. Сначала построим решение краевой задачи для уравнения (1^*) с данными

$$\upsilon\Big|_{\Gamma_\alpha}=0,\qquad \upsilon\Big|_{S_\alpha}=0,\qquad \upsilon_t\big|_{S_\alpha}=\nu(r,\theta)=\bar\nu_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\qquad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots, \tag{40}$$

где $\bar\nu_n^k(r)\in G,\ G$ — множество функций $\nu(r)$ из класса $C\left([0,1]\right)\cap C^1\left((0,1)\right)$. Множество G плотно всюду в $L_2((0,1))$ [12].

Решение задачи (1*), (40) будем искать в виде (5), где функции $\bar\upsilon_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда, как и в п. 3, функции $\bar\upsilon_n^k(r,t)$ удовлетворяют системе уравнений (7)–(9), где $\tilde a_{in}^k$, $a_{in}^k,\ \tilde b_n^k$ заменены соответственно на $-\tilde a_{in}^k,\ -a_{in}^k,\ -\tilde b_n^k$, а $\tilde c_n^k$ — на $\tilde d_n^k,\ i=1,\ldots,m,\ k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots$.

Далее, из краевого условия (40) в силу (5) получаем

$$\bar\upsilon_n^k(1,t)=0,\qquad \bar\upsilon_n^k(r,\alpha)=0,\qquad \bar\upsilon_{nt}^k(r,\alpha)=\bar\nu_n^k(r),\qquad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots. \tag{41}$$

Как замечено ранее, каждое уравнение системы (7)–(9) представимо в виде (10). Как и в п. 3, нетрудно показать, что задача (10), (41) имеет единственное решение.

Таким образом, решение задачи (1^*), (40), которая в силу (39) принадлежит классу $C^1\big(\bar D_\alpha\big)\cap$ $\cap\, C^2(D_\alpha)$, в виде ряда (38) построено.

Из определения сопряженных операторов $L,\ L^*$ [14] имеем

$$\upsilon Lu-uL^*\upsilon=-\upsilon P(u)+uP(\upsilon)-u\upsilon Q,$$

где

$$P(u)=\sum_{i=1}^m u_{x_i}\cos\left(N^\perp,x_i\right)-u_t\cos\left(N^\perp,t\right),\qquad Q=\sum_{i=1}^m a_i\cos\left(N^\perp,x_i\right)-b\cos\left(N^\perp,t\right),$$

а $N^\perp$ — внутренняя нормаль к границе ∂D_α. Далее, по формуле Грина получаем

$$\int\limits_{D_\alpha}(\upsilon Lu-uL^*\upsilon)\,dD_\alpha=\int\limits_{\partial D_\alpha}\left[\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial N}-u\frac{\partial\upsilon}{\partial N}\right)M+u\upsilon Q\right]ds, \tag{42}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial N} = \sum_{i=1}^{m} \cos\left(N^{\perp}, x_i\right) - \cos\left(N^{\perp}, t\right) \frac{\partial}{\partial t}, \qquad M^2 = \sum_{i=1}^{m} \cos^2\left(N^{\perp}, x_i\right) + \cos^2\left(N^{\perp}, t\right).$$

Из (42), принимая во внимание однородные граничные условия (2) и условия (40), находим

$$\int_{S_\alpha} \nu(r,\theta) u(r,\theta,\alpha)\, ds = 0. \tag{43}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\bar{\nu}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна в $L_2(S_\alpha)$ [12], то из (43) заключаем, что $u(r,\theta,\alpha) = 0\ \forall (r,\theta) \in S_\alpha$.

Таким образом, пришли к задаче Дирихле

$$Lu = 0, \qquad u\big|_{S_0} = 0, \qquad u\big|_{\Gamma_\alpha} = 0, \qquad u\big|_{S_\alpha} = 0, \tag{44}$$

решение которой тривиально [1], если

$$\sin \mu_{s,n}\alpha \neq 0, \quad s = 1, 2, \ldots . \tag{45}$$

Если условие (45) нарушено, то вместо задачи Дирихле (44) рассмотрим задачу Пуанкаре

$$Lu = 0, \qquad u_t\big|_{S_0} = 0, \qquad u\big|_{\Gamma_\alpha} = 0, \qquad u\big|_{S_\alpha} = 0,$$

имеющую тривиальное решение, если $\cos \mu_{s,n}\alpha \neq 0,\ s = 1, 2, \ldots$ [2]. Следовательно, единственность решения задачи 1 установлена.

Теорема доказана.

Литература

1. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором // Докл. Адыгской (Черкесской) междунар. академии наук. – 2011. – **13**, № 1. – С. 21 – 29.
2. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором // Журн. вычислит. и прикл. математики. – 2013. – **13**, № 4(14). – С. 68 – 76.
3. *Ладыженская О. А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. – М.: Гостехиздат, 1953. – 282 с.
4. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 407 с.
5. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
6. *Алдашев С. А.* О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**, № 1. – С. 64 – 68.
7. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.
8. *Алдашев С. А.* Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. – Орал: ЗКАТУ, 2007. – 139 с.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 703 с.
10. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 550 с.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 2 т. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 295 с.
12. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с.
13. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М: Наука, 1966. – 724 с.
14. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 4 т. – М.: Наука, 1981. – Т. 2, ч. 2. – 550 с.

Получено 26.11.14,
после доработки — 28.03.17