УДК 517.9

І. В. Самойленко, А. В. Нікітін (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗІ СТОХАСТИЧНО МАЛИМИ ДОДАТКАМИ В УМОВАХ АПРОКСИМАЦІЇ ЛЕВІ

The proposed methods enable us to study a model of stochastic evolution that includes Markov switchings and to identify the diffusion component and big jumps of perturbing process in the limiting equation. Big jumps of this type may describe rare catastrophic events in different applied problems. We consider the case where the perturbation of the system is determined by an impulse process in the nonclassical approximation scheme. Special attention is given to the asymptotic behavior of the generator of the analyzed evolutionary system.

Предлагаемые в работе методы позволяют изучать модель стохастической эволюции, содержащую марковские переключения, а также выделять в предельном уравнении диффузионную составляющую и большие скачки возмущающего процесса, которые в прикладных задачах могут описывать редкие катастрофические события. Рассмотрен случай, когда возмущение системы задается импульсным процессом в неклассической схеме аппроксимации. Особое внимание уделяется асимптотическому поведению генератора исследуемой эволюционной системы.

1. Вступ. Випадкова еволюція у вигляді диференціального рівняння зі стохастичними додатками використовується для опису широкого класу природних процесів у багатьох галузях науки. Винятково важливим випадком є дослідження поведінки подібних еволюційних систем у випадковому середовищі. Вивченню таких систем присвячено велику кількість робіт видатних учених, серед яких А. В. Скороход, М. Й. Гіхман, М. М. Боголюбов та ін. Детальну бібліографію з цієї проблематики можна знайти, наприклад, у монографіях В. С. Королюка [2, 3]. Особливу увагу варто звернути на роботу [5], в якій започатковано підходи, що використані в даній статті, зокрема і до дослідження стійкості еволюційної системи з дифузійним збуренням.

У даній роботі розглядається випадок, коли збурення системи визначаються імпульсним процесом у схемі апроксимації Леві (детальніше щодо схеми апроксимації див. [3, 4]). Насамперед нас цікавитиме питання асимптотичної поведінки генератора вказаної системи. Подібні проблеми розглядались раніше із застосуванням якісно інших методів (див. [6] та наведену в ній бібліографію). Зауважимо, що ефект виокремлення детермінованого зсуву зі збурюючого імпульсного процесу у граничному рівнянні, який отримано в даній статті, раніше спостерігався, наприклад, у розділі 5.1 монографії [6]. Натомість запропоновані в нашій роботі методи дозволяють дослідити складнішу модель, яка містить марковські перемикання, що відповідають випадковому середовищу, а також виділити у граничному рівнянні додатково дифузійну складову та великі стрибки збурюючого процесу, які у прикладних задачах можуть описувати рідкісні катастрофічні події.

Отримані результати дозволять продовжити дослідження в трьох напрямках:

1. Доведення граничних функціональних теорем, які описують поведінку системи на зростаючих інтервалах часу (див., наприклад, [3] та оглядову роботу щодо методів доведення граничних функціональних теорем у некласичних схемах апроксимації [4]).

2. Доведення дисипативності системи, що дозволить досліджувати питання щодо її стійкості, наявності атракторів тощо (див. монографію [6], в якій подібні задачі розглянуто для класичних схем апроксимації, а також [7, 8]).

3. Асимптотична поведінка нормованого керування з марковськими перемиканнями в схемі апроксимації Леві [9].

2. Постановка задачі. Розглянемо стохастичну еволюційну систему в ергодичному марковському середовищі, задану стохастичним диференціальним рівнянням

$$du^\varepsilon(t) = C\big(u^\varepsilon, x(t/\varepsilon^2)\big)dt + d\eta^\varepsilon(t), \quad u^\varepsilon(t) \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

де $x(t)$ — рівномірно ергодичний марковський процес у стандартному фазовому просторі $(X, \mathbf{X})$, визначений з допомогою генератора

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x) \int\limits_X P(x, dy)\big[\varphi(y) - \varphi(x)\big]$$

на банаховому просторі $B(X)$ дійснозначних обмежених функцій $\varphi(x)$ з супремум-нормою $\|\varphi\| = \sup_{x \in X} |\varphi(x)|$.

Стохастичне ядро $P(x, B),\ x \in X,\ B \in \mathbf{X}$, визначає рівномірно ергодичний вкладений ланцюг Маркова $x_n = x(\tau_n),\ n \geq 0$, зі стаціонарним розподілом $\rho(B),\ B \in \mathbf{X}$. Стаціонарний розподіл $\pi(B),\ B \in \mathbf{X}$, марковського процесу $x(t),\ t \geq 0$, можна визначити зі співвідношення

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), \qquad q = \int\limits_X \pi(dx)q(x).$$

Позначимо через R_0 потенціальний оператор для генератора $\mathbf{Q}$, який визначається рівністю [3]

$$R_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1},$$

де $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dy)\varphi(y)1(x)$ — проектор на підпростір $N_Q = \{\varphi\colon \mathbf{Q}\varphi = 0\}$ нулів оператора $\mathbf{Q}$.

3. Імпульсний процес збурень. Імпульсний процес збурень $\eta^\varepsilon(t),\ t \geq 0$, у схемі апроксимації Леві задається співвідношенням

$$\eta^\varepsilon(t) = \int\limits_0^t \eta^\varepsilon\big(ds, x(s/\varepsilon^2)\big), \tag{2}$$

де сукупність процесів із незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t, x),\ t \geq 0,\ x \in X$, визначається генераторами

$$\Gamma^\epsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2} \int\limits_R \big(\varphi(w + v) - \varphi(w)\big)\Gamma^\varepsilon(dv, x), \quad x \in X, \tag{3}$$

та задовольняє умови апроксимації Леві (детальніше див. [3, 4]):

L1. *Апроксимація середніх*:

$$\int\limits_R v\Gamma^\varepsilon(dv, x) = \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2\big(a_2(x) + \theta_a(x)\big), \qquad \theta_a(x) \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

та

$$\int\limits_R v^2\Gamma^\varepsilon(dv, x) = \varepsilon^2\big(b(x) + \theta_b(x)\big), \qquad \theta_b(x) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

L2. *Умова на функцію розподілу:*

$$\int\limits_R g(v)\Gamma^\varepsilon(dv,x) = \varepsilon^2\big(\Gamma_g(x) + \theta_g(x)\big), \qquad \theta_g(x) \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

для всіх $g(v) \in C_3(\mathbf{R})$ (простір дійснозначних обмежених функцій таких, що $g(v)/|v|^2 \to 0$, $|v| \to 0$). Тут міра $\Gamma_g(x)$ обмежена для всіх $g(v) \in C_3(\mathbf{R})$ і визначається співвідношенням (функції з простору $C_3(\mathbf{R})$ розділяють міри [1, с. 395])

$$\Gamma_g(x) = \int\limits_R g(v)\Gamma_0(dv,x), \quad g(v) \in C_3(\mathbf{R}).$$

L3. *Рівномірно квадратична інтегровність:*

$$\lim_{c\to\infty} \int\limits_{|v|>c} v^2\Gamma_0(dv,x) = 0.$$

***Приклад* 1.** Найпростішим прикладом випадкової величини, яка задовольняє умови апроксимації Леві, є випадкова величина α:

$$\mathrm{P}\{\alpha = b\} = \varepsilon^2 p,$$

$$\mathrm{P}\{\alpha = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2\} = 1 - \varepsilon^2 p.$$

Тоді для моментів цієї випадкової величини маємо

$$\mathbf{E}\alpha = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2(a_2 + bp) + o(\varepsilon^2),$$

$$\mathbf{E}\alpha^2 = \varepsilon^2(a_1^2 + b^2 p) + o(\varepsilon^2).$$

Нехай виконується умова балансу

$$\hat{a}_1 := \int\limits_X \pi(dx)a_1(x) = 0. \tag{4}$$

Розглянемо асимптотичні властивості процесу збурення.

Теорема 1. *При виконанні умови балансу* (4) *та умов* **L1 – L3** *гарантовано слабку збіжність у сенсі збіжності відповідних генераторів*

$$\eta^\varepsilon(t) \to \eta^0(t), \quad \varepsilon \to 0.$$

Граничний процес $\eta^0(t)$ визначається генератором

$$\Gamma\varphi(w) = \hat{a}_2\varphi'(w) + \frac{1}{2}\sigma^2\varphi''(w) + \int\limits_R \big[\varphi(w+v) - \varphi(w)\big]\hat{\Gamma}_0(dv),$$

де

$$\hat{a}_2 = \int\limits_X \pi(dx)(a_2(x) - a_0(x)), \qquad \sigma^2 = \int\limits_X \pi(dx)(b(x) - b_0(x)) + 2\int\limits_X \pi(dx)a_1(x)R_0a_1(x),$$

$$a_0(x) = \int\limits_R v\Gamma_0(dv, x), \qquad b_0(x) = \int\limits_R v^2\Gamma_0(dv, x), \qquad \hat{\Gamma}_0(v) = \int\limits_X \pi(dx)\Gamma_0(v, x),$$

і є процесом Леві, яки має три складові: детермінований зсув, дифузійну складову та пуассонівську стрибкову частину.

***Доведення теореми* 1.** Спочатку доведемо кілька лем.

Лема 1. *Генератори процесів із незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in X$, на тест-функціях $\varphi(w) \in C^3(\mathbf{R})$ при виконанні умов* **L1** – **L3** *допускають асимптотичне зображення*

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi(w) + \Gamma_2(x)\varphi(w), \tag{5}$$

де

$$\Gamma_1(x)\varphi(w) = a_1(x)\varphi'(w),$$

$$\Gamma_2(x)\varphi(w) = (a_2(x) - a_0(x))\varphi'(w) + \frac{1}{2}(b(x) - b_0(x))\varphi''(w) +$$

$$+ \int\limits_R \big[\varphi(w + v) - \varphi(w)\big]\Gamma_0(dv, x).$$

Доведення. Використавши розвинення функції $\varphi(w)$ у ряд Тейлора, виконаємо перетворення генератора (3):

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2} \int\limits_R (\varphi(w + v) - \varphi(w))\Gamma^\varepsilon(dv, x) =$$

$$= \varepsilon^{-2} \int\limits_R \left(\varphi(w + v) - \varphi(w) - v\varphi'(w) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w)\right)\Gamma^\varepsilon(dv, x) +$$

$$+\varepsilon^{-2} \int\limits_R v\varphi'(w)\Gamma^\varepsilon(dv, x) + \frac{1}{2}v^2\varepsilon^{-2} \int\limits_R v^2\varphi''(w)\Gamma^\varepsilon(dv, x) =$$

$$= \int\limits_R \left(\varphi(w + v) - \varphi(w) - v\varphi'(w) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w)\right)\Gamma_0(dv, x) +$$

$$+\varepsilon^{-1}a_1(x)\varphi'(w) + a_2(x)\varphi'(w) + \frac{1}{2}b(x)\varphi''(w) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w) =$$

$$= \varepsilon^{-1}a_1(x)\varphi'(w) + \big(a_2(x) - a_0(x)\big)\varphi'(w) + \frac{1}{2}\big(b(x) - b_0(x)\big)\varphi''(w) +$$

$$+ \int\limits_R (\varphi(w + v) - \varphi(w))\Gamma_0(dv, x) + \gamma^\varepsilon(w)\varphi(w),$$

де передостання рівність випливає з умов **L1** – **L3** $\Bigg($зауважимо також, що функція $\varphi(w + v) -$ $- \varphi(w) - v\varphi'(w) - \dfrac{1}{2}v^2\varphi''(w) \in C^3(\mathbf{R})$, оскільки вона обмежена на підставі обмеженості $\varphi(w)$ разом з її похідними, і

$$\left[\varphi(w+v)-\varphi(w)-v\varphi'(w)-\frac{1}{2}v^2\varphi''(w)\right]/|v^2|\to 0,\quad |v|\to 0\bigg).$$

Пам'ятаючи, що $\gamma^\varepsilon(w)\varphi(w)=O(\varepsilon^2)$, $\varphi(w)\in C^3(\mathbf{R})$, отримуємо зображення (5).

Лема 2. *Генератор двокомпонентного марковського процесу* $(\eta^\varepsilon, x(t/\varepsilon^2))$, $t\geq 0$, *має вигляд*

$$\hat{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w,x)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w,x)+\varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi(w,x)+\Gamma_2(x)\varphi(w,x)+\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x), \tag{6}$$

де оператори $\Gamma_1(x)$, $\Gamma_2(x)$ *визначені у лемі* 1, *а залишковий член* $\left\|\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x)\right\|\to 0$ *при* $\varepsilon\to 0$, $\varphi(w,\cdot)\in C^3(\mathbf{R})$.

Доведення. Твердження леми стає очевидним, якщо використати визначення генератора марковського процесу та вигляд відповідних генераторів процесів $\eta^\varepsilon(t,x)$ і $x(t/\varepsilon^2)$.

Зрізаний оператор має таку структуру [8]:

$$\Gamma_0^\varepsilon(x)\varphi(w)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w,x)+\varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi(w,x)+\Gamma_2(x)\varphi(w,x). \tag{7}$$

Лема 3. *При виконанні умови балансу* (4) *розв'язок задачі сингулярного збурення для зрізаного оператора* (7) *на тест-функціях*

$$\varphi^\varepsilon(w,x)=\varphi(w)+\varepsilon\varphi_1(w,x)+\varepsilon^2\varphi_2(w,x)$$

реалізується співвідношенням

$$\Gamma_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(w,x)=\Gamma\varphi(w)+\varepsilon\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(w), \tag{8}$$

де залишковий член $\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(w)$ *рівномірно обмежений по* x.

Граничний оператор визначається формулою

$$\Gamma=\Pi\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x)\Pi+\Pi\Gamma_2(x)\Pi. \tag{9}$$

Доведення. Для виконання рівності (8) необхідно, щоб коефіцієнти при однакових степенях ε зліва і справа стали однаковими. Обчислимо

$$\Gamma_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(w,x)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w)+\varepsilon^{-1}\big[\mathbf{Q}\varphi_1(w,x)+\Gamma_1(x)\varphi(w)\big]+$$
$$+\big[\mathbf{Q}\varphi_2(w,x)+\Gamma_1(x)\varphi_1(w,x)+\Gamma_2(x)\varphi(w)\big]+$$
$$+\varepsilon\big[\Gamma_1(x)\varphi_2(w,x)+\Gamma_2(x)\varphi_1(w,x)\big]+\varepsilon^2\Gamma_2(x)\varphi_2(w,x).$$

Перший доданок дає

$$\mathbf{Q}\varphi(w)=0\Leftrightarrow\varphi(w)\in N_{\mathbf{Q}}.$$

Звідси бачимо, що $\varphi(w)$ не залежить від x.

Умова балансу (4) є умовою розв'язності рівняння

$$\mathbf{Q}\varphi_1(w,x)+\Gamma_1(x)\varphi(w)=0.$$

Тому

$$\varphi_1(w,x)=R_0\Gamma_1(x)\varphi(w). \tag{10}$$

Рівняння

$$\mathbf{Q}\varphi_2(w,x) + \Gamma_1(x)\varphi_1(w,x) + \Gamma_2(x)\varphi(w) = \Gamma\varphi(w)$$

з урахуванням (10) можна звести до вигляду

$$\mathbf{Q}\varphi_2(w,x) + \Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x)\varphi(w) + \Gamma_2(x)\varphi(w) = \Gamma\varphi(w).$$

Умова розв'язності останнього рівняння дасть граничний оператор у вигляді (9). Тоді

$$\varphi_2(w,x) = R_0\big[\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x) + \Gamma_2(x) - \Gamma\big]\varphi(w). \tag{11}$$

Використавши (10) та (11), решту членів розвинення можна записати так:

$$\varepsilon[\Gamma_1(x)\varphi_2(w,x) + \Gamma_2(x)\varphi_1(w,x)] + \varepsilon^2\Gamma_2(x)\varphi_2(w,x) =$$
$$= \varepsilon\big[[\Gamma_1(x)R_0[\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x) + \Gamma_2(x) - \Gamma] + \Gamma_2(x)R_0\Gamma_1(x)\big] +$$
$$+\varepsilon\big[\Gamma_2(x)R_0[\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x) + \Gamma_2(x) - \Gamma]\big]\varphi(w) = \varepsilon\theta^\varepsilon_\eta(x)\varphi(w).$$

Обмеженість $\theta^\varepsilon_\eta(x)\varphi(w)$ випливає з вигляду операторів Γ_1, Γ_2 і R_0.

Завершується доведення теореми використанням леми 3 та теореми 4.2 з [3].

4. Поведінка динамічної системи. Розглянемо асимптотичні властивості вихідної еволюційної системи (1).

Теорема 2. *При виконанні умови балансу* (4) *має місце слабка збіжність у сенсі збіжності відповідних генераторів*

$$u^\varepsilon(t) \to \hat{u}(t), \quad \varepsilon \to 0.$$

Граничний процес $\hat{u}(t)$ *визначається генератором*

$$\mathbf{L}\varphi(w) = \hat{C}(u)\varphi'(w) + \Gamma\varphi(w), \tag{12}$$

де $\hat{C}(u) = \displaystyle\int_X \pi(dx)C(u,x)$.

Зауваження 1. Слабка збіжність процесів $u^\varepsilon(t) \Rightarrow \hat{u}(t)$, $\varepsilon \to 0$, буде випливати зі збіжності відповідних генераторів за умови компактності допграничної сукупності процесів $u^\varepsilon(t)$. Відповідні теореми про компактність процесів із незалежними приростами у схемі апроксимації Леві були доведені, зокрема, в [4].

Зауваження 2. Граничний процес $\hat{u}(t)$ задається стохастичним диференціальним рівнянням

$$d\hat{u}(t) = \big[\hat{C}(\hat{u}(t)) + \hat{a}_2\big]dt + \sigma dW(t) + \int_R v\tilde{v}(dt,dv),$$

де $\mathbf{E}\tilde{\nu}(dt,dv) = dt\tilde{\Gamma}_0(dv)$.

Зауваження 3. Граничний процес $\hat{u}(t)$ має три складові. Детермінований зсув визначається розв'язком диференціального рівняння

$$d\hat{u}_d(t) = \big[\hat{C}(\hat{u}_d(t)) + \hat{a}_2\big]dt,$$

де додатковий доданок $\hat{a}_2$ виникає за рахунок накопичення зі зростанням нормованого часу t/ε^2, $\varepsilon \to 0$, дуже малих стрибків порядку ε^2, які відбуваються з імовірністю, близькою до одиниці.

Друга, дифузійна, складова визначається параметром σ та виникає за рахунок накопичення зі зростанням нормованого часу t/ε^2, $\varepsilon \to 0$, малих стрибків порядку ε, які також відбуваються з імовірністю, близькою до одиниці.

Третя складова відображає рідкісні великі стрибки, що відбуваються з імовірністю, близькою до нуля, і визначаються через усереднену міру стрибків $\tilde{\Gamma}_0(dv)$ генератором

$$\Gamma_j \varphi(w) = \int\limits_R \big[\varphi(w+v) - \varphi(w)\big] \tilde{\Gamma}_0(dv).$$

Доведення теореми **2.** Спочатку доведемо кілька лем.

Лема 4. *Генератор двокомпонентного марковського процесу* $\big(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2)\big)$, $t \geq 0$, *має зображення*

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(w,x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w,x) + \Gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x) +$$

$$+ \mathbf{C}(x)\varphi(w,x) + \theta^\varepsilon_w \varphi(w,x),$$

де $\Gamma^\varepsilon(x)$ — *генератор сукупності імпульсних процесів збурень* (3),

$$\mathbf{C}(x)\varphi(w,x) = C(u,x)\varphi'_w(w,x).$$

Залишковий член $\big\|\theta^\varepsilon_w \varphi(w,x)\big\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доведення леми можна знайти в [7].

Лема 5. *Генератор* $\mathbf{L}^\varepsilon(x)$ *у випадку імпульсного процесу збурень допускає асимптотичне зображення*

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(w,x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w,x) + \varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi(w,x) +$$

$$+ \Gamma_2(x)\varphi(w,x) + \mathbf{C}(x)\varphi(w,x) + \hat{\theta}^\varepsilon_w \varphi(w,x),$$

де

$$\hat{\theta}^\varepsilon_w(x) = \gamma^\varepsilon + \theta^\varepsilon_w(x),$$

$\Gamma_1(x)$ *та* $\Gamma_2(x)$ *визначені у лемі* 1.

Залишковий член $\big\|\hat{\theta}^\varepsilon_w \varphi(w,x)\big\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доведення проводиться з допомогою зображення оператора (5) та леми 4.

Зрізаний оператор має вигляд

$$\mathbf{L}^\varepsilon_0(x)\varphi = \varepsilon^2\mathbf{Q}\varphi + \varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi + \Gamma_2(x)\varphi + \mathbf{C}(x)\varphi. \tag{13}$$

Лема 6. *При виконанні умови балансу* (4) *розв'язання проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора* (13) *на тест-функціях*

$$\varphi^\varepsilon(w,x) = \varphi(w) + \varepsilon\varphi_1(w,x) + \varepsilon^2\varphi_2(w,x)$$

реалізується співвідношенням

$$\mathbf{L}^\varepsilon_0(x)\varphi^\varepsilon(w,x) = \mathbf{L}\varphi(w) + \varepsilon^2\theta^\varepsilon_w(x)\varphi(w), \tag{14}$$

де залишковий член $\theta^\varepsilon_w(x)$ *рівномірно обмежений по* x.

Граничний оператор $\mathbf{L}$ *задається формулою*

$$\mathbf{L} = \Pi\big[\mathbf{C}(x) + \Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x) + \Gamma_2(x)\big]\Pi. \tag{15}$$

Доведення. Для виконання рівності (14) необхідно, щоб коефіцієнти при однакових степенях ε зліва та справа були рівними. З цією метою обчислимо

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(w,x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}(x)\varphi(w) + \varepsilon^{-1}\big[\mathbf{Q}\varphi_1(w,x) + \Gamma_1(x)\varphi(w)\big] +$$
$$+ \big[\mathbf{Q}\varphi_2(w,x) + \Gamma_1(x)\varphi_1(w,x) + \Gamma_2(x)\varphi(w) + \mathbf{C}(x)\varphi(w)\big] +$$
$$+ \varepsilon\big[\Gamma_1(x)\varphi_2(w,x) + \Gamma_2(x)\varphi_1(w,x)) + \mathbf{C}(x)\varphi_1(w,x)\big] +$$
$$+\varepsilon^2\big[\Gamma_2(x)\varphi_2(w,x) + \mathbf{C}(x)\varphi_2(w,x)\big].$$

Оскільки

$$\mathbf{Q}\varphi(w) = 0 \Leftrightarrow \varphi(w) \in N_Q,$$

то очевидно, що $\varphi(w)$ не залежить від x.

Умова балансу (4) є умовою розв'язності рівняння

$$\mathbf{Q}\varphi_1(w,x) + \Gamma_1(x)\varphi(w) = 0.$$

Тому

$$\varphi_1(w,x) = R_0\Gamma_1(x)\varphi(w).$$

Останнє рівняння

$$\mathbf{Q}\varphi_2(w,x) + \Gamma_1(x)\varphi_1(w,x) +$$
$$+ \Gamma_2(x)\varphi(w) + \mathbf{C}(x)\varphi(w) = \mathbf{L}\varphi(w).$$

Запишемо його у вигляді

$$\mathbf{Q}\varphi_2(w,x) = \big[\mathbf{L} - \Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x) - \Gamma_2(x) - \mathbf{C}(x)\big]\varphi(w).$$

Умова розв'язності останнього рівняння і дає граничний оператор $\mathbf{L}$ у вигляді (15).

Завершення доведення теореми проводиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 4.2 в [3].

Література

1. *Jacod J., Shiryaev A. N.* Limit theorems for stochastic processes. – Berlin: Springer-Verlag, 2003. – 601 p.
2. *Korolyuk V. S., Korolyuk V. V.* Stochastic models of systems. – Dordrecht: Kluwer, 1999. – 185 p.
3. *Korolyuk V. S., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. – World Sci., 2005. – 330 p.
4. *Korolyuk V. S., Limnios N., Samoilenko I. V.* Lévy and Poisson approximations of switched stochastic systems by a semimartingale approach // Comptes Rend. Math. – 2016. – **354**. – P. 723 – 728.
5. *Papanicolaou G., Stroock D., Varadhan S. R. S.* Martingale approach to some limit theorems // Duke Turbulence Conf. (Durham, NC, April 23 – 25, 1976): Duke Univ. Math. Ser. III. – New York: Duke Univ., 1977. – 120 p.
6. *Samoilenko A. M., Stanzhytskyi O. M.* Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations. – Singapore: World Sci., 2011. – 323 p.
7. *Семенюк С. А., Чабанюк Я. М.* Стохастичні еволюційні системи з імпульсними збуреннями // Вісн. Нац. ун-ту „Львів. політехніка". Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 660. – С. 56 – 60.
8. *Чабанюк Я. М.* Апроксимація дифузійним процесом в схемі усереднення // Доп. НАН України. – 2004. – № 12. – С. 35 – 40.
9. *Nikitin A. V., Khimka U. T.* Asymptotics of normalized control with Markov switchings // Ukr. Math. J. – 2017. – **68**, № 8. – P. 1252 – 1262.

Одержано 21.12.16