УДК 517.956

А. Т. Асанова, Ж. М. Кадирбаева, Э. А. Бакирова
(Ин-т математики и мат. моделирования МОН РК, Алматы)

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ НАГРУЖЕННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

We consider a nonlocal boundary-value problem with impulsive actions for a system of loaded hyperbolic equations and establish the relationship between the unique solvability of this problem and the unique solvability of a family of two-point boundary-value problems with impulse actions for the system of the loaded ordinary differential equations by method of introduction of additional functions. Sufficient conditions are obtained for the existence of a unique solution to a family two-point boundary-value problems with impulsive effects for the system of loaded ordinary differential equations by using method of parametrization. The algorithms of finding the solutions are constructed. The conditions of unique solvability of the nonlocal boundary-value problem for a system of loaded hyperbolic equations with impulsive actions are established. The numerical realization of the algorithms of the method of parametrization is proposed for the solution of the family of two-point boundary-value problems with impulsive actions for the system of the loaded ordinary differential equations. The results are illustrated by specific examples.

Встановлено взаємозв'язок між однозначною розв'язністю нелокальної крайової задачі з імпульсним впливом для системи навантажених гіперболічних рівнянь та однозначною розв'язністю сім'ї двоточкових крайових задач з імпульсним впливом для системи навантажених звичайних диференціальних рівнянь методом уведення додаткових функцій. На основі методу параметризації отримано достатні умови існування єдиного розв'язку сім'ї двоточкових крайових задач з імпульсним впливом для системи навантажених звичайних диференціальних рівнянь та побудовано алгоритми знаходження його розв'язків. Встановлено умови однозначної розв'язності нелокальної крайової задачі для системи навантажених гіперболічних рівнянь другого порядку з імпульсним впливом. Запропоновано числову реалізацію алгоритмів методу параметризації розв'язку сім'ї двоточкових крайових задач з імпульсним впливом для системи навантажених звичайних диференціальних рівнянь. Результати проілюстровано на конкретних прикладах.

1. Постановка задачи. В настоящей статье на прямоугольнике $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ рассматривается нелокальная краевая задача для системы нагруженных гиперболических уравнений второго порядка с импульсными воздействиями в фиксированные моменты времени

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\left\{M_i(t,x)\frac{\partial u(t_i+0,x)}{\partial x} + L_i(t,x)\frac{\partial u(t_i+0,x)}{\partial t} + K_i(t,x)u(t_i+0,x)\right\}, \quad t \neq t_i, \tag{1}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$P_0(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} + S_0(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial x} = \varphi_0(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

$$P_i(x)\frac{\partial u(t_i+0,x)}{\partial x} - S_i(x)\frac{\partial u(t_i-0,x)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{i-1} U_j(x)\frac{\partial u(t_j-0,x)}{\partial x} + \varphi_i(x), \quad i = \overline{1,k}, \tag{4}$$

где $u = \mathrm{col}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $(n \times n)$-матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ и n-вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на Ω, $(n \times n)$-матрицы $M_i(t,x)$, $L_i(t,x)$, $K_i(t,x)$, $i = \overline{1,k}$, непрерывны на Ω, n-вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, $(n \times n)$-матрицы $P_j(x)$, $S_j(x)$ и n-вектор-функции $\varphi_j(x)$, $j = \overline{0,k}$, непрерывны на $[0,\omega]$, $(n \times n)$-матрицы $U_s(x)$, $s = \overline{1,k}$, непрерывны на $[0,\omega]$,

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < T, \qquad \big\|u(t,x)\big\| = \max_{i=\overline{1,n}} \big|u_i(t,x)\big|, \qquad \big\|A(t,x)\big\| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} \big|a_{ij}(t,x)\big|.$$

Введем обозначения $t_0 = 0$, $t_{k+1} = T$, $\Omega_r = [t_{r-1}, t_r) \times [0,\omega]$, $r = \overline{1,k+1}$, т. е. $\Omega = \bigcup_{r=1}^{k+1} \Omega_r$.

Пусть $PC\big(\Omega, \{t_i\}_{i=1}^{k}, R^n\big)$ — пространство кусочно-непрерывных на Ω вектор-функций $u(t,x)$ с возможными разрывами на линиях $t = t_i$, $i = \overline{1,k}$, и нормой

$$\|u\|_1 = \max_{r=\overline{1,k+1}} \sup_{(t,x)\in\Omega_r} \big\|u(t,x)\big\|.$$

Функция $u(t,x) \in PC\big(\Omega, \{t_i\}_{i=1}^{k}, R^n\big)$, имеющая частные производные

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in PC\big(\Omega, \{t_i\}_{i=1}^{k}, R^n\big),$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in PC\big(\Omega, \{t_i\}_{i=1}^{k}, R^n\big),$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in PC\big(\Omega, \{t_i\}_{i=1}^{k}, R^n\big),$$

называется *решением* задачи (1) – (4), если она удовлетворяет системе нагруженных гиперболических уравнений (1) для всех $(t,x) \in \Omega$, кроме линий $t = t_i$, $i = \overline{1,k}$, краевым условиям (2), (3) и условиям импульсного воздействия (4). При этом решение и его производные являются непрерывными справа на линиях $t = t_i$, $i = \overline{1,k}$.

Различные краевые задачи с импульсными воздействиями для уравнений и систем гиперболического типа изучались в работах [1 – 8]. В работах [9, 10] для исследования и решения некоторых классов нелокальных задач с импульсными воздействиями для системы гиперболических уравнений был применен метод введения функциональных параметров [11 – 13]. Как известно, многие процессы в сложных эволюционных системах с памятью существенно зависят от предыстории этой системы и описываются нагруженными дифференциальными уравнениями [14 – 16]. Если в указанных системах с памятью появляются кратковременные возмущения, длительностью которых можно пренебречь, то возникают дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями [17 – 21]. Наличие импульса оказывает существенное влияние на свойства решений обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений [17, 18, 21, 22]. Заметим, что аппроксимации интегральных слагаемых интегро-дифференциальных уравнений также приводят к нагруженным дифференциальным уравнениям [14 – 16, 22 – 24].

В данной статье методы работ [9, 10, 25] развиваются на нелокальные краевые задачи для системы нагруженных гиперболических уравнений с импульсными воздействиями (1) – (4). Линии нагрузки в системе уравнений (1) также являются линиями импульсного воздействия. На основе введения новых неизвестных функций рассматриваемая задача сводится к эквивалентной задаче, состоящей из семейства двухточечных краевых задач с импульсными воздействиями для системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений и функционально-интегральных соотношений. Получены достаточные условия существования единственного решения семейства двухточечных краевых задач с импульсными воздействиями для системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений и предложены алгоритмы нахождения его решений. Результаты применены к нелокальной краевой задаче для системы гиперболических уравнений второго порядка с импульсными воздействиями. Установлены условия существования единственного решения нелокальной краевой задачи для системы нагруженных гиперболических уравнений второго порядка с импульсными воздействиями в терминах исходных данных. Предложена численная реализация алгоритмов метода параметризации [25] для построения решений семейства двухточечных краевых задач для системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений, развивающая методы работы [22]. Результаты проиллюстрированы на конкретных примерах.

2. Сведение к эквивалентной задаче и алгоритм. Пусть $v(t,x) = \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, $w(t,x) = \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$. Задача (1) – (4) переходит к следующей эквивалентной задаче:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t,x)v + \sum_{i=1}^{k} M_i(t,x)v(t_i+0,x) + f(t,x) + B(t,x)w(t,x) +$$

$$+C(t,x)u(t,x) + \sum_{i=1}^{k} \big[L_i(t,x)w(t_i+0,x) + K_i(t,x)u(t_i+0,x)\big], \quad t \neq t_i, \tag{5}$$

$$P_0(x)v(0,x) + S_0(x)v(T,x) = \varphi_0(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{6}$$

$$P_i(x)v(t_i+0,x) - S_i(x)v(t_i-0,x) = \sum_{j=1}^{i-1} U_j(x)v(t_j-0,x) + \varphi_i(x), \quad i = \overline{1,k}, \tag{7}$$

$$u(t,x) = \psi(t) + \int_0^x v(t,\xi)d\xi, \qquad w(t,x) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t}d\xi. \tag{8}$$

В задаче (5) – (8) условие $u(t,0) = \psi(t)$ входит в соотношения (8).

Тройка $\big\{v(t,x), u(t,x), w(t,x)\big\}$ кусочно-непрерывных на Ω функций называется *решением* задачи (5) – (8), если функция $v(t,x)$ имеет кусочно-непрерывную производную относительно t на Ω и удовлетворяет однопараметрическому семейству краевых задач для системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями (5) – (7), где функции $u(t,x)$ и $w(t,x)$ связаны с $v(t,x)$ и $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}$ интегральными соотношениями (8).

Задача (5) – (7) при фиксированных $u(t,x)$, $w(t,x)$ представляет семейство многоточечных краевых задач с импульсными воздействиями для системы нагруженных дифференциальных уравнений. Соотношение (8) позволяет определить неизвестные функции $u(t,x)$ и $w(t,x)$ с помощью $v(t,x)$ и ее производной $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}$. Решение задачи (5)–(8) — неизвестные функции $v(t,x)$, $u(t,x)$ и $w(t,x)$ — будут находиться итерационным способом на основе следующего алгоритма.

Алгоритм $\mathcal{A}$. *Шаг* 0. Полагая в правой части системы (5) $u(t,x)=\psi(t)$, $w(t,x)=\dot{\psi}(t)$, из семейства задач (5)–(7) находим $v^{(0)}(t,x)\in PC(\Omega,\{t_i\}_{i=1}^k,R^n)$. Из интегральных соотношений (8) при $v(t,x)=v^{(0)}(t,x)$, $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}=\dfrac{\partial v^{(0)}(t,x)}{\partial t}$ определяем $u^{(0)}(t,x)\in PC\big(\Omega,\{t_i\}_{i=1}^k, R^n\big)$, $w^{(0)}(t,x)\in PC\big(\bar{\Omega},\{t_i\}_{i=1}^k,R^n\big)$.

Шаг 1. Полагая в правой части системы (5) $u(t,x)=u^{(0)}(t,x)$, $w(t,x)=w^{(0)}(t,x)$, из семейства задач (5)–(7) находим $v^{(1)}(t,x)\in PC(\Omega,\{t_i\}_{i=1}^k,R^n)$. Из интегральных соотношений (8) при $v(t,x)=v^{(1)}(t,x)$, $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}=\dfrac{\partial v^{(1)}(t,x)}{\partial t}$ определяем $u^{(1)}(t,x)\in PC\big(\Omega,\{t_i\}_{i=1}^k, R^n\big)$, $w^{(1)}(t,x)\in PC(\Omega,\{t_i\}_{i=1}^k,R^n)$ и т. д.

Шаг m. Полагая в правой части системы (5) $u(t,x)=u^{(m-1)}(t,x)$, $w(t,x)=w^{(m-1)}(t,x)$, из семейства задач (5)–(7) находим $v^{(m)}(t,x)\in PC\big(\Omega,\{t_i\}_{i=1}^k,R^n\big)$. Из интегральных соотношений (8) при $v(t,x)=v^{(m)}(t,x)$, $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}=\dfrac{\partial v^{(m)}(t,x)}{\partial t}$ определяем $u^{(m)}(t,x)\in PC\big(\Omega,\{t_i\}_{i=1}^k, R^n\big)$, $w^{(m)}(t,x)\in PC\big(\Omega,\{t_i\}_{i=1}^k,R^n\big)$, $m=1,2,\ldots$.

Основным моментом осуществимости предлагаемого алгоритма $\mathcal{A}$ является разрешимость семейства краевых задач для системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями (5)–(7) при фиксированных $u(t,x)$, $w(t,x)$. Этому вопросу будет посвящен следующий пункт. Условия сходимости алгоритма $\mathcal{A}$ будут приведены в пункте 4.

3. Семейство краевых задач для системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями. Рассмотрим семейство краевых задач для системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями

$$\frac{\partial v}{\partial t}=A(t,x)v+\sum_{i=1}^{k}M_i(t,x)v(t_i+0,x)+F(t,x),\quad t\neq t_i, \tag{9}$$

$$P_0(x)v(0,x)+S_0(x)v(T,x)=\varphi_0(x),\quad x\in[0,\omega], \tag{10}$$

$$P_i(x)v(t_i+0,x)-S_i(x)v(t_i-0,x)=\sum_{j=1}^{i-1}U_j(x)v(t_j-0,x)+\varphi_i(x),\quad i=\overline{1,k}, \tag{11}$$

где $v=\mathrm{col}(v_1,v_2,\ldots,v_n)$, функция $F(t,x)\in PC\big(\Omega,\{t_i\}_{i=1}^k,R^n\big)$,

$$0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_k<t_{k+1}=T.$$

Функция $v(t,x)\in PC\big(\Omega,\{t_i\}_{i=1}^k,R^n\big)$, имеющая производную $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}\in PC\big(\Omega,\{t_i\}_{i=1}^k, R^n\big)$, называется *решением* семейства краевых задач с импульсными воздействиями для системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений (9)–(11), если она удовлетворяет системе (9) для всех $(t,x)\in\Omega$, кроме линий $t=t_i$, $i=\overline{1,k}$, краевому условию (10) и условиям импульсного воздействия (11) для всех $x\in[0,\omega]$.

При фиксированном $x \in [0,\omega]$ задача (9)–(11) является линейной двухточечной краевой задачей для системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями. Меняя переменную x на $[0,\omega]$, получаем семейство двухточечных краевых задач для системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями.

Как известно, нагруженные дифференциальные уравнения и краевые задачи для них были объектом изучения во многих работах (обзор и библиографию см., например, в [16]). Краевые задачи с импульсными воздействиями для нагруженных уравнений исследовались в [23, 24]. Краевые задачи с импульсными воздействиями для системы нагруженных дифференциальных уравнений, содержащих параметр x, требуют специального изучения.

Семейство краевых задач с импульсными воздействиями для системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений будем решать методом параметризации [25]. Суть метода заключается во введении дополнительных параметров как значений искомой функции на линиях разбиения области по переменной t. Исходная задача путем замены сводится к эквивалентной задаче с функциональными параметрами. Свойства решений переходят в свойства параметров.

Разбиение области Ω будем проводить на линиях нагрузки, т. е. неравномерным шагом. Дополнительные функциональные параметры вводятся как значения искомой функции на линиях $t = t_i,\ i = \overline{0,k}$.

Через $v_r(t,x)$ обозначим сужение функции $v(t,x)$ на $\Omega_r,\ r = \overline{1,k+1}$. Вводятся параметры $\mu_r(x) = v_r(t_{r-1},x),\ r = \overline{1,k+1}$, и задача (9)–(11) путем замены неизвестной функции $v(t,x) = \widetilde{v}_r(t,x) + \mu_r(x),\ (t,x) \in \Omega_r,\ r = \overline{1,k+1}$, сводится к следующей эквивалентной краевой задаче с параметрами:

$$\frac{\partial \widetilde{v}_r}{\partial t} = A(t,x)\widetilde{v}_r + A(t,x)\mu_r(x) + \sum_{i=1}^{k} M_i(t,x)\mu_{i+1}(x) + F(t,x), \quad (t,x) \in \Omega_r, \tag{12}$$

$$\widetilde{v}_r(t_{r-1},x) = 0, \qquad r = \overline{1,k+1}, \quad x \in [0,\omega], \tag{13}$$

$$P_0(x)\mu_1(x) + S_0(x)\mu_{k+1}(x) + S_0(x)\lim_{t\to T-0}\widetilde{v}_{k+1}(t,x) = \varphi_0(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{14}$$

$$P_i(x)\mu_{i+1}(x) - S_i(x)\mu_i(x) - \sum_{j=1}^{i-1} U_j(x)\mu_j(x) =$$

$$= S_i(x)\lim_{t\to t_i-0} v_i(t,x) + \sum_{j=1}^{i-1} U_j(x)\lim_{t\to t_j-0} v_j(t,x) + \varphi_i(x), \quad i = \overline{1,k}. \tag{15}$$

Решением задачи (12)–(15) является система пар $\big(\mu(x), \widetilde{v}([t],x)\big)$ с элементами $\mu(x) = \big(\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_{k+1}(x)\big)'$, $\widetilde{v}\big([t],x\big) = \big(\widetilde{v}_1(t,x), \widetilde{v}_2(t,x), \ldots, \widetilde{v}_{k+1}(t,x)\big)'$, где функции $\widetilde{v}_r(t,x)$ непрерывны на Ω_r, имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial \widetilde{v}_r(t,x)}{\partial t}$ на $\Omega_r,\ r = \overline{1,k+1}$, конечный левосторонний предел $\lim_{t\to t_r-0}\widetilde{v}_r(t,x),\ r = \overline{1,k+1}$, и при $\mu_r(x) = \mu_r^*(x)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (12) и условиям (13)–(15).

Задачи (9)–(11) и (12)–(15) эквивалентны в том смысле, что если функция $v(t,x)$ является решением задачи (9)–(11), то система пар $(\mu(x), \widetilde{v}([t],x))$, где

$$\mu(x) = \big(\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_{k+1}(x)\big)',$$

$$\widetilde{v}\big([t], x\big) = \big(\widetilde{v}_1(t,x), \widetilde{v}_2(t,x), \ldots, \widetilde{v}_{k+1}(t,x)\big)', \qquad v_r(t,x) = v(t,x),$$

$$(t,x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1, k+1}, \qquad \lim_{t \to T-0} v_{k+1}(t,x) = v(T,x),$$

$$\mu_r(x) = v_r(t_{r-1}, x), \qquad \widetilde{v}_r(t,x) = v_r(t,x) - v_r(t_{r-1}, x), \quad r = \overline{1, k+1},$$

будет решением задачи (12) – (15), и наоборот, если $\big(\mu_r(x), \widetilde{v}_r(t,x)\big)$, $r = \overline{1, k+1}$, — решение задачи (12) – (15), то функция $v(t,x)$, определяемая равенствами

$$v(t,x) = \mu_r(x) + \widetilde{v}_r(t,x), \qquad (t,x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1, k+1},$$

$$v(T,x) = \mu_{k+1}(x) + \lim_{t \to T-0} \widetilde{v}_{k+1}(t,x), \quad x \in [0, \omega],$$

будет решением задачи (9) – (11).

В отличие от задачи (9) – (11) здесь появились начальные условия (13) как значения неизвестной функции на линиях $t = t_{r-1}$, $r = \overline{1, k+1}$, а слагаемые с нагрузкой в дифференциальном уравнении перешли в слагаемые с функциональными параметрами. При фиксированных $\mu_r(x)$ $r = \overline{1, k+1}$, функции $\widetilde{v}_r(t,x)$, $r = \overline{1, k+1}$, являются решениями задачи Коши (12), (13) на Ω_r.

Задача Коши (12), (13) эквивалентна интегральному уравнению

$$\widetilde{v}_r(t,x) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} \left[A(\tau,x)\widetilde{v}_r(\tau,x) + A(\tau,x)\mu_r(x) + \sum_{i=1}^{k} M_i(\tau,x)\mu_{i+1}(x) + F(\tau,x) \right] d\tau. \tag{16}$$

Подставляя вместо $\widetilde{v}_r(\tau,x)$ соответствующую правую часть (16) и повторяя этот процесс m, $m = 1, 2, \ldots,$ раз, получаем представление функции $\widetilde{v}_r(t,x)$:

$$\widetilde{v}_r(t,x) = G_{m,r}(t,x,\widetilde{v}_r) + F_{m,r}(t,x) + D_{m,r}(t,x)\mu_r(x) + \sum_{i=1}^{k} \widetilde{D}_{m,r}(t,x,M_i)\mu_{i+1}(x), \tag{17}$$

где

$$G_{m,r}(t,x,\widetilde{v}_r) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x) \ldots \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{m-2}} A(\tau_{m-1},x) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{m-1}} A(\tau_m,x)\widetilde{v}_r(\tau_m,x)\, d\tau_m \ldots\, d\tau_1,$$

$$F_{m,r}(t,x) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} F(\tau_1,x)\, d\tau_1 + \ldots + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x) \ldots \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{m-2}} A(\tau_{m-1},x) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{m-1}} F(\tau_m,x)\, d\tau_m \ldots\, d\tau_1,$$

$$D_{m,r}(t,x) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x)\, d\tau_1 + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_1} A(\tau_2,x)\, d\tau_2\, d\tau_1 + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x) \ldots \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{m-2}} A(\tau_{m-1},x) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{m-1}} A(\tau_m,x)\, d\tau_m \ldots\, d\tau_1,$$

$$\widetilde{D}_{m,r}(t,x,M_i) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} M_i(\tau_1,x)\,d\tau_1 + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_1} M_i(\tau_2,x)\,d\tau_2\,d\tau_1 + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x)\ldots\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{m-2}} A(\tau_{m-1},x)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{m-1}} M_i(\tau_m,x)\,d\tau_m\ldots d\tau_1,$$

$$i=\overline{1,k},\quad m=1,2,\ldots,\quad r=\overline{1,k+1}.$$

Переходя в правой части (17) к пределу при $t\to t_r-0$, находим $\lim_{t\to t_r-0}\widetilde{v}_r(t,x)$, $r = \overline{1,k+1}$, $x\in[0,\omega]$. Подставляя их в (14), (15), для неизвестных вектор-функций $\mu_r(x)$, $r=\overline{1,k+1}$, получаем систему $k+1$ функциональных уравнений

$$P_0(x)\mu_1(x) + S_0(x)\sum_{i=1}^{k}\widetilde{D}_{m,k+1}(T,x,M_i)\mu_{i+1}(x) + S_0(x)\big[I + D_{m,k+1}(T,x)\big]\mu_{k+1}(x) =$$

$$= \varphi_0(x) - S_0(x)F_{m,k+1}(T,x) - S_0(x)G_{m,k+1}(T,x,\widetilde{v}_{k+1}),\quad x\in[0,\omega], \tag{18}$$

$$P_i(x)\mu_{i+1}(x) - S_i(x)\big[I + D_{m,i}(t_i,x)\big]\mu_i(x) - \sum_{j=1}^{i-1}U_j(x)[I + D_{m,j}(t,x)]\mu_j(x) -$$

$$-S_i(x)\sum_{l=1}^{k}\widetilde{D}_{m,i}(t_i,x,M_l)\mu_{l+1}(x) - \sum_{j=1}^{i-1}U_j(x)\sum_{l=1}^{k}\widetilde{D}_{m,j}(t,x,M_l)\mu_{l+1}(x) =$$

$$= S_i(x)F_{m,i}(t_i,x) + \sum_{j=1}^{i-1}U_j(x)F_{m,j}(t_j,x) + \varphi_i(x) +$$

$$+ S_i(x)G_{m,i}(t_i,x,\widetilde{v}_i) + \sum_{j=1}^{i-1}U_j(x)G_{m,j}(t_j,x,\widetilde{v}_j),\quad i=\overline{1,k}, \tag{19}$$

где I — единичная матрица размерности $n\times n$.

Запишем систему уравнений (18), (19) в векторно-матричной форме

$$Q_m(x)\mu(x) = -F_m(x) - G_m(x,\widetilde{v}), \tag{20}$$

где $Q_m(x)$ — матрица размерности $(n(k+1)\times n(k+1))$, соответствующая левой части системы (18), (19) и составленная из коэффициентов векторов $\mu_r(x)$, $r=\overline{1,k+1}$,

$$F_m(x) = \Bigg(-\varphi_0(x) + S_0(x)F_{m,k+1}(T,x), -S_1(x)F_{m,1}(t_1,x) - \varphi_1(x), -S_2(x)F_{m,2}(t_2,x) -$$

$$-U_1(x)F_{m,1}(t_1,x) - \varphi_1(x),\ldots,-S_k(x)F_{m,k}(t_k,x) - \sum_{j=1}^{k-1}U_j(x)F_{m,j}(t_j,x) - \varphi_k(x)\Bigg)',$$

$$G_m(x,\widetilde{v})=\Bigg(S_0(x)G_{m,k+1}(T,x,\widetilde{v}_{k+1}),-S_1(x)G_{m,1}(t_1,x,\widetilde{v}_1),-S_2(x)G_{m,2}(t_2,x,\widetilde{v}_2)-$$

$$-U_1(x)G_{m,1}(t_1,x,\widetilde{v}_1),\ldots,-S_k(x)G_{m,k}(t_k,x,\widetilde{v}_k)-\sum_{j=1}^{k-1}U_j(x)G_{m,j}(t_j,x,\widetilde{v}_j)\Bigg)'.$$

Если известны функции $\mu_r(x)$, $r=\overline{1,k+1}$, то, решая интегральное уравнение (16), находим функцию $\widetilde{v}_r(t,x)$ и, составляя систему функций $\big(\mu_r(x)+\widetilde{v}_r(t,x)\big)$, получаем решение исходной задачи. Если известны функции $\widetilde{v}_r(t,x)$, то, решая уравнение (18), находим $\mu_r(x)$ и, снова составляя систему функций $\big(\mu_r(x)+\widetilde{v}_r(t,x)\big)$, получаем решение задачи (9)–(11).

Здесь неизвестными являются как функции $\mu_r(x)$, так и функции $\widetilde{v}_r(t,x)$. Поэтому применяется итерационный метод и решение функциональных соотношений (16), (18) находится как пределы последовательностей $\{\mu_r^{(p)}(x)\}$, $\{\widetilde{v}_r^{(p)}(t,x)\}$, определяемых по следующему алгоритму.

Алгоритм $\mathcal{B}$. *Шаг* 0. Предполагая в правой части (18) $\widetilde{v}_r(t,x)=0$ и считая, что матрица $Q_m(x)$ обратима при всех $x\in[0,\omega]$, из уравнения (18) находим функции $\mu_r^{(0)}(x)$, $x\in[0,\omega]$, $r=\overline{1,k+1}$. Из интегрального уравнения (16), где $\mu_r(x)=\mu_r^{(0)}(x)$, определяем функции $\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,k+1}$.

Шаг 1. Из системы (18), где в правой части $\widetilde{v}_r(t,x)=\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)$, $r=\overline{1,k+1}$, в силу обратимости $Q_m(x)$ при $x\in[0,\omega]$ находим $\mu_r^{(1)}(x)$, $x\in[0,\omega]$, $r=\overline{1,k+1}$. Из интегрального уравнения (16), где $\mu_r(x)=\mu_r^{(1)}(x)$, определяем функции $\widetilde{v}_r^{(1)}(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,k+1}$, и т. д.

Шаг p. Из системы (18), где в правой части $\widetilde{v}_r(t,x)=\widetilde{v}_r^{(p-1)}(t,x)$, $r=\overline{1,k+1}$, в силу обратимости $Q_m(x)$ при $x\in[0,\omega]$ находим $\mu_r^{(p)}(x)$, $x\in[0,\omega]$, $r=\overline{1,k+1}$. Из интегрального уравнения (16), где $\mu_r(x)=\mu_r^{(p)}(x)$, определяем функции $\widetilde{v}_r^{(p)}(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,k+1}$, $p=1,2,\ldots$.

Применяемый метод делит на две части процесс нахождения неизвестных функций: 1) нахождение введенных функциональных параметров $\mu_r(x)$ из функционального уравнения (18); 2) нахождение неизвестной функции $\widetilde{v}_r(t,x)$ из интегрального уравнения (16).

Условия реализуемости и сходимости предложенного алгоритма $\mathcal{B}$, а также существования и единственности решения задачи (9)–(11) устанавливает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\big(n(k+1)\times n(k+1)\big)$*-матрица* $Q_m(x)$ *при некотором* m, $m\in\mathbb{N}$, *обратима для всех* $x\in[0,\omega]$ *и выполняются следующие неравенства*:

1) $\big\|[Q_m(x)]^{-1}\big\|\le\gamma_m(x)$, $\gamma_m(x)$ — *положительная непрерывная по* $x\in[0,\omega]$ *функция*;

2) $q_m(x)=\gamma_m(x)\left(\max_{i=\overline{0,k}}\big\|S_i(x)\big\|+\sum_{j=1}^{k-1}\big\|U_j(x)\big\|\right)\left\{\left(e^{\alpha(x)h}-1-\sum_{j=1}^{m}\dfrac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right)+\right.$
$\left.+\sum_{i=1}^{k}\max\limits_{t\in[0,T]}\big\|M_i(t,x)\big\|h\left[e^{\alpha(x)h}-1-\sum_{j=1}^{m-1}\dfrac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right]\right\}\le\chi<1$, *где* $\alpha(x)=$
$=\max_{t\in[0,T]}\big\|A(t,x)\big\|$, $h=\max_{r=\overline{1,k+1}}(t_r-t_{r-1})$, $\chi-\mathrm{const}$.

Тогда семейство краевых задач с импульсными воздействиями (9)–(11) *имеет единственное решение* $v^*(t,x)$ *и справедлива оценка*

$$\max_{i=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{i-1},t_i)} \big\|v^*(t,x)\big\| \le k(x,m) \max\left(\max_{t\in[0,T]}\big\|F(t,x)\big\|, \max_{i=\overline{0,k}}\big\|\varphi_i(x)\big\|\right), \tag{21}$$

где $k(x,m) = k_1(x,m) + k_2(x,m)$,

$$k_1(x,m) = \frac{\gamma_m(x)}{1-q_m(x)}\left(\max_{i=\overline{0,k}}||S_i(x)|| + \sum_{j=1}^{k-1}\big\|U_j(x)\big\|\right)\frac{\big[\alpha(x)h\big]^m}{m!}k_0(x,m)+$$

$$+\gamma_m(x)\left\{1+\left(\max_{i=\overline{0,k}}\big\|S_i(x)\big\| + \sum_{j=1}^{k-1}\big\|U_j(x)\big\|\right)\right\}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\big[\alpha(x)h\big]^j}{j!}h,$$

$$k_2(x,m) = \left\{\big[e^{\alpha(x)h}-1\big]\frac{\gamma_m(x)}{1-q_m(x)}\left(\max_{i=\overline{0,k}}\big\|S_i(x)\big\| + \sum_{j=1}^{k-1}\big\|U_j(x)\big\|\right)\frac{\big[\alpha(x)h\big]^m}{m!}+\right.$$

$$\left.+e^{\alpha(x)h}h\sum_{i=1}^{k}\max_{t\in[0,T]}||M_i(t,x)||\frac{\big[\alpha(x)h\big]^m}{m!}+1\right\}k_0(x,m),$$

$$k_0(x,m) =$$

$$=\big[e^{\alpha(x)h}-1\big]\gamma_m(x)\left\{1+\left(\max_{i=\overline{0,k}}\big\|S_i(x)\big\| + \sum_{j=1}^{k-1}\big\|U_j(x)\big\|\right)\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\big[\alpha(x)h\big]^j}{j!}h\right\}+e^{\alpha(x)h}h.$$

Доказательство теоремы 1 проводится по схеме вышеприведенного алгоритма.

Таким образом, теорема 1 дает достаточные условия существования единственного решения задачи (9) – (11) в терминах исходных данных: коэффициентной матрицы $A(t,x)$, матриц нагрузки $M_i(t,x)$, граничных матриц $S_0(x)$, $P_0(x)$, матриц импульсного воздействия $P_i(x)$, $S_i(x)$, $i=\overline{1,k}$, $U_j(x)$, $j=\overline{1,k-1}$.

4. Условия сходимости алгоритма $\mathcal{A}$ и основные утверждения. Условия сходимости алгоритма $\mathcal{A}$, которые одновременно обеспечивают существование единственного решения задачи (5) – (8), дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\big(n(k+1)\times n(k+1)\big)$*-матрица* $Q_m(x)$ *при некотором* m, $m\in\mathbb{N}$, *обратима для всех* $x\in[0,\omega]$ *и выполняются неравенства из пунктов* 1, 2 *теоремы* 1.

Тогда краевая задача с параметрами (5) – (8) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда по теореме 1 семейство краевых задач с импульсными воздействиями (9) – (11) имеет единственное решение. Следуя алгоритму $\mathcal{A}$, будем находить решение задачи (5) – (8). Из нулевого шага алгоритма находим решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t,x)v + \sum_{i=1}^{k}M_i(t,x)v(t_i+0,x) + f(t,x)+$$

$$+B(t,x)\dot\psi(t) + C(t,x)\psi(t) + \sum_{i=1}^{k}\big[L_i(t,x)\dot\psi(t_i) + K_i(t,x)\psi(t_i)\big], \quad t\ne t_i, \tag{22}$$

$$P_0(x)v(0,x)+S_0(x)v(T,x)=\varphi_0(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{23}$$

$$P_i(x)v(t_i+0,x)-S_i(x)v(t_i-0,x)=\sum_{j=1}^{i-1}U_j(x)v(t_j-0,x)+\varphi_i(x), \quad i=\overline{1,k}. \tag{24}$$

По предположению задача (22)–(24) имеет единственное решение $v^{(0)}(t,x)$ и

$$\max_{i=\overline{1,k+1}}\sup_{t\in[t_{i-1},t_i)}\big\|v^{(0)}(t,x)\big\|\le K(x)\max\Bigg(\max_{t\in[0,T]}\Bigg\|B(t,x)\dot\psi(t)+C(t,x)\psi(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\big[L_i(t,x)\dot\psi(t_i)+K_i(t,x)\psi(t_i)\big]+f(t,x)\Bigg\|,\max_{i=\overline{0,k}}\big\|\varphi_i(x)\big\|\Bigg),$$

$$\max_{i=\overline{1,k+1}}\sup_{t\in[t_{i-1},t_i)}\left\|\frac{\partial v^{(0)}(t,x)}{\partial t}\right\|\le\left(\max_{t\in[0,T]}\big\|A(t,x)\big\|K(x)+1\right)\max\Bigg(\max_{t\in[0,T]}\Bigg\|B(t,x)\dot\psi(t)+$$

$$+\,C(t,x)\psi(t)+\sum_{i=1}^{k}\big[L_i(t,x)\dot\psi(t_i)+K_i(t,x)\psi(t_i)\big]+f(t,x)\Bigg\|,\max_{i=\overline{0,k}}\big\|\varphi_i(x)\big\|\Bigg),$$

где $K(x)=k(x,m)$.

Пусть известны $u^{(m-1)}(t,x)$, $w^{(m-1)}(t,x)$. Тогда $v^{(m)}(t,x)$ находим, решая задачу (5)–(7), где $w(t,x)=w^{(m-1)}(t,x)$, $u(t,x)=u^{(m-1)}(t,x)$, $m=1,2,\ldots$. При найденном $v^{(m)}(t,x)$ следующие приближения по $u(t,x)$, $w(t,x)$ определяем из соотношений (8):

$$u^{(m)}(t,x)=\psi(t)+\int_0^x v^{(m)}(t,\xi)d\xi, \qquad w^{(m)}(t,x)=\dot\psi(t)+\int_0^x\frac{\partial v^{(m)}(t,\xi)}{\partial t}d\xi.$$

Составим разности $\Delta v^{(m)}(t,x)=v^{(m)}(t,x)-v^{(m-1)}(t,x)$, $\Delta u^{(m)}(t,x)=u^{(m)}(t,x)-u^{(m-1)}(t,x)$, $\Delta w^{(m)}(t,x)=w^{(m)}(t,x)-w^{(m-1)}(t,x)$, и для них, используя однозначную разрешимость задачи (9)–(11), получаем оценки

$$\max\left(\max_{i=\overline{1,k+1}}\sup_{t\in[t_{i-1},t_i)}\big\|\Delta v^{(m+1)}(t,x)\big\|,\max_{i=\overline{1,k+1}}\sup_{t\in[t_{i-1},t_i)}\left\|\frac{\partial\Delta v^{(m+1)}(t,x)}{\partial t}\right\|\right)\le$$

$$\le K_1(x)K_2(x)\max\left(\max_{i=\overline{1,k+1}}\sup_{t\in[t_{i-1},t_i)}\big\|\Delta w^{(m)}(t,x)\big\|,\max_{i=\overline{1,k+1}}\sup_{t\in[t_{i-1},t_i)}\big\|\Delta u^{(m)}(t,x)\big\|\right), \tag{25}$$

$$\max\left(\max_{i=\overline{1,k+1}}\sup_{t\in[t_{i-1},t_i)}\big\|\Delta w^{(m)}(t,x)\big\|,\max_{i=\overline{1,k+1}}\sup_{t\in[t_{i-1},t_i)}\big\|\Delta u^{(m)}(t,x)\big\|\right)\le$$

$$\le\int_0^x\max\left(\max_{i=\overline{1,k+1}}\sup_{t\in[t_{i-1},t_i)}\big\|\Delta v^{(m)}(t,\xi)\big\|,\max_{i=\overline{1,k+1}}\sup_{t\in[t_{i-1},t_i)}\left\|\frac{\partial\Delta v^{(m)}(t,\xi)}{\partial t}\right\|\right)d\xi, \tag{26}$$

где

$$K_1(x) = \max\left(K(x), \max_{t\in[0,T]} \big\|A(t,x)\big\|K(x)+1\right),$$

$$K_2(x) = \max_{t\in[0,T]} \big\|B(t,x)\big\| + \max_{t\in[0,T]} \big\|C(t,x)\big\| + \sum_{i=1}^{k} \left\{\max_{t\in[0,T]} \big\|L_i(t,x)\big\| + \max_{t\in[0,T]} \big\|K_i(t,x)\big\|\right\}.$$

Отсюда следует основное неравенство

$$\max\left(\max_{i=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{i-1},t_i)} ||\Delta v^{(m+1)}(t,x)||, \max_{i=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{i-1},t_i)} \left\|\frac{\partial \Delta v^{(m+1)}(t,x)}{\partial t}\right\|\right) \leq$$

$$\leq K_1(x)K_2(x) \int\limits_0^x \max\left(\max_{i=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{i-1},t_i)} \big\|\Delta v^{(m)}(t,\xi)\big\|, \max_{i=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{i-1},t_i)} \left\|\frac{\partial \Delta v^{(m)}(t,\xi)}{\partial t}\right\|\right) d\xi. \tag{27}$$

Из (27) следует равномерная сходимость последовательностей $\big\{v^{(m)}(t,x)\big\}$, $\left\{\dfrac{\partial v^{(m)}(t,x)}{\partial t}\right\}$ в пространстве $PC\big(\Omega, \{t_i\}_{i=1}^k, R^n\big)$ при $m\to\infty$. Тогда равномерная сходимость на Ω последовательностей $\big\{u^{(m)}(t,x)\big\}$, $\big\{w^{(m)}(t,x)\big\}$ вытекает из (19). При этом предельные функции $v^*(t,x) \in PC(\Omega, \{t_i\}_{i=1}^k, R^n)$, $\dfrac{\partial v^*(t,x)}{\partial t} \in PC\big(\Omega, \{t_i\}_{i=1}^k, R^n\big)$, $u^*(t,x) \in PC\big(\Omega, \{t_i\}_{i=1}^k, R^n\big)$, $w^*(t,x) \in PC\big(\Omega, \{t_i\}_{i=1}^k, R^n\big)$ и тройка функций $\big\{v^*(t,x), u^*(t,x), w^*(t,x)\big\}$ является решением задачи (5) – (8).

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 и эквивалентности задач (1) – (4) и (5) – (8) следует такая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\big(n(k+1)\times n(k+1)\big)$*-матрица* $Q_m(x)$ *при некотором* m, $m\in\mathbb{N}$, *обратима для всех* $x\in[0,\omega]$ *и выполняются неравенства из пунктов* 1, 2 *теоремы* 1.

Тогда нелокальная краевая задача с импульсными воздействиями (1) – (4) *имеет единственное решение.*

Отметим, что корректная разрешимость задачи (1) – (4) и корректная разрешимость задачи (9) – (11) эквивалентны; это утверждение можно доказать аналогично теореме 1 из [12]. Кроме того, условия теоремы 1 будут также необходимыми условиями для корректной разрешимости задач (9) – (11) и (1) – (4).

5. Численная реализация алгоритмов метода параметризации решения семейств краевых задач (9) – (11). Как видно из алгоритма $\mathcal{A}$, основным пунктом решения задачи (1) – (4) является нахождение решения семейств краевых задач с импульсным воздействием для системы нагруженных дифференциальных уравнений (9) – (11). Если будет построено ее приближенное или численное решение, то, используя соотношения (8), можно определить решение исходной задачи (1) – (4). В данном пункте предложена численная реализация метода параметризации для нахождения численных решений задачи (9) – (11). Эти результаты развивают результаты работы [22] на семейство краевых задач для системы нагруженных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим краевую задачу с параметрами (12) – (15). Если в представлении (17) осуществить предельный переход при $m\to\infty$ [26, с. 143], то для функции $\widetilde{v}_r(t,x)$ получим выражение

$$\widetilde{v}_r(t,x) = Y_r(t,x)\int\limits_{t_{r-1}}^{t} Y_r^{-1}(\tau,x)A(\tau,x)\mu_r(x)\,d\tau +$$

$$+Y_r(t,x)\int\limits_{t_{r-1}}^{t} Y_r^{-1}(\tau,x)\sum_{i=1}^{k} M_i(\tau,x)\mu_{i+1}(x)\,d\tau +$$

$$+Y_r(t,x)\int\limits_{t_{r-1}}^{t} Y_r^{-1}(\tau,x)F(\tau,x)\,d\tau, \qquad (t,x)\in\Omega_r, \quad r=\overline{1,k+1}. \tag{28}$$

Здесь $Y_r(t,x)$ — фундаментальная матрица дифференциального уравнения

$$\frac{\partial\widetilde{v}_r}{\partial t} = A(t,x)\widetilde{v}_r \quad \text{на} \quad \Omega_r = [\theta_{r-1},\theta_r)\times[0,\omega], \qquad Y_r(t_{r-1},x) = I, \quad r=\overline{1,k+1}.$$

Выражение (28) является решением задачи Коши (12), (13), представленным через фундаментальную матрицу дифференциальной части.

Подставив правую часть (28) в краевое условие (14) и условия импульса (15) при соответствующих предельных значениях, получим следующую систему функционально-алгебраических уравнений относительно параметров $\mu_r(x)$, $r=\overline{1,k+1}$:

$$P_0(x)\mu_1(x) + S_0(x)\left[I + Y_{k+1}(T,x)\int\limits_{t_k}^{T} Y_{k+1}^{-1}(\tau,x)A(\tau,x)\,d\tau\right]\mu_{k+1}(x) +$$

$$+S_0(x)Y_{k+1}(T,x)\int\limits_{t_k}^{T} Y_{k+1}^{-1}(\tau,x)\sum_{i=1}^{k} M_i(\tau,x)\mu_{i+1}(x)\,d\tau =$$

$$= \varphi_0(x) - S_0(x)Y_{k+1}(T,x)\int\limits_{t_k}^{T} Y_{k+1}^{-1}(\tau,x)F(\tau,x)\,d\tau, \quad x\in[0,\omega], \tag{29}$$

$$P_i(x)\mu_{i+1}(x) - S_i(x)\left[I + Y_i(t_i,x)\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} Y_i^{-1}(\tau,x)A(\tau,x)\,d\tau\right]\mu_i(x) -$$

$$-S_i(x)Y_i(t_i,x)\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} Y_i^{-1}(\tau,x)\sum_{l=1}^{i-1} M_l(\tau,x)\mu_{l+1}(x)\,d\tau - \sum_{j=1}^{i-1} U_j(x)\mu_{j+1}(x) -$$

$$-\sum_{j=1}^{i-1} U_j(x)Y_j(t_j,x)\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} Y_j^{-1}(\tau,x)\left[A(\tau,x)\mu_{j+1}(x) + \sum_{l=1}^{k} M_l(\tau,x)\mu_{l+1}(x)\right]d\tau =$$

$$= \varphi_i(x) + S_i(x) Y_i(t_i, x) \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} Y_i^{-1}(\tau, x) F(\tau, x)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1} U_j(x) Y_j(t_j, x) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} Y_j^{-1}(\tau, x) F(\tau, x)\, d\tau, \quad i = \overline{1, k}. \tag{30}$$

Обозначив через $Q_*(x)$ матрицу, соответствующую левой части системы (29), (30) и составленную из коэффициентов при параметрах $\mu_r(x)$, $r = \overline{1, k+1}$, а также введя вектор

$$F_*(x) = \Bigg(\varphi_0(x) - S_0(x) Y_{k+1}(T, x) \int\limits_{t_k}^{T} Y_{k+1}^{-1}(\tau, x) F(\tau, x)\, d\tau,$$

$$\varphi_1(x) - S_1(x) Y_1(t_1, x) \int\limits_{t_0}^{t_1} Y_1^{-1}(\tau, x) F(\tau, x)\, d\tau,$$

$$\varphi_2(x) + S_2(x) Y_2(t_2, x) \int\limits_{t_1}^{t_2} Y_2^{-1}(\tau, x) F(\tau, x)\, d\tau + U_1(x) Y_1(t_1, x) \int\limits_{t_0}^{t_1} Y_1^{-1}(\tau, x) F(\tau, x)\, d\tau, \ldots,$$

$$\varphi_k(x) + S_k(x) Y_k(t_k, x) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} Y_k^{-1}(\tau, x) F(\tau, x)\, d\tau + \sum_{j=1}^{k-1} U_j(x) Y_j(t_j, x) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} Y_j^{-1}(\tau, x) F(\tau, x)\, d\tau \Bigg),$$

запишем систему (29), (30) в виде

$$Q_*(x) \mu(x) = -F_*(x). \tag{31}$$

Как было доказано в [22] для системы интегро-дифференциальных уравнений, аналогично можно установить, что разрешимость краевой задачи (9) – (11) эквивалентна разрешимости системы (31). Решение системы (31) — вектор $\mu^*(x) = \big(\mu_1^*(x), \ldots, \mu_{k+1}^*(x)\big)$ — состоит из значений решений исходной задачи (9) – (11) в начальных линиях областей Ω_r, т. е. $\mu_r^*(x) = v^*(t_{r-1}, x)$, $x \in [0, \omega]$, $r = \overline{1, k+1}$.

Если известно $\mu^*(x) = (\mu_1^*(x), \mu_2^*(x), \ldots, \mu_{k+1}^*(x))$ — решение системы (31), то решение краевой задачи (9) – (11) определяется равенствами

$$v^*(t, x) = Y_r(t, x) Y_r^{-1}(t_{r-1}, x) \mu_r^*(x) + Y_r(t, x) \int\limits_{t_{r-1}}^{t} Y_r^{-1}(\tau, x) \sum_{i=1}^{k} M_i(\tau, x)\, d\tau \mu_{i+1}^*(x) +$$

$$+ Y_r(t, x) \int\limits_{t_{r-1}}^{t} Y_r^{-1}(\tau, x) F(\tau, x)\, d\tau, \qquad (t, x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1, k+1}, \tag{32}$$

$$v^*(T, x) = Y_{k+1}(T, x) \left[Y_k^{-1}(t_k, x) \mu_{k+1}^*(x) + \int\limits_{t_k}^{T} Y_{k+1}^{-1}(\tau, x)\, d\tau \sum_{i=1}^{k} M_i(\tau, x) \mu_{i+1}^*(x) \right] +$$

$$+Y_{k+1}(T,x)\int\limits_{t_k}^{T} Y_{k+1}^{-1}(\tau,x)F(\tau,x)\,d\tau. \tag{33}$$

Представления (32), (33) являются аналитической формой решения семейства двухточечных краевых задач для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями (9) – (11). Как видно из уравнений (29), (30), коэффициенты и правая часть системы (31) составляются из решений семейств задач Коши

$$\frac{\partial z}{\partial t} = A(t,x)z + M_j(t,x), \qquad z(t_{r-1},x) = 0, \quad j = \overline{1,k}, \quad r = \overline{1,k+1}, \tag{34}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = A(t,x)z + F(t,x), \qquad z(t_{r-1},x) = 0, \quad r = \overline{1,k+1}. \tag{35}$$

Применяя метод Рунге – Кутта 4-го порядка точности для численного решения семейств задач Коши (34), (35), строим следующий алгоритм численного решения семейства двухточечных краевых задач для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями (9) – (11).

Пусть имеется разбиение $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < t_{k+1} = T$. Каждый подынтервал $[t_{i-1}, t_i)$, $i = \overline{1,k+1}$, делится на N_i частей, приближенные значения коэффициентов и правой части (31) определяются через решения матричных и векторных задач Коши методом Рунге – Кутта 4-го порядка точности с шагом $h_i = (t_i - t_{i-1})/N_i$, $i = \overline{1,k+1}$, на каждом i-м интервале. Тогда получаем следующую приближенную систему алгебраических уравнений относительно параметров $\mu(x)$ при значении $x = \hat{x}$, $\hat{x} \in [0,\omega]$:

$$Q_*^{\widetilde{h}}(\hat{x})\mu(\hat{x}) = -F_*^{\widetilde{h}}(\hat{x}), \qquad \mu(\hat{x}) \in \mathbb{R}^{n(k+1)}, \quad \widetilde{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_{k+1}). \tag{36}$$

Решая систему алгебраических уравнений (36) при выбранном значении $x = \hat{x}$, находим $\mu^{\widetilde{h}}(\hat{x}) \in \mathbb{R}^{n(k+1)}$. Компоненты $\mu^{\widetilde{h}}(\hat{x}) = \big(\mu_1^{\widetilde{h}}(\hat{x}), \mu_2^{\widetilde{h}}(\hat{x}), \ldots, \mu_{k+1}^{\widetilde{h}}(\hat{x})\big) \in R^{n(k+1)}$ являются значениями приближенного решения задачи (9) – (11) в начальных точках подынтервалов: $v^{\widetilde{h}_r}(t_0,\hat{x}) = \mu_1^{\widetilde{h}}(\hat{x})$, $v^{\widetilde{h}_r}(t_1,\hat{x}) = \mu_2^{\widetilde{h}}(\hat{x}), \ldots, v^{\widetilde{h}_r}(t_k,\hat{x}) = \mu_{k+1}^{\widetilde{h}}(\hat{x})$. Из формул (32), (33) следует, что приближенные значения решения в остальных точках подынтервалов определяются через решения задач Коши

$$\frac{\partial v}{dt} = A(t,x)v + \sum_{i=1}^{k} M_i(t,x)\mu_{i+1}^{\widetilde{h}}(x) + f(t), \qquad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1,k+1}, \tag{37}$$

$$v(t_{r-1},x) = \mu_r^{\widetilde{h}}(x), \quad r = \overline{1,k+1}. \tag{38}$$

Снова применяя метод Рунге – Кутта 4-го порядка точности для численного решения задач Коши (37), (38), определяем численное решение задачи (9) – (11).

Для иллюстрации предложенного подхода численного решения двухточечной краевой задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (9) – (11) на основе метода параметризации рассмотрим следующие примеры.

Пример **1.** Рассмотрим семейство краевых задач для системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями (9) – (11) при $k = 2$. Пусть

$$T=1,\quad t_1=\frac{1}{4},\quad t_2=\frac{1}{2},\qquad A(t,x)=\begin{pmatrix} x & x\\ x & x\end{pmatrix},\qquad M_1(t,x)=\begin{pmatrix} 1 & t\\ x & t+1\end{pmatrix},$$

$$P_0(x)=\begin{pmatrix} 1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad P_1(x)=\begin{pmatrix} 1 & x+1\\ 2 & 0\end{pmatrix},\qquad P_2(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ x & 2\end{pmatrix},$$

$$\varphi_0(x)=\begin{pmatrix} 2x^2+3x+4\\ 2\end{pmatrix},\qquad S_0(x)=\begin{pmatrix} x & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad S_1(x)=\begin{pmatrix} 2 & x\\ 0 & x+1\end{pmatrix},$$

$$S_2(x)=\begin{pmatrix} 1 & x\\ 0 & x^2\end{pmatrix},\qquad M_2(t,x)=\begin{pmatrix} t & 0\\ 0 & x\end{pmatrix},\qquad U_1(x)=\begin{pmatrix} x & 0\\ 1 & x+1\end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(x)=\begin{pmatrix} -x^2-15/8\\ -x^2-1/2\end{pmatrix},\qquad \varphi_2(x)=\begin{pmatrix} -x^3-x^2-9x/4+1/2\\ -x^4-2x^2+9x/4+7/4\end{pmatrix},$$

$$F(t,x)=\begin{pmatrix} -x^2-2tx-7t/4-1/16\\ -x^3-x^2-2tx-65x/16-t-1\end{pmatrix}\quad \text{при}\quad (t,x)\in[0,1/4)\times[0,1],$$

$$F(t,x)=\begin{pmatrix} -xt^2-tx-x^2-2x+t/4-17/16\\ -xt^2-tx-x^3-x^2-97x/16-t-1\end{pmatrix}\quad \text{при}\quad (t,x)\in[1/4,1/2)\times[0,1],$$

$$F(t,x)=\begin{pmatrix} -xt^2-2tx-x^3-2x+t/4-1/16\\ -xt^2-2tx-2x^3-97x/16-t-1\end{pmatrix}\quad \text{при}\quad (t,x)\in[1/2,1]\times[0,1].$$

В рассматриваемой задаче фундаментальной матрицей дифференциальной части является $Y(t,x)=\begin{pmatrix} e^x & e^{2tx}\\ -e^x & e^{2tx}\end{pmatrix}$. Дополнительные функциональные параметры $\mu_r(x),\ r=\overline{1,3}$, введем как значения искомой функции на линиях $t=t_i,\ i=\overline{0,2}$: $\mu_1(x)\doteq v(0,x),\ \mu_2(x)\doteq v\left(\frac{1}{4},x\right)$, $\mu_3(x)\doteq v\left(\frac{1}{2},x\right)$ и осуществим замену

$$v(t,x)=\widetilde{v}_1(t,x)+\mu_1(x),\qquad (t,x)\in\left[0,\frac{1}{4}\right)\times[0,1],$$

$$v(t,x)=\widetilde{v}_2(t,x)+\mu_2(x),\qquad (t,x)\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\times[0,1],$$

$$v(t,x)=\widetilde{v}_3(t,x)+\mu_3(x),\qquad (t,x)\in\left[\frac{1}{2},1\right)\times[0,1].$$

Для функции $\widetilde{v}_r(t,x),\ r=\overline{1,3}$, имеют место равенства (28) с учетом данных рассматриваемого примера.

Краевое условие и условия импульсного воздействия решения при $t=\frac{1}{4},\ t=\frac{1}{2}$ приводят к системе (31) с соответствующим видом матрицы $Q_*(x)$ и правой части $F_*(x)$. Тогда значения параметров определяются следующим образом:

$$\mu_1^*(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mu_2^*(x) = \begin{pmatrix} 17/16 \\ 1+x \end{pmatrix}, \qquad \mu_3^*(x) = \begin{pmatrix} 3/4 \\ x^2+2 \end{pmatrix}.$$

Используя представления (32), (33), находим единственное решение задачи (1) – (4):

$$v^*(t,x) = \begin{pmatrix} t+x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (t,x) \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \times [0,1],$$

$$v^*(t,x) = \begin{pmatrix} 1+t^2 \\ 1+x \end{pmatrix}, \qquad (t,x) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \times [0,1],$$

$$v^*(t,x) = \begin{pmatrix} t^2+t \\ x^2+2 \end{pmatrix}, \qquad (t,x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [0,\omega].$$

В этом примере удалось построить фундаментальную матрицу дифференциальной части рассматриваемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Это в совокупности с вычисляемыми интегралами позволило построить решение задачи в явном виде на основе алгоритма метода параметризации.

***Пример* 2.** Пусть

$$A(t,x) = \begin{pmatrix} t & x^2 \\ 0 & \dfrac{t}{2} \end{pmatrix},$$

$$F(t,x) = \begin{pmatrix} -t^2 - 2tx - \dfrac{7t}{4} - \dfrac{1}{16} \\ -tx - t - x^3 - \dfrac{65x}{16} - 1 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad (t,x) \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \times [0,1],$$

$$F(t,x) = \begin{pmatrix} -tx - t^3 - \dfrac{3t}{4} - x^3 - x^2 - \dfrac{17}{16} \\ -\dfrac{3xt}{2} - \dfrac{3t}{2} - x^3 - \dfrac{65x}{16} - 1 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad (t,x) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \times [0,1],$$

$$F(t,x) = \begin{pmatrix} -tx - t^3 - t^2 + \dfrac{t}{4} - x^4 - 2x^2 - \dfrac{1}{16} \\ -\dfrac{tx^2}{2} - tx - 2t - x^3 - \dfrac{65x}{16} - 1 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad (t,x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [0,1],$$

а остальные данные такие же, как в примере 1. Здесь матрица $A(t,x)$ также зависит от t и построить фундаментальную матрицу не удается. Используем численную реализацию алгоритма метода параметризации. Приведем результаты численной реализации алгоритма при разбиении интервалов $[0; 0{,}25]$, $[0{,}25; 0{,}5]$, $[0{,}5; 1]$ с шагом $h_1 = h_2 = 0{,}025$, $h_3 = 0{,}05$, соответственно, для значений $x = 0$, $x = 0{,}5$, $x = 1$.

При $x = 0$

t	$\widehat{v}_1(t,x)$	$\widehat{v}_2(t,x)$	t	$\widehat{v}_1(t,x)$	$\widehat{v}_2(t,x)$	t	$\widehat{v}_1(t,x)$	$\widehat{v}_2(t,x)$
0	0	0	0,25	1,0625	1	0,5	0,74999999	2
0,025	0,025	0	0,275	1,075625	1	0,55	0,8525	2
0,05	0,05	0	0,3	1,09	1	0,6	0,96	2
0,075	0,075	0	0,325	1,105625	1	0,65	1,0725	2
0,1	0,1	0	0,35	1,1225	1	0,7	1,19	2
0,125	0,125	0	0,375	1,14062499	1	0,75	1,3125	2
0,15	0,15	0	0,4	1,15999999	1	0,8	1,44	2
0,175	0,175	0	0,425	1,18062499	1	0,85	1,57250001	2
0,2	0,2	0	0,45	1,20249999	1	0,9	1,71000001	2
0,225	0,225	0	0,475	1,22562499	1	0,95	1,85250001	2
0,25	0,25	0	0,5	1,24999999	1	1	2,00000001	2

При $x = 0{,}5$

t	$\widehat{v}_1(t,x)$	$\widehat{v}_2(t,x)$	t	$\widehat{v}_1(t,x)$	$\widehat{v}_2(t,x)$	t	$\widehat{v}_1(t,x)$	$\widehat{v}_2(t,x)$
0	0,5	0	0,25	1,0625	1,5	0,5	0,74999999	2,25
0,025	0,525	0	0,275	1,075625	1,5	0,55	0,85249999	2,25
0,05	0,55	0	0,3	1,08999999	1,5	0,6	0,96	2,25
0,075	0,575	0	0,325	1,10562499	1,5	0,65	1,0725	2,25
0,1	0,6	0	0,35	1,12249999	1,5	0,7	1,19	2,25
0,125	0,625	0	0,375	1,14062499	1,5	0,75	1,3125	2,25
0,15	0,65	0	0,4	1,15999999	1,5	0,8	1,44	2,25
0,175	0,675	0	0,425	1,18062499	1,5	0,85	1,5725	2,25
0,2	0,7	0	0,45	1,20249999	1,5	0,9	1,71	2,25
0,225	0,725	0	0,475	1,22562499	1,5	0,95	1,85250001	2,25
0,25	0,75	0	0,5	1,24999999	1,5	1	2	2,25

При $x = 1$

t	$\widehat{v}_1(t,x)$	$\widehat{v}_2(t,x)$	t	$\widehat{v}_1(t,x)$	$\widehat{v}_2(t,x)$	t	$\widehat{v}_1(t,x)$	$\widehat{v}_2(t,x)$
0	1	0	0,25	1,0625	2	0,5	0,74999999	3
0,025	1,025	0	0,275	1,07562499	2	0,55	0,85249999	3
0,05	1,05	0	0,3	1,08999999	2	0,6	0,96	3
0,075	1,075	0	0,325	1,10562499	2	0,65	1,0725	3
0,1	1,1	0	0,35	1,12249999	2	0,7	1,19	3
0,125	1,125	0	0,375	1,14062499	2	0,75	1,3125	3
0,15	1,15	0	0,4	1,15999999	2	0,8	1,44	3
0,175	1,175	0	0,425	1,18062499	2	0,85	1,5725	3
0,2	1,2	0	0,45	1,20249999	2	0,9	1,71	3
0,225	1,225	0	0,475	1,22562499	2	0,95	1,8525	3
0,25	1,25	0	0,5	1,24999999	2	1	2	3

Решение задачи в примере 2 имеет вид

$$v^*(t,x) = \begin{pmatrix} t+x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad (t,x) \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \times [0,1],$$

$$v^*(t,x) = \begin{pmatrix} t^2+1 \\ x+1 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad (t,x) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \times [0,1],$$

$$v^*(t,x) = \begin{pmatrix} t^2+t \\ x^2+2 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad (t,x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [0,1].$$

Для разности соответствующих значений точного и построенного решений задачи примера 2 справедлива оценка $\max_{j=\overline{1,30}} \max_{x\in[0,1]} \left\| v^*(t_j,x) - \widehat{v}(t_j,x) \right\| < 0{,}00000001.$

Литература

1. *Rogovchenko S. P.* Periodic solutions for hyperbolic impulsive systems (in Russian). – Kiev, 1988. – 20 p. – (Preprint / Ukr. Acad. Sci. Inst. Math.; № 88.3).
2. *Bainov D. D., Kamont Z., Minchev E.* Monotone iterative methods for impulsive hyperbolic differential functional equations // J. Comput. and Appl. Math. – 1996. – **70**. – P. 329 – 347.
3. *Perestyuk N. A., Tkach A. B.* Periodic solutions for weakly nonlinear partial system with pulse influense // Ukr. Math. J. – 1997. – **49**, № 4. – P. 601 – 605.
4. *Bainov D. D., Minchev E., Myshkis A.* Periodic boundary value problems for impulsive hyperbolic systems // Communs Appl. Anal. – 1997. – **1**, № 4. – P. 1 – 14.
5. *Liu X., Zhang S. H.* A cell population model described by impulsive PDE-s, existence and numerical approximation // Comput. Math. and Appl. – 1998. – **36**, № 8. – P. 1 – 11.
6. *Tkach A. B.* Numerical-analytic method of finding periodic solutions for systems of partial differential equations with pulse influence // Nonlinear Oscillations. – 2001. – **4**, № 2. – P. 278 – 288.
7. *Tkach A. B.* Numerical-analytic method of finding periodic solutions for systems of partial integro-differential equations with pulse influence // Nonlinear Oscillations. – 2005. – **8**, № 1. – P. 123 – 131.
8. *Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S.* Impulsive differential equations and inclusions. – New York; Cairo: Hindawi Publ. Corp., 2006. – 366 p.
9. *Asanova A. T.* On a nonlocal boundary-value problem for systems of impulsive hyperbolic equations // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 3. – P. 349 – 365.
10. *Asanova A. T.* Well-posed solvability of a nonlocal boundary-value problem for the systems of hyperbolic equations with impulse effects // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, № 3. – P. 333 – 346.
11. *Asanova A. T., Dzhumabaev D. S.* Unique solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // Different. Equat. – 2003. – **39**, № 10. – P. 1414 – 1427.
12. *Asanova A. T., Dzhumabaev D. S.* Well-posed solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // Different. Equat. – 2005. – **41**, № 3. – P. 352 – 363.
13. *Asanova A. T., Dzhumabaev D. S.* Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // J. Math. Anal. and Appl. – 2013. – **402**, № 1. – P. 167 – 178.
14. *Нахушев А. М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложении к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 1. – С. 72 – 81.
15. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**, № 1. – С. 86 – 94.
16. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применение. – М.: Наука, 2012. – 232 с.

17. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с. (English transl.: *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1995. – 290 p.).
18. *Akhmetov M. U., Perestyuk N. A.* Stability of periodic solutions of differential equations with impulse effect on surfaces // Ukr. Math. J. – 1989. – **41**, № 12. – P. 1596 – 1601 (in Russian).
19. *Bainov D. D., Simeonov P. S.* Systems with impulse effect: stability, theory and applications. – New York etc.: Halsted Press, 1989. – 345 p.
20. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1989. – 434 p.
21. *Akhmet M. U., Tleubergenova M. A., Yilmaz O.* Asymptotic behavior of linear impulsive integro-differential equations // Comput. and Math. Appl. – 2008. – **56**. – P. 1071 – 1081.
22. *Dzhumabaev D. S.* On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations // J. Comput. and Appl. Math. – 2016. – **294**. – P. 342 – 357.
23. *Абдуллаев В. М., Айда-Заде К. Р.* О численном решении нагруженных дифференциальных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2004. – **44**, № 9. – С. 1585 – 1595.
24. *Абдуллаев В. М., Айда-Заде К. Р.* Численный метод решения нагруженных нелокальных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2014. – **54**, № 7. – С. 1096 – 1109.
25. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1989. – **29**, № 1. – С. 50 – 66.
26. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.

Получено 07.04.16