УДК 517.5

Н. В. Парфінович (Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара)

ТОЧНІ ЗНАЧЕННЯ НАЙКРАЩИХ (α,β)-НАБЛИЖЕНЬ КЛАСІВ ЗГОРТОК З ЯДРАМИ, ЩО НЕ ЗБІЛЬШУЮТЬ ЧИСЛО ЗМІН ЗНАКА

We obtain the exact values of the best (α,β)-approximations of the classes $K*F$ of periodic functions $K*f$ such that f belongs to a given rearrangement-invariant set F and K is 2π-periodic kernel that do not increase the number of sign changes by the subspaces of generalized polynomial splines with nodes at the points $2k\pi/n$ and $2k\pi/n+h,$ $n\in\mathbb{N},$ $k\in\mathbb{Z},$ $h\in(0,2\pi/n)$. It is shown that these subspaces are extremal for the Kolmogorov widths of the corresponding functional classes.

Найдены точные значения наилучших (α,β)-приближений классов $K*F$ периодических функций $K*f$ таких, что f принадлежит заданному перестановочно-инвариантному множеству F, а K является 2π-периодическим ядром, не увеличивающим число перемен знака, подпространствами обобщенных полиномиальных сплайнов с узлами в точках $2k\pi/n$ и $2k\pi/n+h,$ $n\in\mathbb{N},$ $k\in\mathbb{Z},$ $h\in(0,2\pi/n)$. Показано, что эти подпространства являются экстремальными для поперечников по Колмогорову соответствующих функциональных классов.

1. Основні означення і постановка задач. Нехай C і L_p, $1\le p\le\infty$, — простори 2π-періодичних функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ із відповідними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_{L_p}=\|\cdot\|_p$, $p'=p/(p-1)$.

Для $f\in L_p$ і чисел $\alpha,\beta\ge 0$ покладемо

$$\|f\|_{p;\alpha,\beta}=\|\alpha f_+ +\beta f_-\|_p,$$

де

$$f_\pm(x)=\max\{\pm f(x),0\}.$$

Якщо H — скінченновимірний підпростір L_p і $\alpha,\beta>0$, то величину

$$E(f,H)_{p;\alpha,\beta}:=\inf_{h\in H}\|f-h\|_{p;\alpha,\beta} \tag{1}$$

назвемо найкращим (α,β)-наближенням функції f підпростором H у метриці L_p.

Задача найкращого (α,β)-наближення класу функцій $M\subset L_p$ полягає в тому, щоб знайти величину

$$E(M,H)_{p;\alpha,\beta}=\sup_{f\in M}E(f,H)_{p;\alpha,\beta}. \tag{2}$$

Зафіксуємо множину $H\subset L_p$. Функції $f\in L_p$ поставимо у відповідність підмножини

$$H_f^+=\big\{u(t)\colon u\in H, u(t)\le f(t), 0\le t\le 2\pi\big\},$$

$$H_f^-=\big\{u(t)\colon u\in H, u(t)\ge f(t), 0\le t\le 2\pi\big\}.$$

Величини

$$E^\pm(f,H)_p:=\begin{cases}\inf\big\{\|f-u\|_p\colon u\in H_f^\pm\big\}, & H_f^\pm\ne\varnothing,\\ \infty, & H_f^\pm=\varnothing,\end{cases}$$

і

$$E^\pm(M,H)_p:=\sup_{f\in M}E^\pm(f,H)_p$$

називаються найкращим наближенням знизу $(+)$ і зверху $(-)$ функції $f \in L_p$ і класу $M \subset L_p$ відповідно.

Покладаючи у формулах (1) і (2) $\alpha = \beta = 1$, отримуємо найкращі L_p-наближення без обмежень (позначення $E(f,H)_p$ і $E(M,H)_p$), а спрямовуючи α або β до $+\infty$, — найкраще наближення зверху або знизу (див. [1], теорема 2) відповідно функції f і класу M. Отже, сім'я задач найкращого (α,β)-наближення „інтерполює" задачі найкращого і найкращого одностороннього наближень та дозволяє розглядати їх із загальної точки зору. У зв'язку з цією властивістю нижче будемо припускати для α або β значення $+\infty$, тобто будемо ототожнювати у цих випадках найкращі (α,β)-наближення з найкращими односторонніми наближеннями. Зазначимо, що вивчення задач найкращого (α,β)-наближення при $\alpha,\beta < \infty$ має, звичайно, і самостійний інтерес.

Позначимо через T_{2n-1}, $n = 1,2,\ldots$, простір тригонометричних поліномів порядку не вищого $n-1$.

Згортку $K * \varphi$ функції $K \in L_1$ і $\varphi \in L_1$ означимо рівністю

$$(K * \varphi)(x) = \int_0^{2\pi} K(x-t)\varphi(t)\,dt.$$

Для ядра K покладемо

$$M(K) = \left\{ m \in \mathbb{Z} \colon \hat{K}_m = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} K(t) e^{-imt}\,dt = 0 \right\}$$

і будемо далі вважати, що $M(K)$ — порожня або скінченна множина. Якщо $M \in \mathbb{Z}$ — скінченна центрально-симетрична множина, то через $T(M)$ позначимо лінійний простір тригонометричних поліномів вигляду

$$T(x) = \sum_{m \in M} c_m e^{imx}, \quad c_{-m} = \bar{c}_m$$

$\big($якщо $M = \varnothing$, то $T(M) \equiv 0\big)$. Якщо ж $M = \{-(n-1),\ldots,-1,0,1,\ldots,n-1\}$, то $T(M) = T_{2n-1}$.

Нехай задано ядро K і множину $F \subset L_1$. Через $K * F$ позначимо клас функцій вигляду

$$f(x) = T + (K * \varphi)(x), \qquad T \in T(M(K)), \quad \varphi \in F, \quad \varphi \perp T(M(K)). \tag{3}$$

У подальшому ми розглядаємо задачі наближення для класів типу $K * F$, частинними випадками яких є різні важливі для теорії наближень класи функцій. Для ядра K покладемо $\mu = \mu(K) = 0$, якщо $0 \notin M(K)$, і $\mu = \mu(K) = 1$, якщо $0 \in M(K)$.

Наведемо приклади конкретних ядер і функціональних класів.

Нехай

$$B_r(x) = \pi^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-r} \cos(mx - \pi r/2), \quad r = 1,2,\ldots,$$

— ядра Бернуллі.

Якщо $F \subset L_1$, то $B_r * F = W^r F$ — клас функцій, що мають локально абсолютно неперервну похідну $f^{(r-1)}$ ($f^{(r-1)} \in AC_{\mathrm{loc}}$) і такі, що $f^{(r)} \in F$. Зазначимо, що якщо

$$F = W_p^0 = \big\{ f \in L_p \colon \|f\|_p \le 1 \big\},$$

то $B_r * F = W_p^r$ — стандартний для теорії наближень клас Соболєва.

Неперервне на $(0, 2\pi)$ і таке, що не є тригонометричним поліномом, ядро K будемо називати CVD-ядром (і писати $K \in CVD$), якщо $\nu(a\mu + K * \varphi) \le \nu(\varphi)$ $\forall \varphi \in C$, $\varphi \perp \mu$, $a \in \mathbb{R}$ (тут і скрізь нижче $\nu(g)$ — число змін знака на періоді 2π-періодичної функції g). Очевидно, що $B_r \in CVD$. Ряд питань теорії CVD-ядер викладено у [7, 15].

Нехай $\Delta \in (0, 2\pi]$. Якщо для будь-яких $\varphi \in C$, $\varphi \perp T(M)$ і $T \in T(M)$ таких, що $T + K * \varphi$ має нулі в кожному інтервалі довжини Δ, виконується нерівність $\nu(T + K * \varphi) \le \nu(\varphi)$, то ядро K будемо називати $CVD[\Delta]$-ядром і писати $K \in CVD[\Delta]$. Зауважимо, що якщо $K \in CVD$, то $K \in CVD[\Delta]$ для будь-якого $\Delta \in (0, 2\pi]$.

Нехай $\mathcal{P}_r$ — алгебраїчний поліном степеня $r = 1, 2, \ldots$ з дійсними коефіцієнтами. Покладемо

$$B(\mathcal{P}_r; x) = (2\pi)^{-1} {\sum_{m=-\infty}^{\infty}}' e^{imx} / \mathcal{P}_r(im)$$

$\Big($підсумовування в $\sum'$ ведеться по таких m, для яких $\mathcal{P}_r(im) \neq 0\Big)$.

Якщо $F \subset L_1$, то

$$B(\mathcal{P}_r; \cdot) * F = W(\mathcal{P}_r; F)$$

— клас функцій $f \in C$ таких, що $f^{(r-1)} \in AC_{\mathrm{loc}}$ і $\mathcal{P}_r(d/dx) f \in F$. Якщо всі корені $\mathcal{P}_r$ дійсні, то $B(\mathcal{P}_r; \cdot) \in CVD$. Якщо це не так, то знайдеться $\Delta \in (0, 2\pi]$, для якого $B(\mathcal{P}_r; \cdot) \in CVD[\Delta]$.

Ядра $(h > 0)$

$$A_h(x) = (2\pi)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imx} / ch(mh),$$

$$G_h(x) = (2\pi)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imx - m^2 h}$$

є δ-видними (при $h \to 0$) CVD-ядрами.

Позначимо через $S_{2n,r}^1$, $n, r \in \mathbb{N}$, простори 2π-періодичних поліноміальних сплайнів порядку r дефекту 1 із вузлами $j\pi/n$, $j \in \mathbb{Z}$, через $S_{2n,r}^2$, $n, r \in \mathbb{N}$, простори 2π-періодичних поліноміальних сплайнів порядку r дефекту 2 з вузлами $t_j = 2j\pi/n$, $j \in \mathbb{Z}$, і, нарешті, для $h \in \left(0, \dfrac{2\pi}{n}\right)$ через $S_{2n,r}^1(h)$ простори 2π-періодичних поліноміальних сплайнів порядку r дефекту 1 з вузлами $\dfrac{2j\pi}{n}$ і $\dfrac{2j\pi}{n} + h$, $j \in Z$.

Для невід'ємної функції $f \in L_1$ через $r(f, t)$ позначимо незростаючу перестановку (див. [8, с. 130]) звуження f на $[0, 2\pi]$. Для довільної функції g із L_1 покладемо (див. [10, с. 99])

$$\Pi(g, t) := r(g_+, t) - r(g_-, 2\pi - t).$$

Множину $F \subset L_1$ назвемо Π-інваріантною, якщо з $f \in F$ і $\Pi(g) = \Pi(f)$ випливає, що $g \in F$.

Зазначимо, що Π-інваріантною є одинична куля в довільному вкладеному в L_1 симетричному просторі 2π-періодичних функцій [12], зокрема у просторах L_p, $1 \le p \le \infty$, та Орліча [11], а також інші важливі множини (див., наприклад, [2]).

Нехай $\varphi_{\lambda,m}(\alpha,\beta;t)$, $\alpha,\beta>0$, $\lambda>0$, $m\in\mathbb{N}$, — $2\pi/\lambda$-періодичний інтеграл порядку m з нульовим середнім значенням на періоді від парної $2\pi/\lambda$-періодичної функції $\varphi_{\lambda,0}(\alpha,\beta;t)$, яка для $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{\lambda}\right)$ визначається так:

$$\varphi_{\lambda,0}(\alpha,\beta;t)=\begin{cases}\alpha, & 0\le t\le \dfrac{\pi\beta}{\lambda(\alpha+\beta)},\\ -\beta, & \dfrac{\pi\beta}{\lambda(\alpha+\beta)}<t\le\dfrac{\pi}{\lambda}.\end{cases}$$

Для $\alpha=\beta=1$ замість $\varphi_{\lambda,m}(\alpha,\beta;t)$ будемо писати $\varphi_{\lambda,m}(t)$. У випадку $\max\{\alpha,\beta\}=\infty$ покладаємо

$$\big(K*\varphi_{n,0}(1,\infty)\big)(x)=\int\limits_0^{2\pi}K(t)\,dt-\frac{2\pi}{n}\sum_{m=0}^{n-1}K(x-2m\pi/n).$$

Зрозуміло, що при $\beta\to\infty$

$$\big\|K*\varphi_{n,0}(1,\beta)_\pm\big\|_\infty\to\big\|K*\varphi_{n,0}(1,\infty)_\pm\big\|_\infty.$$

2. Деякі відомі результати. Нехай $n,r\in\mathbb{N}$, $m\in M\cup\{0\}$, $1\le p\le\infty$, H є T_{2n-1}, $S^1_{2n,m}$, $m\ge r-1$, $S^2_{2n,m}$, $m\ge r$, або $S^1_{2n,m}(h)$, $m\ge r$, $0<h<\dfrac{2\pi}{n}$. Тоді

$$E(W^r_p,H)_1=\|\varphi_{n,r}\|_{p'},\tag{4}$$

$$d_{2n-1}(W^r_p,L_1)=d_{2n}(W^r_p,L_1)=\|\varphi_{n,r}\|_{p'},\tag{5}$$

і, отже, підпростори T_{2n-1} є екстремальними для поперечників $d_{2n-1}(W^r_p,L_1)$ і $d_{2n}(W^r_p,L_1)$, а підпростори $S^1_{2n,m}$, $m\ge r-1$, $S^2_{2n,m}$, $m\ge r$, $S^1_{2n,m}(h)$, $m\ge r$, $0<h<\dfrac{2\pi}{n}$, — для поперечників $d_{2n}(W^r_p,L_1)$.

Для $H=T_{2n-1}$ рівність (4) при $p=1$ отримав С. М. Нікольський [19], для $p>1$ — Л. В. Тайков [20], при $p=\infty$ незалежно та іншим методом — С. П. Туровець [25]. Для $H=S^1_{2n,m}$, $m\ge r-1$, рівність (4) одержав А. А. Лігун [13], а для $H=S^2_{2n,m}$, $m\ge r$, і $S^1_{2n,m}(h)$, $m\ge r$, $0<h<\dfrac{2\pi}{n}$, її одержали В. Ф. Бабенко і Н. В. Парфінович [5, 6].

Оцінку знизу для непарних поперечників при $p=1$ встановили незалежно Ю. І. Маковоз [16] і Ю. М. Субботін [23, 24], а при $p=\infty$ — Ю. І. Маковоз [17]. Оцінка знизу для парних поперечників при $p=1,\infty$ належить В. І. Рубану (див., наприклад, [8], розд. 10). Для $1<p<\infty$ співвідношення (5) незалежно і різними методами отримали А. О Лігун [14], Ю. І. Маковоз [18] та А. Пінкус [21].

Подальші дослідження в цьому напрямку полягають у наступному. Нехай $n=1,2,\ldots$, $r=0,1,\ldots$, $\Delta\in(0,2\pi]$, $\alpha,\beta\in(0,\infty]$. Нехай також K є $CVD[\Delta]$-ядром, F — переставно інваріантною підмножиною в L_1 і H є T_{2n-1} або $K*S^1_{2n,r}$. Тоді якщо $n\ge\dfrac{2\pi}{\Delta}$ настільки велике, що $H\supset T\big(M(K)\big)$, то

$$E(K*F,H)_{1;\alpha,\beta}=\sup_{\substack{\varphi\in F\\ \varphi\perp\mu}}\int\limits_0^{2\pi}\Pi(\varphi,t)\Pi\big(K(-\cdot)*\varphi_{n,0}(\alpha,\beta;\cdot);t\big)\,dt.\tag{6}$$

Зокрема, якщо $K \in CVD$, то рівність (6) є правильною при всіх n.

Для $K \in CVD$ справджується також рівність

$$d_{2n-1}(K * F, L_1) = d_{2n}(K * F, L_1) = \sup_{\substack{\varphi \in F \\ \varphi \perp \mu}} \int_0^{2\pi} \Pi(\varphi, t)\Pi\big(K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(t)\big)\, dt. \tag{7}$$

При цьому простори T_{2n-1} є екстремальними для поперечників $d_{2n-1}(K * F, L_1)$ і $d_{2n}(K * * F, L_1)$, а простори $K * S^1_{2n,r}$, $r = 0, 1, \ldots,$ — для поперечників $d_{2n}(K * F, L_1)$.

У випадку $F = W^0_p$ результат (7) належить А. Пінкусу [22], а у випадку довільної Π-інваріантної множини F — В. Ф. Бабенку [4].

3. Основні результати. У даній роботі ми розглядаємо наближення класів $K * F$ узагальненими сплайнами $K * S^1_{2n,r}(h)$, $0 < h < \dfrac{2\pi}{n}$, $r \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Нехай $n, r \in \mathbb{N}$, $h \in (0, 2\pi/n)$, $\Delta \in (0, 2\pi]$, $\alpha, \beta \in (0; \infty]$. Нехай також $K \in CVD[\Delta]$, F — Π-інваріантна підмножина в L_1. Тоді якщо $n \geq 2\pi/\Delta$ настільки велике, що $K * S^1_{2n,r}(h) \supset T(M(K))$, то*

$$E\big(K * F; K * S^1_{2n,r}(h)\big)_{1;\alpha,\beta} = \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp \mu}} \int_0^{2\pi} \Pi(K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(\alpha, \beta; t)\Pi(f; t)\, dt. \tag{8}$$

Зокрема, якщо $K \in CVD$, то рівність (8) *справджується для всіх n.*

Зіставляючи рівності (7) і (8) при $K \in CVD$, $\alpha = \beta = 1$, бачимо, що підпростори $K * S^1_{2n,r}(h)$ є екстремальними для поперечників $d_{2n}(K * F, L_1)$.

4. Допоміжні результати. Далі покладаємо $t_j = \dfrac{2\pi\left[\dfrac{j}{2}\right]}{n} + \big(1 - (-1)^j\big)\dfrac{h}{2}$, $j \in \mathbb{Z}$.

Лема 1. *Нехай $r, n \in \mathbb{N}$, $K \in L_1$, $g \in L_1$, $h \in (0, \dfrac{2\pi}{n})$, $g \perp K * S^1_{2n,r}(h)$. Тоді*:

1) *$g \perp T(M(K) \cup \{0\})$ і, зокрема, $(B_k * K(-\cdot) * g)^{(k)} = K(-\cdot) * g$ для всіх $k = 1, 2, \ldots;$*
2) *існує поліном $T_g \in T(M(K) \cup \{0\})$ такий, що для $j = 1, 2, \ldots, 2n$*

$$\big(B_{r+1} * K(-\cdot) * g(t_j)\big) - T_g(t_j) = 0.$$

Ця лема пояснює зміст ортогональності підпростору $K * S^1_{2n,r}(h)$ і узагальнює відоме [10] (лема 9.2.1) твердження про функції, ортогональні $S^1_{2n,r}$. Доведення леми аналогічне доведенню результата В. Ф. Бабенка для підпросторів $K * S^1_{2n,r}$ [3] (див. також [4]).

Лема 2. *Нехай $\Delta \in (0; 2\pi]$, $n, r \in \mathbb{N}$, $n \geq \dfrac{2\pi}{\Delta}$, $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, $K \in CVD[\Delta]$. Тоді для $\dfrac{2\pi}{n}$-періодичної функції $B_{r+1} * K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(\alpha, \beta; \cdot)$ існують числа $a < b < a + \dfrac{2\pi}{n}$ такі, що на інтервалах (a, b) і $\left(b, a + \dfrac{2\pi}{n}\right)$ вона є строго монотонною.*

Лему доведено в [4].

Теорема 2. *Нехай $n, r \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in (0, +\infty]$, $\Delta \in (0, 2\pi]$, $h \in \left(0, \dfrac{2\pi}{n}\right)$. Нехай також $K \in CVD[\Delta]$, $g \perp K * S^1_{2n,r}(h)$ і $\|g\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \leq 1$. Тоді якщо $n \geq \dfrac{2\pi}{\Delta}$ настільки велике, що $T(M) \subset K * S^1_{2n,r}(h)$, то знайдеться поліном $T \in (T(M) \cup \{0\})$ такий, що*

$$\left\|(B_{r-k+1}*K(-\cdot)*g-T^{(k)})_\pm\right\|_\infty\le$$

$$\le\left\|(B_{r-k+1}*K(-\cdot)*\varphi_{n,0}(\alpha,\beta;\cdot))_\pm\right\|_\infty,\quad k=1,\ldots,r, \tag{9}$$

$$\left\|(K(-\cdot)*g-T)_\pm\right\|_\infty\le\left\|(K(-\cdot)*\varphi_{n,0}(\alpha,\beta;\cdot))_\pm\right\|_\infty. \tag{10}$$

Доведення. Нехай $\widetilde{\varphi}(t)=B_{r+1}*K(-\cdot)*\varphi_{n,0}(\alpha,\beta;t+\mu)+\eta$, де μ і η вибрано так, щоб $\widetilde{\varphi}(t_j)=0,\ j\in\mathbb{Z}$. Припустимо спочатку, що $\alpha,\beta<\infty$. Покажемо, що для всіх $t\in\mathbb{R}$

$$\left|(B_{r+1}*K(-\cdot)*g)(t)-T_g(t)\right|\le\left|\widetilde{\varphi}(t)\right|, \tag{11}$$

де T_g — поліном із леми 1.

Припустимо, що $\widetilde{\varphi}(t)>0$ для $t\in(t_j,t_{j+1})$ і в цьому інтервалі не виконується нерівність

$$(B_{r+1}*K(-\cdot)*g)(t)-T_g(t)\le\widetilde{\varphi}(t)$$

(решта випадків розглядаються аналогічно).

Нехай $t^*\in(t_j,t_{j+1})$ таке, що $(B_{r+1}*K(-\cdot)*g-T_g)(t^*)>\widetilde{\varphi}(t^*)$. Виберемо $0<\lambda<1$ так, щоб $\lambda(B_{r+1}*K(-\cdot)*g-T_g)(t^*)=\widetilde{\varphi}(t^*)$. Тоді різниця

$$\delta(t)=\lambda(B_{r+1}*K(-\cdot)*g-T_g)(t)-\widetilde{\varphi}(t)$$

дорівнює нулю в точці t^*, і, оскільки $\delta(t_j)=0,\ j\in\mathbb{Z}$, то $\delta(t)$ має на періоді більше $2n$ нулів і нуль в кожному інтервалі довжини Δ. Для будь-якого тригонометричного полінома T різницю $\delta(t)-T$ можна записати у вигляді

$$\delta(t)-T=\eta-\lambda T_g(t)-T_1+B_{r+1}*K(-\cdot)[\lambda g-\varphi_{n,0}(\alpha,\beta;\cdot+\mu)-T_2](t),$$

де $T_1\in T(M(K)\cup\{0\})$ і $T_2\perp T\big(M(K)\cup\{0\}\big)$ такі, що

$$\lambda g-\varphi_{n,0}(\alpha,\beta;\cdot)\perp T(M(K)\cup\{0\})$$

і, крім того, $-\beta\lambda<g(t)<\alpha\lambda$ для всіх t.

Поліном T можна, очевидно, вибрати так, щоб $\nu(\delta(t)-T)>2n,\ \delta(t)-T$ мала в кожному інтервалі довжини Δ зміну знака і для всіх t виконувалось

$$-\beta\lambda_1<\lambda g(t)-T_2(x)<\alpha\lambda_1,\quad \lambda<\lambda_1<1.$$

Нехай $\delta_h(t)$ — функція Стєклова з кроком h функції f, тоді

$$\delta_h(t)=(\eta-\lambda T_g-T_1)_h(t)+B_{r+1}*K(-\cdot)(\lambda g-\varphi_{n,0}(\alpha,\beta;\cdot+\mu)-T_2)_h(t).$$

Якщо h достатньо мале, то $\delta_h(t)$ має більше $2n$ змін знака на періоді і змінює знак у кожному проміжку довжини Δ. При цьому $\big(\eta-\lambda T_g-T_1\big)_h\in T\big(M(K)\cup\{0\}\big),\ (\lambda g-\varphi_{n,0}(\alpha,\beta;\cdot+\mu)-$ $-T_2)_h\perp T(M(K)\cup\{0\}),\ \nu\big((\lambda g-\varphi_{n,0}(\alpha,\beta;\cdot+\mu)-T_2)_h\big)=2n$, і ми отримали суперечність з тим, що $B_{r+1}*K(-\cdot)\in CVD[\Delta]$.

Нехай далі $\widetilde{g}(t)=(B_{r+1}*K(-\cdot)*g-T_g)(t)$. Припустимо, що $\widetilde{\varphi}(t)<0$ для $t\in(t_{2i},t_{2i+1})$, $i\in\mathbb{Z}$. Нехай $t_{\max}\in(0,2\pi)$ і $t_{\min}\in(0,2\pi)$ такі, що $\widetilde{g}'(t_{\max})=\|\widetilde{g}'_+\|_\infty$ і $\widetilde{g}'(t_{\min})=-\|\widetilde{g}'_-\|_\infty$, а $i\in\mathbb{Z}$ вибрано з умови $t_{\max}\in(t_{2i},t_{2i+2})$.

Припустивши, що $\widetilde{g}'(t_{\max}) > \|\widetilde{\varphi}'_+\|_\infty$, ми можемо вказати таке $0 < \lambda < 1$, що

$$\lambda \widetilde{g}'(t_{\max}) = \|\widetilde{\varphi}'_+\|_\infty = \widetilde{\varphi}'(t^1_{\max}).$$

Тут через $t^1_{\max} < t^1_{\min}$ позначено точки з проміжку $[t_{2i}, t_{2i+2}]$, в яких функція $\widetilde{\varphi}'(t)$ набуває відповідно максимального і мінімального значень. Зрозуміло, що $t^1_{\max}$ і $t^1_{\min}$ належать проміжку (t_{2i+1}, t_{2i+2}).

Покажемо, що $t_{\max} \in (t^1_{\max}, t^1_{\min})$. Припустимо, що $t_{\max} \leq t^1_{\max}$ (випадок $t_{\max} \geq t^1_{\min}$ розглядається аналогічно). Зазначимо, що при $0 < \lambda_1 < \lambda$ для функцій $\lambda_1 \widetilde{g}'(t)$ і $\widetilde{\varphi}'(t)$ виконуються умови теореми 6.1 із [3], до того ж $\lambda_1 \widetilde{g}'(t) \neq \widetilde{\varphi}'(t)$ майже скрізь.

Позначимо через t^1 найближчий зліва до $t_{\max}$ нуль функції $\widetilde{g}'(t)$, тоді за допомогою наслідку 6.1 із [3], спрямовуючи λ_1 до λ, неважко переконатись у тому, що

$$t_{\max} - t^1 > t^1_{\max} - t^1_0,$$

де t^1_0 — найближчий зліва до $t^1_{\max}$ нуль функції $\widetilde{\varphi}'(t)$.

Отже,

$$t^1 < t_{\max} - t^1_{\max} + t^1_0 \leq t^1_0$$

і, крім того, $\lambda \widetilde{g}'(t) > \widetilde{\varphi}'(t)$ $\forall t \in (t_{2i}, t_{2i+1})$. Тоді

$$\int\limits_{t^1}^{t_{2i+1}} \lambda \widetilde{g}'(t)\, dt > \int\limits_{t^1_0}^{t_{2i+1}} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt$$

і

$$\left| \int\limits_{t^1}^{t_{2i+1}} \lambda \widetilde{g}'(t)\, dt \right| < \left| \int\limits_{t_{2i}}^{t^1_0} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt \right| = \int\limits_{t^1_0}^{t_{2i+1}} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt,$$

що суперечить тому факту, що $\displaystyle\int_{t^1}^{t_{2i+1}} \lambda \widetilde{g}'(t)\, dt = 0.$

Покажемо, що функція $\lambda \widetilde{g}'(t)$ має нуль у проміжку $(t_{2i+1}, t_{\max})$.

Припускаючи супротивне, аналогічно попередньому, встановлюємо, що

$$t_{\max} - t_{2i+1} > t^1_{\max} - t_{2i+1},$$
$$t^2 - t_{\max} > t^2_0 - t^1_{\max},$$

де t^2 — найближчий справа до $t_{\max}$ нуль функції $\lambda \widetilde{g}'(t)$, до того ж $t^2 \in (t_{\max}, t_{2i+2})$, а t^2_0 — найближчий справа до $t^1_{\max}$ нуль функції $\widetilde{\varphi}'(t)$. Крім того,

$$\int\limits_{t_{2i+1}}^{t_{\max}} \lambda \widetilde{g}'(t)\, dt > \int\limits_{t_{2i+1}}^{t^1_{\max}} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt$$

і

$$\int\limits_{t_{\max}}^{t^2} \lambda \widetilde{g}'(t)\, dt > \int\limits_{t^1_{\max}}^{t^2_0} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt.$$

Враховуючи ще той факт, що $\widetilde{g}(t_{2i+1}) = \widetilde{\varphi}(t_{2i+1}) = 0$, отримуємо

$$\lambda\widetilde{g}(t^2) = \int\limits_{t_{2i+1}}^{t^2} \lambda\widetilde{g}'(t)\,dt = \int\limits_{t_{2i+1}}^{t_{\max}} \lambda\widetilde{g}'(t)\,dt + \int\limits_{t_{\max}}^{t^2} \lambda\widetilde{g}'(t)\,dt >$$

$$> \int\limits_{t_{2i+1}}^{t^1_{\max}} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt + \int\limits_{t^1_{\max}}^{t^2_0} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt = \int\limits_{t_{2i+1}}^{t^2_0} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt = \widetilde{\varphi}(t^2_0) = \|\widetilde{\varphi}_+\|_\infty.$$

Отже, $\lambda\widetilde{g}(t^2) > \|\widetilde{\varphi}_+\|_\infty$, що неможливо у проміжку $(t_{\max}, t_{2i+2})$, і ми отримали суперечність з (11). Таким чином, ми встановили, що $t_{\max} \in (t^1_{\max}, t^1_{\min})$, $t^1 \in (t_{2i+1}, t_{\max})$, $t_{\max} - t^1 > t^1_{\max} - t^1_0$ і $t^2 - t_{\max} > t^2_0 - t^1_{\max}$.

Отже,

$$t^2 - t^1 > t^2_0 - t^1_0, \tag{12}$$

і, враховуючи наслідок 6.1 [3], маємо

$$\int\limits_{t^1}^{t^2} \lambda\widetilde{g}'(t)\,dt > \int\limits_{t^1_0}^{t^2_0} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt.$$

Але тоді, з урахуванням умов $\int_{t_{2i+1}}^{t_{2i+3}} \lambda\widetilde{g}'(t)\,dt = 0$ і $\int_{t_{2i+1}}^{t_{2i+3}} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt = 0$, повинна виконуватись також нерівність

$$\left| \int\limits_{(t_{2i+1}, t_{2i+3}) \setminus (t^1, t^2)} \right| > \int\limits_{t^1_0}^{t^2_0} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt. \tag{13}$$

Нехай (a_k, b_k) — складові інтервали множини

$$\{t \in (t_{2i+1}, t_{2i+3}) : \widetilde{g}'(t) < 0\}.$$

Тоді на підставі (12)

$$\sum_k (b_k - a_k) \leq t_{2i+3} - t_{2i+1} - (t^2 - t^1) \leq$$

$$\leq t_{2i+3} - t_{2i+1} - (t^2_0 - t^1_0) = \operatorname{mes} \operatorname{supp} \widetilde{\varphi}'_- \big|_{(t_{2i+1}, t_{2i+3})}.$$

Нехай також при кожному k число $\gamma_k \geq 0$ таке, що $(a_k + \gamma_k, b_k + \gamma_k) \subset \operatorname{supp} \widetilde{\varphi}'_- \big|_{(t_{2i+1}, t_{2i+3})}(t)$. Використовуючи наслідок 6.1 із [3], переконуємося в тому, що

$$\left| \int\limits_{a_k+\gamma_k}^{b_k+\gamma_k} \lambda\widetilde{g}'(t - \gamma_k)\,dt \right| \leq \left| \int\limits_{a_k+\gamma_k}^{b_k+\gamma_k} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt \right|.$$

Зрозуміло, що числа γ_k можна вибрати так, щоб інтервали $(a_k + \gamma_k, b_k + \gamma_k)$ попарно не перетинались. Тоді будемо мати

$$\left|\int\limits_{(t_{2i+1},t_{2i+3})\setminus(t^1,t^2)}\lambda\widetilde{g}'(t)\,dt\right| = \left|\sum_k\int\limits_{a_k}^{b_k}\lambda\widetilde{g}'(t)\,dt\right| = \sum_k\left|\int\limits_{a_k+\gamma_k}^{b_k+\gamma_k}\lambda\widetilde{g}'(t-\gamma_k)\,dt\right| \le$$

$$\le\sum_k\left|\int\limits_{a_k+\gamma_k}^{b_k+\gamma_k}\widetilde{\varphi}'_-(t)\,dt\right| = \left|\sum_k\int\limits_{a_k+\gamma_k}^{b_k+\gamma_k}\widetilde{\varphi}'_-(t)\,dt\right| \le \int\limits_{t_0^1}^{t_0^2}\widetilde{\varphi}'(t)\,dt.$$

Отже,

$$\left|\int\limits_{(t_{2i+1},t_{2i+3})\setminus(t^1,t^2)}\lambda\widetilde{g}'(t)\,dt\right| \le \int\limits_{t_0^1}^{t_0^2}\widetilde{\varphi}'(t)\,dt,$$

що суперечить (13).

Таким чином, доведено нерівність

$$\left\|(B_r*K(-\cdot)*g-T'_g)_+\right\|_\infty \le \left\|(B_r*K(-\cdot)*\varphi_{n,0}(\alpha,\beta;\cdot))_+\right\|_\infty.$$

Нерівність

$$\left\|(B_r*K(-\cdot)*g-T'_g)_-\right\|_\infty \le \left\|(B_r*K(-\cdot)*\varphi_{n,0}(\alpha,\beta;\cdot))_-\right\|_\infty$$

доводиться аналогічно. Отже, маємо

$$\left\|(B_r*K(-\cdot)*g-T'_g)_\pm\right\|_\infty \le \left\|(B_r*K(-\cdot)*\varphi_{n,0}(\alpha,\beta;\cdot))_\pm\right\|_\infty. \tag{14}$$

Враховуючи (14) і лему 2, неважко перевірити, що для будь-якого $\lambda\in(0;1)$ функції B_r* $*\,K(-\cdot)*\varphi_{n,0}(\alpha,\beta;\cdot)$ і $\lambda(B_r*K(-\cdot)*g-T'_g)$ задовольняють умови теореми 6.1 із [3], з якої випливає, що

$$\left\|\lambda(B_{r-1}*K(-\cdot)*g-T''_g)_\pm\right\|_\infty \le \left\|(B_{r-1}*K(-\cdot)*\varphi_{n,0}(\alpha,\beta;\cdot))_\pm\right\|_\infty.$$

Спрямовуючи λ до 1, з останньої нерівності отримуємо

$$\left\|(B_{r-1}*K(-\cdot)*g-T''_g)_\pm\right\|_\infty \le \left\|(B_{r-1}*K(-\cdot)*\varphi_{n,0}(\alpha,\beta;\cdot))_\pm\right\|_\infty.$$

Повторюючи ці міркування необхідну кількість разів, доводимо нерівності (9) і (10) у випадку $\alpha,\beta<\infty$.

Нехай тепер $\max\{\alpha,\beta\}=\beta=\infty$. Якщо $g\in L_\infty$ така, що $\|g\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}\le 1$, то знайдеться таке $\beta_0\in\mathbb{R}$, що $-\beta_0\le g\le\alpha$. Якщо $g\perp K*S^1_{2n,r}(h)$, то за вже доведеним

$$\left\|(B_{r-k+1}*K(-\cdot)*g-T^{(k)})_\pm\right\|_\infty \le \left\|(B_{r-k+1}*K(-\cdot)*\varphi_{n,0}(\alpha,\beta_0;\cdot))_\pm\right\|_\infty, \quad k=1,\dots,r+1.$$

Зазначимо тепер, що

$$\left\|(B_{r-k+1}*K(-\cdot)*\varphi_{n,0}(\alpha,\beta_0;\cdot))_\pm\right\|_\infty \le \left\|(B_{r-k+1}*K(-\cdot)*\varphi_{n,0}(\alpha,\infty;\cdot))_\pm\right\|_\infty.$$

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Нехай* $n, r, \Delta, \alpha, \beta, K, h$ *такі, як у теоремі* 2, *і* $\|g\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1$, $g \perp K * S^1_{2n,r}(h)$. *Тоді знайдеться поліном* $T_g \in T(M(K) \setminus \{0\})$ *такий, що для довільного* $x \in [0, 2\pi]$

$$\int\limits_0^x r((K(-\cdot) * g - T_g - \lambda)_\pm; t)\, dt \le \int\limits_0^x r((K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(\alpha, \beta; \cdot) - \lambda)_\pm; t)\, dt.$$

Уперше твердження такого типу при $\alpha = \beta$, $h = \pi/n$ і $K = B_r$ з'явились у роботах М. П. Корнєйчука (див. [8], теорема 6.8.1), а потім у роботах М. П. Корнєйчука і А. О. Лігуна (див., наприклад, [9]). Випадок $K = B_r$, $h = \pi/n$, $\max(\alpha, \beta) = \infty$ було розглянуто В. Г. Дороніним і А. О. Лігуном [10] (теорема 5.5.2). У випадку $K \in CVD[\Delta]$, $\alpha, \beta \in (0, \infty]$, $h = \pi/n$ теорему 3 довів В. Ф. Бабенко [3].

Доведення теореми **3.** Будемо використовувати методи з [3]. За допомогою теореми 2 неважко встановити, що при всіх $\varepsilon \in (0; 1)$ і всіх достатньо малих $h > 0$ функції $A_h * K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(\alpha, \beta; \cdot)$ і $\varepsilon A_h * K(-\cdot) * g - \varepsilon A_h * T_g'$ (T_g — поліном, який в лемі 2 відповідає функції g і ядру K) задовольняють умови теореми 6.2 із [3], отже, для довільного λ і $x \in [0, 2\pi]$

$$\int\limits_0^x r\big((\varepsilon A_h * K(-\cdot) * g - \varepsilon A_h * T_g' - \lambda)_\pm; t\big)\, dt \le$$

$$\le \int\limits_0^x r\big((A_h * K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(\alpha, \beta; \cdot) - \lambda)_\pm; t\big)\, dt.$$

Спрямовуючи спочатку h до нуля, а потім ε до одиниці, переконуємося у справедливості теореми.

5. Доведення теореми 1. На підставі теореми 2.1 [3] можемо записати

$$E = E\big(K * F, K * S^1_{2n,m}(h)\big)_1 = \sup_{f \in K * F} \sup_{\substack{\|g\|_{\infty;\alpha^{-1}\beta^{-1}} \le 1 \\ g \perp K * S^1_{2n,m}(h)}} \int\limits_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx =$$

$$= \sup_{\substack{\varphi \in F \\ \varphi \perp \mu}} \sup_{\substack{\|g\|_{\infty;\alpha^{-1}\beta^{-1}} \le 1 \\ g \perp K * S^1_{2n,m}(h)}} \int\limits_0^{2\pi} (K * \varphi + T) g(x)\, dx =$$

$$= \sup_{\substack{\varphi \in F \\ \varphi \perp \mu}} \sup_{\substack{\|g\|_{\infty;\alpha^{-1}\beta^{-1}} \le 1 \\ g \perp K * S^1_{2n,m}(h)}} \int\limits_0^{2\pi} (K(-\cdot) * g - T_g)(t) \varphi(t)\, dt,$$

де T_g — поліном із теореми 3.

Далі, з огляду на пропозиції 8.1, 8.2 [3] і теорему 3 отримуємо

$$E = \sup_{\substack{\varphi \in F \\ \varphi \perp \mu}} \sup_{\substack{\|g\|_{\infty;\alpha^{-1}\beta^{-1}} \le 1 \\ g \perp K * S^1_{2n,m}(h)}} \int\limits_0^{2\pi} \Pi(\varphi; t) \Pi(K(-\cdot) * g - T_g; t)\, dt \le$$

$$\le \sup_{\substack{\varphi \in F \\ \varphi \perp \mu}} \int\limits_0^{2\pi} \Pi(\varphi; t) \Pi(K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(\alpha, \beta); t)\, dt.$$

Непокращуваність цієї нерівності випливає з пропозиції 8.1 [3] і $\dfrac{2\pi}{n}$-періодичності функції $K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(\alpha, \beta; \cdot)$.

Література

1. *Бабенко В. Ф.* Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 11. – С. 409 – 416.
2. *Бабенко В. Ф.* Неравенства для перестановок дифференцируемых периодических функций, задачи приближения и приближенного интегрирования // Докл. АН СССР. – 1983. – **272**, № 5. – С. 1038 – 1041.
3. *Бабенко В. Ф.* Приближение классов сверток // Сиб. мат. журн. – 1987. – **28**, № 5. – С. 6 – 21.
4. *Бабенко В. Ф.* Экстремальные задачи теории приближения и несимметричные нормы: Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – Днепропетровск, 1987. – 275 с.
5. *Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В.* Точные значения наилучших приближений классов периодических функций сплайнами дефекта 2 // Мат. заметки. – 2009. – **85**, № 4. – С. 538 – 551.
6. *Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В.* О точных значениях наилучших приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами // Мат. заметки. – 2010. – **87**, № 5. – С. 669 – 683.
7. *Karlin S.* Total positivity. – Stanford, Calif.: Stanford Univ. Press., 1968. – Vol. I. – 576 p.
8. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
9. *Korneichuk N. P., Ligun A. A.* On approximation of a class by another class and extremal subspaces in L_1 // Anal. Math. – 1981. – **7**, № 2. – P. 107 – 119.
10. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1982. – 252 с.
11. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. – М.: Физматгиз, 1958. – 271 с.
12. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
13. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bounds of functions // Anal. Math. – 1976. – **2**, № 1. – P. 11 – 40.
14. *Лигун А. А.* О поперечниках некоторых классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. – 1980. – **27**, № 1. – С. 61 – 75.
15. *Mairhuber J. C., Schonberg I. J., Williamson R. E.* On variation diminishing transformations on the circle // Rend. Circ. math. Palermo. – 1959. – **8**, № 2. – P. 241 – 270.
16. *Маковоз Ю. И.* Поперечники некоторых функциональных классов в пространстве L // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. – 1969. – **4**. – С. 19 – 28.
17. *Маковоз Ю. И.* Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховых пространствах // Мат. сб. – 1972. – **87**, № 1. – С. 136 – 142.
18. *Маковоз Ю. И.* Поперечники соболевских классов и сплайны, наименее уклоняющиеся от нуля // Мат. заметки. – 1979. – **26**, № 5. – С. 805 – 812.
19. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207 – 256.
20. *Тайков Л. В.* О приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 61 – 70.
21. *Pinkus A.* On n-widths of periodic functions // J. Anal. Math. – 1979. – **35**. – P. 209 – 235.
22. *Pinkus A.* n-Width in approximation theory. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1985. – 294 p.
23. *Субботин Ю. Н.* Поперечник класса $W^r L$ в $L(0, 2\pi)$ и приближение сплайн-функциями // Мат. заметки. – 1970. – **7**, №1. – С. 43 – 52.
24. *Субботин Ю. Н.* Приближение сплайн-функциями и оценки поперечников // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1971. – **109**. – С. 35 – 60.
25. *Туровец С. П.* О наилучшем приближении в среднем дифференцируемых функций // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1968. – **5**. – С. 417 – 421.

Одержано 19.04.17