УДК 511.524

Ю. Ю. Трохимчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

We present necessary and sufficient conditions for a continuous differential form to be the total differential.

Наведено необхідні та достатні умови для того, щоб неперервна диференціальна форма була повним диференціалом.

Пусть в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$ задана дифференциальная форма $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, где P и Q непрерывны. Будем говорить, что эта форма замкнута, если интеграл от нее вдоль произвольной замкнутой спрямляемой кривой $L \subset D$ равен нулю:

$$\int\limits_L Pdx + Qdy = 0.$$

Для такой формы, как легко видеть, однозначная функция $F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ имеет P и Q своими частными производными:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q,$$

и, следовательно, данная дифференциальная форма представляет полный дифференциал dF этой функции.

Какими же должны быть между собой P и Q для того, чтобы оказаться частными производными одной и той же функции F?

Если P и Q — гладкие функции, то условием (необходимым и достаточным) для этого является равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1}$$

Ввиду важности для анализа этой задачи было найдено много усилений этого утверждения, из которых упомянем лишь одно:

Если область D односвязна, функции P, Q непрерывны и имеют частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, суммируемые в D, причем почти всюду выполняется условие (1), то $Pdx + Qdy$ — полный дифференциал некоторой однозначной функции. Существование такой функции, конечно, равносильно замкнутости формы $Pdx + Qdy$ (заметим — в односвязной области!).

В 1913 г. Монтель высказал без доказательства более общее предложение:

Если область односвязна, функции P и Q ограничены и имеют частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, связанные почти всюду условием (1), то $Pdx + Qdy$ — полный дифференциал.

В более ограничительных предположениях, именно при непрерывности P и Q и существовании кроме производных, фигурирующих в (1), также производных $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ это предложение позднее было доказано Д. Е. Меньшовым [1].

Справедливо ли предложение Монтеля?

В 1940 г. Г. П. Толстов привел пример, показывающий, что оно, вообще говоря, не имеет места даже при непрерывных P и Q [2].

Выше мы упомянули о достаточных условиях, при которых данная форма является замкнутой.

Ниже мы установим не только необходимые условия для P и Q, чтобы форма $Pdx + Qdy$ была замкнута, но и наиболее полное к настоящему времени решение этой задачи и, конечно, задачи о полном дифференциале.

Прежде всего в качестве области D возьмем единичный квадрат I^2, что, очевидно, не ограничивает нашу задачу. Далее, известно, что равенство нулю криволинейного интеграла по любой замкнутой спрямляемой кривой равносильно равенству нулю этого интеграла вдоль контура каждого прямоугольника внутри I^2 со сторонами, параллельными осям координат. Поэтому мы и займемся изучением особенностей указанной формы и интегральных контурных ее значений для этих прямоугольников.

Итак, мы имеем в квадрате I^2 непрерывную замкнутую форму $Pdx + Qdy$. Возьмем произвольный прямоугольник $[a, a+\alpha; b, b+\beta] \subset I^2,\ a, b, \alpha, \beta \in [0, 1]$. По предположению

$$\int Pdx + Qdy = 0$$

вдоль его контура. Распишем это подробно:

$$\int\limits_a^{a+\alpha} [P(x,b) - P(x,b+\beta)]dx + \int\limits_b^{b+\beta} [Q(a+\alpha,y) - Q(a,y)]dy = 0.$$

Из теоремы о среднем для каждого из этих интегралов получим равенство

$$\frac{P(\xi,b+\beta) - P(\xi,b)}{\beta} = \frac{Q(a+\alpha,\eta) - Q(a,\eta)}{\alpha}, \tag{2}$$

где (ξ,η) — некоторая „средняя” точка в рассматриваемом прямоугольнике, именно, такая, что, кроме того,

$$\frac{P(\xi,b+\beta) - P(\xi,b)}{\beta} = \frac{1}{\alpha}\int\limits_a^{a+\alpha} \frac{P(x,b+\beta) - P(x,b)}{\beta}dx \tag{3}$$

и

$$\frac{Q(a+\alpha,\eta) - Q(a,\eta)}{\alpha} = \frac{1}{\beta}\int\limits_b^{b+\beta} \frac{Q(a+\alpha,y) - Q(a,y)}{\alpha}dy.$$

Ниже мы будем рассматривать прямоугольники $[a, a+\alpha;\ b, b+\beta]$ в предположении $\alpha, \beta > 0$. Но нетрудно в возникающих утверждениях при $\alpha, \beta > 0$ получить их для всех вариантов знаков $\alpha,\ \beta$.

Пару точек, принадлежащих контуру прямоугольника $[a, a+\alpha; b, b+\beta]$ и вертикальной прямой $x = \text{const}$, будем называть вертикальными, а пару подобных точек на горизонтали $y = \text{const}$ — горизонтальными.

Тогда равенство (1) можно сформулировать так: в каждом прямоугольнике $[a, a+\alpha; b, b+\beta]$ найдется „средняя” точка (ξ, η), в которой вертикальное (для P) и горизонтальное (для Q) разностные отношения совпадают.

При этом значения эти равны средним значениям, соответственно, всех вертикальных и горизонтальных отношений.

Производные числа. Для непрерывной функции $f(x), x \in [a, b]$, производным числом в точке **x** назовем любое предельное значение отношения $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h \to 0$; при этом производное число — левое, если оно получено при $h < 0$, и правое — при $h > 0$.

Нас будет интересовать множество всех производных чисел f в точке **x**. Поэтому рассмотрим множество $m_\varepsilon(x)$ всех значений отношения $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при условии $0 < |h| < \varepsilon$ для $\varepsilon > 0$; $m_\varepsilon(x)$ будем рассматривать как подмножество числовой оси $O\xi$, дополненной бесконечно удаленными точками $\pm\infty$. Введем множество

$$\mathfrak{m}_x = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{m_\varepsilon(x)}.$$

Легко показать, что множество $\mathfrak{m}_x$ совпадает с совокупностью всех производных чисел функции f в точке **x**.

Возьмем отдельно точку $x_0 \in (a, b)$. Поскольку $m_\varepsilon(x_0)$ — непрерывный образ двух интервалов $(x_0-\varepsilon, x_0)$ и $(x_0, x_0+\varepsilon)$, то это множество состоит, вообще говоря, из двух компонент; то же справедливо и для $\overline{\mathfrak{m}_\varepsilon(x_0)}$, а поэтому и для $\mathfrak{m}_{x_0}$.

Итак, в общем случае $\mathfrak{m}_x$ является объединением двух замкнутых отрезков оси $O\xi$. Наоборот, для любых замкнутых (конечных или бесконечных) отрезков оси $O\xi$ легко построить функцию, для которой множество производных чисел $\mathfrak{m}$ в некоторой точке совпадает с объединением этих отрезков.

Это свидетельствует о том, что если рассматривать все точки области определения функции f, то для ее дифференциального поведения имеется огромное множество возможностей. Поэтому нелишне будет привести без доказательства следующую классификационную теорему:

Пусть функция $f(x)$, $x \in [a, b]$, непрерывна. Тогда:

1) множество $\mathfrak{m}_x$, за исключением счетного множества точек из $[a, b]$, связно;

2) исключая множество меры нуль, имеем два варианта ($\mathbb{R}$ — множество действительных чисел):

$$\mathfrak{m}_x = \begin{cases} \overline{\mathbb{R}}, \\ *(\text{единственная точка}); \end{cases}$$

3) исключая множество первой категории, имеем варианты:

$$\mathfrak{m}_x = \begin{cases} \overline{\mathbb{R}}, \\ [A, B], \quad -\infty \le A \le B \le +\infty. \end{cases}$$

Но если бы расстояние между (конечными или бесконечными) $\mathfrak{m}$ было положительным, то и все разностные отношения

$$\frac{P(x, b+\delta) - P(x, b)}{\delta}, \qquad \frac{Q(a+\delta, y) - Q(a, y)}{\delta}$$

для каждого квадрата $[a, a+\delta; b, b+\delta]$ с достаточно малым δ отличались бы на фиксированное положительное число и равенство (1) в таких квадратах не имело бы места.

Рассмотрим замкнутую форму $Pdx + Qdy$ для каждой из функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ множеств $\mathfrak{m}_y(P)$, $\mathfrak{m}_x(Q)$ в некоторой точке I^2.

Если бы расстояние между ними было положительным, то и все разностные отношения

$$\frac{P(x,\, b+\delta) - P(x,\, b)}{\delta}, \qquad \frac{Q(a+\delta,\, y) - Q(a,\, y)}{\delta}$$

для каждого квадрата $[a,\ a+\delta;\ b,\ b+\delta]$ с достаточно малым δ отличались бы на фиксированное положительное число и равенство (2) в таких квадратах не имело бы места.

Но, аналогично, если найдется производное число у P, возникшее от последовательности δ_k и не принадлежащее $\mathfrak{m}_x(Q)$, т. е. на равномерно положительном от него расстоянии, то разностные отношения

$$\frac{P(x,\, b+\delta_k) - P(x,\, b)}{\delta_k}, \quad \frac{Q(a+\delta_k,\, y) - Q(a, y)}{\delta_k}$$

для каждого квадрата $[a,\ a+\delta_k;\ b,\ b+\delta_k]$, начиная с некоторого k, отличались бы на фиксированное положительное число и равенство этих отношений в указанных квадратах не имело бы места.

Итак, в случае замкнутой формы $Pdx + Qdy$ имеем соотношение

$$\mathfrak{m}_y(P) = \mathfrak{m}_x(Q)$$

в каждой точке квадрата I^2; это соотношение, конечно, превращается в известное нам условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

в случае, когда эти частные производные существуют.

Основная теорема. Сначала докажем основное свойство „коэффициентов" P, Q в полном дифференциале, а именно, конечность производных чисел: у $P(x, y)$ — по переменной **y**, а у $Q(x, y)$ — по **x**.

Сначала покажем, что, например, P не может иметь бесконечных производных по **y**. Предположим противное и пусть $(a, b) \in I^2$ — точка, в которой $P'_y(a, b) = +\infty$.

Нам потребуется одно временное понятие. Пусть непрерывная функция $z = p(y) > 0$, $y \in [a, b]$, имеет в точке $y = a$ бесконечную производную $+\infty$. Назовем точку y_0 M-точкой, $M > 0$, если к ней стягивается последовательность вложенных отрезков $[y_0 - \delta_k,\ y_0 + \delta'_k]$, $\delta_k, \delta'_k > 0$ и стремятся к 0, таких, что все отношения

$$\frac{p(y_0 + \delta'_k) - p(y_0 - \delta_k)}{\delta'_k + \delta_k}$$

равны между собой и больше M.

При указанном условии относительно бесконечной производной $p'(a) = +\infty$ докажем, что при любом сколь угодно большом M отрезок $[a, b]$ содержит внутри бесконечное множество M-точек.

Пусть L — выпуклая оболочка участка графика $z = p(y),\ y \geq a,$ в каждой точке которой угловые коэффициенты всех полукасательных больше M. Ясно, что L в точке $y = a$ имеет вертикальную касательную вместе с графиком $p(y)$.

Возьмем теперь произвольную экстремальную точку на L. В ее окрестности семейство прямых, паралельных касательной к L в этой точке, при пересечении с графиком $p(y)$ порождает континуальное множество прямых отрезков $[\delta, \delta']$: проколотая окрестность точки сплошь состоит из таких пар точек.

Обозначив $N = \max\limits_{I^2} |Q(x,y)|$, выберем M так, что $M - 2N = 3\varepsilon > 0$. Пусть теперь для $\delta > 0$ разности $|P(x,y) - P(x',y')|$ и $|Q(x,y) - Q(x',y')|$ будут меньше ε при $|x-x'|+|y-y'| < \delta$.

Возьмем для $P(a,y)$ M-точку y_0 на стороне $x = a$ данного прямоугольника и рассмотрим квадрат q со стороной δ', меньшей δ, и с точкой y_0 на его левой вертикали с вершинами, принадлежащими парам M-точки y_0. Вместо разностных отношений у P и Q в случае этого квадрата следует рассматривать просто разности, конечно, вертикальные для P и горизонтальные для Q.

При таком выборе горизонтальные разности оказываются меньше $2N\delta'$, а вертикальные — больше $M\delta' - 2\varepsilon\delta'$. Тем самым квадрат q является искомым: вертикальные разности нигде не совпадают с горизонтальними и мы получаем противоречие с введенным предположением о существовании бесконечных производных.

В случае бесконечных производных чисел решение также отрицательно вследствие рассмотрения такой же выпуклой оболочки L, имеющей вертикальную касательную в начальной точке, что является решающим и в этом случае.

Для функции одной переменной отсутствие бесконечных производных чисел означает ее принадлежность классу функций $AC\mathcal{G}_*$, т. е. они представляют собой класс дифференцируемых почти всюду неопределенных интегралов Данжуа [1].

Теперь можно сформулировать основное утверждение данной статьи.

Теорема 1. *Для того чтобы дифференциальная форма* $P dx + Q dy$ *с непрерывными* P, Q *была замкнутой в односвязной области* $D \subset \mathbb{R}^2$, *необходимы и достаточны следующие свойства*:

1) P, Q *имеют только конечные производные числа*: *для* P — *по* $\boldsymbol{y}$, *а для* Q — *по* $\boldsymbol{x}$;

2) *всюду в* D *выполняется равенство*

$$\mathfrak{m}_y(P) = \mathfrak{m}_x(Q);$$

3) *частные производные* $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *повторно интегрируемы на каждом прямоугольнике* $R \subset D$ *со сторонами, параллельными осям координат, т. е.*

$$\int dx \int\limits_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dy = \int dy \int\limits_R \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx,$$

$R \equiv [a, a+\alpha; b, b+\beta]$.

Условие 3, как необходимое, непосредственно следует из соотношения

$$\int\limits_{\partial R} P\, dx + Q\, dy = -\int\limits_a^{a+\alpha} \big[P(x, b+\beta) - P(x,b)\big] dx +$$

$$+\int\limits_{b}^{b+\beta}\left[Q(a+\alpha,y)-Q(a,y)\right]dy=-\int\limits_{a}^{a+\alpha}dx\int\limits_{b}^{b+\beta}\frac{\partial P}{\partial y}\,dy+\int\limits_{b}^{b+\beta}dy\int\limits_{a}^{a+\alpha}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx.$$

Достаточность условий теоремы теперь также почти очевидна.

Конечно, эти же условия необходимы и достаточны для того, чтобы пара непрерывных функций (P,Q) составляла полный дифференциал однозначной функции.

Относительно условий теоремы необходимо сделать несколько замечаний.

Что касается условия 1, то оно воспринимается как некое ожидаемое от (P,Q) свойство гладкости, которое подсказывалось давним уже уравнением Коши – Римана; вот оно-то снова появляется, хотя и неявно, в доказываемой теореме. Ведь из условия 1, как известно, следует существование почти всюду в области D частных производных $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, и тогда условие 2 превращается в равенство $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ также почти всюду в D.

Отметим одну особенность условия 2: в то время, когда в большинстве теорем анализа, связанных с дифференцированием, часто встречаются слова „почти всюду", в доказываемой теореме условие 2 должно выполняться всюду. Это возможно: ведь множества $\mathfrak{m}_x(Q)$, $\mathfrak{m}_y(P)$ всегда существуют, в то время как частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, вообще, существуют лишь почти всюду. Но, конечно, принадлежность P — по $\mathbf{y}$, а Q — по $\mathbf{x}$ классу $AC\mathcal{G}_*$ в большинстве случаев позволяет обходиться без слова „всюду".

Условие 3 легко включается в число и необходимых, и достаточных условий. Отметим еще, что линейные интегралы в условии 3 понимаются в общем случае как интегралы Данжуа.

Заметим, что был построен пример дифференциальной формы $Pdx+Qdy$ с выполненными условиями 1 и 2, которая замкнутой не является [2]. Это свидетельствует о том, что условие 3 из списка необходимых и достаточных условий исключать пока нельзя (в том смысле, что вместо него может появиться другое, ему равносильное...).

Известно, что непрерывная функция, почти всюду дифференцируемая, отнюдь не определяется (с точностью до аддитивной константы) заданием ее производной почти всюду. Интересно однако то, что свойство функции f быть почти всюду производной непрерывной функции, не налагает на нее, вообще говоря, никаких ограничений, за исключением, конечно, измеримости и конечности почти всюду. Напомним теорему Лузина, которая утверждает для произвольной измеримой и конечной почти всюду на отрезке $[a,b]$ функции f существование непрерывной функции F такой, что $F'(x)=f(x)$ почти всюду на том же отрезке.

Оказывается [3], что и для функций двух переменных справедлив аналог этого результата.

Именно, если $f(x,y)$ и $g(x,y)$ — почти всюду конечные измеримые функции в области $D\subset\mathbb{R}^2$, то существует в D непрерывная функция $F(x,y)$ такая, что почти всюду в D

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=f(x,y),\qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=g(x,y).$$

Но, конечно, здесь можно говорить лишь об аппроксимативном полном дифференциале функции F, который существует также почти всюду.

Доказанная теорема распространяется на случай любого числа переменных. Ограничимся случаем трех переменных.

Теорема 2. *Пусть функции* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ *и* $R(x,y,z)$ *непрерывны в односвязной области* D. *Для того чтобы существовала непрерывная функция* $F(x,y,z)$, *для которой всюду в* D

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = R,$$

необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) P, Q, R *имеют лишь конечные производные числа*: P — *по* ***y*** *и* ***z***, Q — *по* ***x*** *и* ***z***, R — *по* ***x*** *и* ***y***;

2) *в каждой точке* D *выполняются равенства*

$$\mathfrak{m}_y(P) = \mathfrak{m}_x(Q), \qquad \mathfrak{m}_z(Q) = \mathfrak{m}_y(R), \qquad \mathfrak{m}_x(R) = \mathfrak{m}_z(P),$$

которые на языке „почти всюду” означают равенства $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}$, *действительно, почти всюду в* D;

3) *повторная интегрируемость указанных частных производных для почти всех значений отсутствующей в равенстве переменной*

$$F(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y,z)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y,z)\,dy + \int\limits_{z_0}^{z} P(x,y,z)\,dz.$$

Из изложенного выше следует, что в применении основной теоремы необходимы оба (а не одно) условия, наложенные на „коэффициенты” P, Q данной формы.

Литература

1. *Толстов Г. П.* О криволинейном и повторном интеграле // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – М.; Л.: Физматгиз, 1950. – 100 с.
2. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.; Л.: 1949. – 450 с.
3. *Джваршейшвили А. Г.* Одна теорема о частных производных // Тр. Тбил. мат. ин-та АН ГССР. – 1958. – **25**. – С. 330 – 342.

Получено 13.09.16