УДК 517.929.21

И. В. Атамась (Черкас. нац. ун-т им. Б. Хмельницкого),
В. И. Слынько (Ин-т механики НАН Украины, Киев)

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КАСКАДОВ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathrm{conv}\,\mathbb{R}^n$ *

The discrete dynamical systems (cascades) in semilinear metric space of nonempty convex compacts of finite-dimensional space are studied. Using the methods of convex geometry of H. Minkowski and A. D. Alexandrov the sufficient conditions of the stability of the fixed points were established. Under certain restrictions on the mappings generating the cascade, the problem of asymptotic stability of fixed point of the cascade was reduced to localization of the roots of a polynomial inside the unit circle in the complex plane. Examples of cascades in the plane were given.

Вивчаються дискретні динамічні системи (каскади) в напівлінійному метричному просторі непорожніх опуклих компактів скінченновимірного простору. Використовуючи методи геометрії опуклих тіл Г. Мінковського і О. Д. Александрова, встановлено достатні умови стійкості нерухомих точок. При деяких обмеженнях на відображення, які породжують каскад, питання про асимптотичну стійкість нерухомої точки каскаду зведено до локалізації коренів полінома в одиничному колі комплексної площини. Наведено приклади каскадів на площині.

Введение. Динамические системы (потоки и каскады) в метрическом пространстве $\mathrm{conv}\,\mathbb{R}^n$ естественным образом возникают в теории управления, теории дифференциальных уравнений с многозначными правыми частями, теории устойчивости систем с неточными значениями параметров. Дифференциальные уравнения с производной Хукухары, π-производной, включая уравнения с импульсным воздействием, были предметом исследований в работах [1 – 3], в которых, в частности, обоснован принцип усреднения для этих классов дифференциальных уравнений.

В работах [4, 5] рассматривались вопросы устойчивости разностных уравнений с разностным оператором Хукухары в пространстве $\mathrm{conv}\,\mathbb{R}^n$. В частности, были установлены общие теоремы метода сравнения и прямого метода Ляпунова применительно к этому классу уравнений. В работах [6, 7] исследован вопрос об устойчивости по двум мерам дискретных динамических систем (ДДС) в пространстве $\mathrm{conv}\,\mathbb{R}^n$.

Отметим, что ДДС в пространстве $\mathrm{conv}\,\mathbb{R}^n$ естественным образом возникают при исследовании областей достижимости (интегральных воронок) дискретных управляемых систем [9]. Рассмотрим линейную дискретную управляемую систему

$$\mathbf{x}_{p+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_p + \mathbf{u}_p, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $\mathbf{u}_p \in U \in \mathrm{conv}\,\mathbb{R}^n$ — вектор управления. Предположим, что начальное значение $\mathbf{x}_0 \in X_0 \in \mathrm{conv}\,\mathbb{R}^n$, и обозначим через $X_p \in \mathrm{conv}\,\mathbb{R}^n$ множество достижимости этой системы в момент времени $p \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$X_{p+1} = \mathbf{A}X_p + U. \tag{2}$$

Отметим, что вектор $\mathbf{u}_p$ можно также интерпретировать как вектор возмущений, а систему (1) — как систему с неточными параметрами.

* Выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки (проект № 0116U004691).

Дискретную систему (2) можно обобщить, рассматривая задачу об управлении множеством достижимости дискретной системы (1). Предположим, что в каждый момент времени $p \in \in \mathbb{Z}_+$ известна информация об объеме области достижимости $y_p = V[X_p]$, который примем за выходную переменную, и рассмотрим управляемую систему

$$\mathbf{x}_{p+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_p + y_p\mathbf{u}_p, \tag{3}$$

где $\mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $\mathbf{u}_p \in U \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ — вектор управления. Тогда область достижимости этой системы описывается уравнением в пространстве $\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$

$$X_{p+1} = \mathbf{A}X_p + \psi\big(V[X_p]\big)U. \tag{4}$$

Исследование вопроса о существовании и устойчивости неподвижной точки динамической системы, порожденной уравнением (4), позволяет указать условия на функцию $\psi(v)$, которые обеспечивают стабилизацию области достижимости.

Целью настоящей работы является исследование устойчивости неподвижных точек ДДС в пространстве $\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$, имеющих вид (4). При этом рассматриваются системы, удовлетворяющие дополнительному условию $\mathbf{A}^q = \beta\mathbf{I}$. Это предположение позволяет свести задачу об устойчивости к исследованию локализации корней некоторого полинома степени q.

1. Вспомогательные результаты. Пусть $\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ — метрическое пространство непустых выпуклых компактов в пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа

$$d_H(X,Y) = \inf\big\{\lambda \geq 0 \mid X \subset Y + \lambda K, Y \subset X + \lambda K\big\},$$

где K — замкнутый единичный шар в пространстве $\mathbb{R}^n$.

В этом пространстве определены операции сложения двух множеств X и Y (суммы Минковского) и умножения на неотрицательный скаляр $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$X + Y = \big\{x + y \mid x \in X,\, y \in Y\big\}, \qquad \lambda X = \{\lambda x \mid x \in X\}.$$

Если $X \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$, $Y \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$, то $X + Y \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$, $\lambda X \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$.

При исследовании устойчивости неподвижных точек ДДС в пространстве $\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ для построения уравнения в вариациях возникает необходимость введения понятия разности двух элементов пространства $\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$. Это понятие вводится путем вложения пространства $\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ в банахово пространство $C(S^{n-1})$. Соответствующая конструкция описана в 1937 г. в работе А. Д. Александрова [8]. В более общем случае, т. е. в случае линейного нормированного пространства X, в работе Х. Радстрема [10] доказана теорема о вложении метрического пространства $\operatorname{conv} X$, метризированного метрикой Хаусдорфа и состоящего из непустых выпуклых компактных подмножеств из X, в некоторое линейное нормированное пространство. Аналогичные вопросы также обсуждаются в монографии Е. С. Половинкина (см. [11, с. 124 – 145]).

Прежде всего напомним, что каждому элементу X пространства $\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ можно взаимно однозначно сопоставить его опорную функцию $h_X(p)$, определенную в пространстве $\mathbb{R}^n$. Рассматривая сужение этой функции на единичную сферу S^{n-1} пространства $\mathbb{R}^n$, можно установить соответствие

$$\operatorname{conv}\mathbb{R}^n \ni X \leftrightarrow h_X(p) \in C(S^{n-1}),$$

которое является изометрическим изоморфизмом, т. е. если $X \leftrightarrow h_X,\ Y \leftrightarrow h_Y,\ \lambda \geq 0$, то

$$X + Y \leftrightarrow h_X + h_Y, \qquad \lambda X \leftrightarrow \lambda h_X, \qquad d_H(X,Y) = \|h_X - h_Y\|_{C(S^{n-1})}.$$

Здесь $\|h_X\|_{C(S^{n-1})} = \max_{p \in S^{n-1}} |h_X(p)|$.

В силу этого элементы пространства $\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ можно отождествлять с их опорными функциями. На множестве $(\operatorname{conv}\mathbb{R}^n)^2$ введем бинарное отношение

$$\varrho\colon (X,Y)\varrho(X_1,Y_1) \Leftrightarrow X + Y_1 = X_1 + Y.$$

Отношение ϱ является отношением эквивалентности. Можно показать, что на фактор-пространстве $\Omega = (\operatorname{conv}\mathbb{R}^n)^2/\varrho$ корректно определены операции сложения и умножения на скаляр; если $\big[(X,Y)\big] \in \Omega,\ \big[(X_1,Y_1)\big] \in \Omega$, то по определению принимают

$$\big[(X_1,Y_1)\big] + \big[(X,Y)\big] = \big[(X+X_1, Y+Y_1)\big],$$

$$\lambda\big[(X,Y)\big] = \begin{cases} \big[(\lambda X, \lambda Y)\big], & \lambda \geq 0, \\ \big[(|\lambda|Y, |\lambda|X)\big], & \lambda \leq 0, \end{cases}$$

и норма

$$\big\|[(X,Y)]\big\|_\Omega = \|h_X - h_Y\|_{C(S^{n-1})} = d_H(X,Y).$$

Пространство $(\Omega, \|.\|_\Omega)$ является линейным нормированным пространством. Оно не полно, однако, вследствие леммы II [8, с. 961] его пополнение изоморфно $C(S^{n-1})$. Пространство $\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ изоморфно и изометрично вкладывается в пространство Ω по правилу $X \to \big[(X,0)\big]$. В пространстве Ω определена разность любых двух элементов пространства $\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$:

$$X - Y = \big[(X,Y)\big].$$

Приведем также некоторые, необходимые для дальнейшего сведения, касающиеся теории смешанных объемов выпуклых тел, следуя в основном работе А. Д. Александрова [8].

Пусть $X_k \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n,\ \lambda_k \geq 0,\ k = \overline{1,m},\ X = \sum_{k=1}^m \lambda_k X_k \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$. Как показал Г. Минковский, объем $V[X]$ выпуклого тела X будет однородным многочленом степени n относительно переменных λ_k

$$V[X] = \sum_{k_1,\ldots,k_n} \lambda_{k_1} \ldots \lambda_{k_n} V_{k_1,k_2,\ldots,k_n}, \tag{5}$$

где сумма берется по всем индексам $k_1,\ k_2,\ \ldots, k_n$, пробегающим независимо все значения от 1 до m. Коэффициенты $V_{k_1,\ldots,k_n}$ определяются при этом так, чтобы они не зависели от порядка индексов. Можно показать, что $V_{k_1,\ldots,k_n}$ зависит только от тел $X_{k_1},\ \ldots,\ X_{k_n}$. Поэтому естественно записывать его в виде $V[X_{k_1},\ldots,X_{k_n}]$. Эти коэффициенты называются смешанными объемами.

Функционал $V[X_1,\ldots,X_n]$ имеет следующие свойства:

(1) является линейным и положительно однородным по каждой переменной, т. е. для всех $\lambda',\ \lambda'' \in \mathbb{R}_+,\ X_k \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n,\ X_i' \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n,\ X_i'' \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n,\ k = \overline{1,n}$

$$V[X_1,\ldots,\lambda' X_i' + \lambda'' X_i'',\ldots,X_n] = \lambda' V[X_1,\ldots,X_i',\ldots,X_n] + \lambda'' V[X_1,\ldots,X_i'',\ldots,X_n];$$

(2) трансляционно-инвариантен и инвариантен относительно перестановки аргументов, а также непрерывен по совокупности переменных.

Из этих свойств выводится формула Штейнера

$$V[X_1 + \varrho X_2] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \varrho^k V_k[X_1, X_2], \quad \varrho \in \mathbb{R}_+, \tag{6}$$

где $V_k[X_1, X_2] = V\underbrace{[X_1, \ldots, X_1, \overbrace{X_2, \ldots, X_2}^{k}]}_{n}$ — k-й смешанный объем, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Одним из основных результатов, полученных в работе А. Д. Александрова [8], который имеет существенное значение для дальнейшего изложения, является продолжение функционала смешанного объема $V[X_1, \ldots, X_{n-1}, Z]$ при фиксированных $X_i \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, n-1}$, первоначально определенного для $Z \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$, на банахово пространство $C(S^{n-1})$. Значение этого результата состоит в том, что многие экстремальные задачи теории выпуклых тел могут быть сведены к вариационным проблемам для функционалов, определенных для выпуклых тел. Однако для исследования экстремума формальные правила вариационного исчисления оказываются неприменимыми вследствие того, что функционал должен быть определен для функций, которые представимы в виде разности двух опорных функций. Но такая функция может не быть опорной функцией какого-нибудь выпуклого тела. Следовательно, возникает необходимость расширения основных понятий геометрии выпуклых тел, осуществленная в упомянутой выше работе А. Д. Александрова. В контексте настоящего исследования эти результаты будут использованы для построения уравнения в вариациях в окрестности неподвижной точки ДДС.

Рассматриваемый функционал $V\big[X_1, \ldots, X_{n-1}, (\cdot)\big]$ сначала распространяется на непрерывные функции, которые допускают представление в виде разности двух опорных функций, т. е. для $Z(p) = h_{X_n''}(p) - h_{X_n'}(p)$ полагают

$$V[X_1, \ldots, X_{n-1}, Z] \stackrel{\mathrm{df}}{=} V[X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n''] - V[X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n']. \tag{7}$$

Доказывается, что это определение корректно, т. е. не зависит от способа представления функции в виде разности двух опорных функций, а фактически зависит от класса эквивалентности $\big[(X_n'', X_n')\big] \in \Omega$. Далее устанавливается аддитивность, однородность и ограниченность этого функционала на пространстве Ω. Из леммы II [8, с. 961], утверждающей, что любую функцию из пространства $C(S^{n-1})$ можно сколь угодно точно аппроксимировать функциями, которые представимы в виде разности двух опорных функций, следует, что функционал $V[X_1, \ldots, X_{n-1}, (\cdot)]$ можно расширить по непрерывности до линейного непрерывного функционала на всем банаховом пространстве $C(S^{n-1})$. Следовательно, функционал $V[X_1, \ldots, X_{n-1}, Z]$ при фиксированных $X_i \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ может быть представлен как интеграл Стильтьеса – Радона от непрерывной функции $Z \in C(S^{n-1})$ по однозначно определенной аддитивной функции множеств на единичной сфере S^{n-1}. Этот функционал $V[X_1, \ldots, X_{n-1}, Z]$ вполне определяется заданием выпуклых тел $X_i \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$, и можно утверждать, что

$$V[X_1, \ldots, X_{n-1}, Z] = \frac{1}{n} \int\limits_{S^{n-1}} Z(p) F[X_1, \ldots, X_{n-1}; d\omega], \qquad Z \in C(S^{n-1}), \tag{8}$$

где $F[X_1, \ldots, X_{n-1}; d\omega]$ — функция множеств ω на единичной сфере S^{n-1}, однозначно определяемая заданием выпуклых компактов $X_i \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$. Эта функция называется смешанной поверхностной функцией выпуклых компактов $X_i \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$. Можно показать, что

$$F[X_1, \ldots, X_{n-1}; d\omega] \geq 0.$$

Аналогично, функционал $V[X_1, \ldots, X_n]$, определенный первоначально для выпуклых тел $\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$, можно расширить до полилинейного непрерывного функционала, определенного при всех $X_i \in C(S^{n-1})$ ([8, с. 967], формула (3)).

Если $X_1 = X_2 = \ldots = X_{n-1} = X$, то полагаем $F[X_1, \ldots, X_{n-1}; d\omega] = F[X; d\omega]$.

Отметим также, что справедлива формула [8, с. 969]

$$V\big[Z + t\delta Z, \ldots, Z + t\delta Z, Z_1, \ldots, Z_{n-m}\big] = \sum_{k=0}^{m} t^k C_m^k V\big[\underbrace{\overbrace{Z, \ldots,}^{k} \delta Z, \ldots,}_{m} Z_1, \ldots, Z_{n-m}\big], \tag{9}$$

которая будет использована в дальнейшем изложении.

2. Постановка задачи. В пространстве $\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ рассмотрим ДДС

$$\overline{X} = \mathbf{A}X + \psi\big(V[X]\big)B, \tag{10}$$

где $X \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in L(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$, $B \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$. Предположим, что оператор $\mathbf{A}$ удовлетворяет условию $\mathbf{A}^q = \beta\mathbf{I}$ при некоторых натуральном q и положительном β. Пусть существует изолированная неподвижная точка $X^* \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ ДДС (10), которая определяется из уравнения

$$X^* = \mathbf{A}X^* + \psi\big(V[X^*]\big)B.$$

Напомним классическое определение устойчивости неподвижной точки ДДС (10). Обозначим через X_p p-итерацию отображения (10).

Определение. *Неподвижная точка* $X^* \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ *ДДС* (10) *называется*:

(1) *устойчивой по Ляпунову, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что из неравенства* $d_H(X_0, X^*) < \delta$ *следует, что* $\sup_{p\in\mathbb{Z}_+} d_H(X_p, X^*) < \varepsilon$;

(2) *асимптотически устойчивой по Ляпунову, если она устойчива и существует положительное число* ρ *такое, что при всех* $X_0 \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$, $d_H(X_0, X^*) < \rho$ *выполняется равенство* $d_H(X_p, X^*) \to 0$ *при* $p \to \infty$.

3. Основной результат. Пусть

$$\delta\overline{X} = h_{\overline{X}} - h_{X^*} \in C(S^{n-1}), \qquad \delta X = h_X - h_{X^*} \in C(S^{n-1}).$$

Вследствие формулы (9)

$$V[X] = V[X^*] + nV_1[X^*, \delta X] + o\big(\|\delta X\|_{C(S^{n-1})}\big), \qquad \|\delta X\|_{C(S^{n-1})} \to 0,$$

где $V_1[X^*, (\cdot)] = V\big[\underbrace{X^*, \ldots, X^*}_{n-1}, (\cdot)\big]$ — расширение функционала первого смешанного объема на пространство $C(S^{n-1})$.

Следовательно,

$$\psi\big(V[X]\big) = \psi\big(V[X^*]\big) + n\psi'_V\big(V[X^*]\big)V_1[X^*, \delta X] + o\big(\|\delta X\|_{C(S^{n-1})}\big), \quad \|\delta X\|_{C(S^{n-1})} \to 0.$$

Поэтому с учетом интегрального представления (8) уравнение (10) можно представить в виде

$$\delta\overline{X} = \mathcal{Z}\delta X + o\big(\|\delta X\|_{C(S^{n-1})}\big), \quad \|\delta X\|_{C(S^{n-1})} \to 0. \tag{11}$$

Здесь действие оператора $\mathcal{Z}$ на функции $f \in C(S^{n-1})$ определяется следующим образом:

$$(\mathcal{Z}f)(x) = \mathfrak{A}f(x) + \psi_V'\big(V[X^*]\big)h_B(x)\int\limits_{S^{n-1}} f(p)F\big[X^*; d\omega(p)\big], \quad x \in S^{n-1},$$

а $\mathfrak{A}$ — расширение оператора $\mathbf{A}$ на пространство $C(S^{n-1})$ — определяется так:

$$(\mathfrak{A}f)(p) = \|\mathbf{A}^*p\| f\left(\frac{\mathbf{A}^*p}{\|\mathbf{A}^*p\|}\right), \qquad f \in C(S^{n-1}), \quad p \in S^{n-1}, \tag{12}$$

где $\mathbf{A}^*$ — линейный оператор, сопряженный к $\mathbf{A}$.

Уравнение (11) является разностным уравнением в банаховом пространстве $C(S^{n-1})$.

Для формулировки теоремы об условиях асимптотической устойчивости неподвижной точки X^* ДДС (10) определим функции

$$\mathrm{A}_{mk} \in C(S^{n-1}), \qquad \mathrm{B}_{mk} \in (C(S^{n-1}))^*, \qquad k = \overline{1,q}, \quad 1 \le m \le k,$$

из рекуррентных соотношений

$$\mathrm{A}_{m,k+1} = \mathrm{A}_{mk}, \quad m = \overline{1,k}, \qquad \mathrm{A}_{k+1,k+1} = \psi_V'\big(V[X^*]\big)\mathfrak{A}^k h_B, \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{B}_{m,k+1}[d\omega] = \mathfrak{A}^*\mathrm{B}_{mk}[d\omega] + F[X^*; d\omega]\psi_V'(V[X^*])\int\limits_{S^{n-1}} h_B(\xi)\mathrm{B}_{mk}[d\omega(\xi)], \quad m = \overline{1,k}, \\ \mathrm{B}_{k+1,k+1}[d\omega] = F[X^*; d\omega],\end{gathered} \tag{14}$$

где $\mathfrak{A}^* \in L\big((C(S^{n-1}))^*\big)$ — сопряженный оператор к оператору $\mathfrak{A}$, с начальными условиями

$$\mathrm{A}_{11} = h_B, \qquad \mathrm{B}_{11}[d\omega] = F[X^*; d\omega]. \tag{15}$$

Введем матрицу

$$d_{lm} = \int\limits_{S^{n-1}} \mathrm{A}_{mq}(x)\mathrm{B}_{lq}[d\omega(x)], \qquad D = [d_{lm}]_{l,m=1}^q, \tag{16}$$

и ее характеристический полином

$$\Delta(\lambda) = \det[d_{lm} - \lambda\delta_{lm}]_{l,m=1}^q.$$

Теорема. *Предположим, что все корни алгебраического уравнения*

$$\Delta(\lambda - \beta) = 0$$

лежат внутри открытого единичного круга $B_1(0) \subset \mathbb{C}$ *и* $\beta < 1$.

Тогда неподвижная точка $X = X^*$ *ДДС* (10) *асимптотически устойчива по Ляпунову.*

Доказательство. Известно (см., например, [12]), что для асимптотической устойчивости неподвижной точки X^* ДДС (10) достаточно выполнения неравенства $r_\sigma(\mathcal{Z}) < 1$, где r_σ — спектральный радиус соответствующего линейного оператора. По теореме Данфорда об отображении спектра неравенство $r_\sigma(\mathcal{Z}) < 1$ эквивалентно неравенству $r_\sigma(\mathcal{Z}^q) < 1$.

Покажем, использовав метод математической индукции, что

$$(\mathcal{Z}^k f)(x) = \mathfrak{A}^k f(x) + \sum_{m=1}^{k} \mathrm{A}_{mk}(x) \int\limits_{S^{n-1}} f(p)\mathrm{B}_{mk}\big[d\omega(p)\big], \quad k \geq 1. \tag{17}$$

При $k = 1$ это очевидно. Предполагая, что это справедливо при некотором натуральном k, с учетом теоремы Фубини получаем

$$(\mathcal{Z}^{k+1} f)(x) = \mathfrak{A}^k(\mathcal{Z}f)(x) + \sum_{m=1}^{k} \mathrm{A}_{mk}(x) \int\limits_{S^{n-1}} (\mathcal{Z}f)(p)\mathrm{B}_{mk}\big[d\omega(p)\big] =$$

$$= \mathfrak{A}^k \left(\mathfrak{A}f(x) + \psi'_V\big(V[X^*]\big)h_B(x) \int\limits_{S^{n-1}} f(p)F\big[X^*; d\omega(p)\big] \right) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{k} \mathrm{A}_{mk}(x) \int\limits_{S^{n-1}} \left(\mathfrak{A}f(p) + \psi'_V\big(V[X^*]\big)h_B(p) \int\limits_{S^{n-1}} f(\xi)F\big[X^*; d\omega(\xi)\big] \right) \mathrm{B}_{mk}\big[d\omega(p)\big] =$$

$$= \mathfrak{A}^{k+1} f(x) + \psi'_V\big(V[X^*]\big)\mathfrak{A}^k h_B(x) \int\limits_{S^{n-1}} f(p)F[X^*; d\omega(p)] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{k} \mathrm{A}_{mk}(x) \int\limits_{S^{n-1}} \mathfrak{A}f(p)\mathrm{B}_{mk}\big[d\omega(p)\big] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{k} \mathrm{A}_{mk}(x) \int\limits_{S^{n-1}} \psi'_V\big(V[X^*]\big)h_B(p) \left(\int\limits_{S^{n-1}} f(\xi)F[X^*; d\omega(\xi)] \right) \mathrm{B}_{mk}\big[d\omega(p)\big] =$$

$$= \mathfrak{A}^{k+1} f(x) + \psi'_V\big(V[X^*]\big)\mathfrak{A}^k h_B(x) \int\limits_{S^{n-1}} f(p)F\big[X^*; d\omega(p)\big] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{k} \mathrm{A}_{mk}(x) \int\limits_{S^{n-1}} f(p)\mathfrak{A}^*\mathrm{B}_{mk}\big[d\omega(p)\big] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{k} \mathrm{A}_{mk}(x)\psi'_V\big(V[X^*]\big) \int\limits_{S^{n-1}} \left(\int\limits_{S^{n-1}} h_B(\xi)\mathrm{B}_{mk}\big[d\omega(\xi)\big] \right) f(p)F\big[X^*; d\omega(p)\big] =$$

$$= \mathfrak{A}^{k+1} f(x) + \sum_{m=1}^{k+1} \mathrm{A}_{m,k+1}(x) \int\limits_{S^{n-1}} f(p)\mathrm{B}_{m,k+1}\big[d\omega(p)\big],$$

что доказывает справедливость (17).

При $k = q$, вследствие предположения $\mathbf{A}^q = \beta \mathbf{I}$, имеем

$$(\mathcal{Z}^q f)(x) = \beta f(x) + (\mathfrak{J} f)(x),$$

$$(\mathfrak{J} f)(x) = \sum_{m=1}^{q} \mathrm{A}_{mq}(x) \int\limits_{S^{n-1}} f(p) \mathrm{B}_{mq}\big[d\omega(p)\big].$$

Изучим вопрос о спектре $\sigma(\mathfrak{J})$ оператора $\mathfrak{J}$. Пусть $g \in C(S^{n-1})$. Рассмотрим уравнение $(\mathfrak{J} - \lambda I) f = g$, которое можно записать в виде

$$\sum_{m=1}^{q} \mathrm{A}_{mq}(x) \int\limits_{S^{n-1}} f(p) \mathrm{B}_{mq}[d\omega(p)] - \lambda f(x) = g(x). \tag{18}$$

Умножая это уравнение на $\mathrm{B}_{lq}[d\omega(p)]$ и интегрируя по сфере S^{n-1}, получаем

$$\sum_{m=1}^{q} \int\limits_{S^{n-1}} \mathrm{A}_{mq}(x) \mathrm{B}_{lq}\big[d\omega(x)\big] \int\limits_{S^{n-1}} f(p) \mathrm{B}_{mq}\big[d\omega(p)\big] -$$

$$-\lambda \int\limits_{S^{n-1}} f(x) \mathrm{B}_{lq}\big[d\omega(x)\big] = \int\limits_{S^{n-1}} g(x) \mathrm{B}_{lq}\big[d\omega(x)\big].$$

Обозначим

$$\zeta_l = \int\limits_{S^{n-1}} f(x) \mathrm{B}_{lq}\big[d\omega(x)\big], \qquad \eta_l = \int\limits_{S^{n-1}} g(x) \mathrm{B}_{lq}\big[d\omega(x)\big]. \tag{19}$$

Тогда получаем линейную систему алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^{q} (d_{lm} - \lambda \delta_{lm}) \zeta_m = \eta_l.$$

Если $\Delta(\lambda) \neq 0$, то существует единственное решение ζ_l, $l = \overline{1, q}$, которое линейным образом выражается через η_l, $l = \overline{1, q}$:

$$\zeta_m = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{l=1}^{q} t_{ml}(\lambda) \eta_l,$$

где $t_{ml}(\lambda)$ — многочлены от λ. Таким образом, из (18) имеем

$$f(x) = \frac{1}{\lambda D(\lambda)} \sum_{m=1}^{q} \sum_{l=1}^{q} \mathrm{A}_{mq}(x) t_{ml}(\lambda) \int\limits_{S^{n-1}} g(p) \mathrm{B}_{lq}\big[d\omega(p)\big] - \frac{1}{\lambda} g(x).$$

Пусть $M = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid D(\lambda) = 0\} \cup \{0\}$, тогда если $\lambda \notin M$, то уравнение (18) имеет единственное решение $x = x(g)$, которое непрерывно по норме пространства $C(S^{n-1})$ зависит от g. Следовательно, $\lambda \in \rho(\mathfrak{J})$ и

$$\sigma(\mathfrak{J}) \subset M.$$

Из соотношения $\mathcal{Z}^q = \beta I + \mathfrak{J}$ следует, что

$$\sigma(\mathcal{Z}^q) = \beta + \sigma(\mathfrak{J}) \subset \beta + M \subset B_1(0) \subset \mathbb{C}.$$

Таким образом, неподвижная точка X^* ДДС (10) асимптотически устойчива по Ляпунову.

Теорема доказана.

Отметим, что условия асимптотической устойчивости могут быть сведены к конечной системе неравенств, ограничивающих коэффициенты характеристического полинома $\Delta(\lambda - \beta) = 0$, на основе известных критериев локализации корней полинома (например, критерия Шура–Кона [13]).

4. Каскады в пространстве $\mathbf{conv}\,\mathbb{R}^2$. В этом пункте рассматриваются ДДС в пространстве $\operatorname{conv}\mathbb{R}^2$. Отметим, что в этом случае каждый выпуклый компакт однозначно определяется 2π-периодической непрерывной функцией (приведенной опорной функцией) $H_X(\theta) = h_X(\cos\theta, \sin\theta)$, где $h_X(p)$ — опорная функция $X \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^2$.

Известно [14, с. 128], что функция $H_X(\theta)$ дифференцируема по Шварцу, ее производная $H'_X(\theta)$ является функцией ограниченной вариации и для функционала смешанной площади справедливо представление в виде интеграла Стильтьеса

$$S[X, f] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\mu_X(\theta), \qquad X \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^2, \quad f \in C[0, 2\pi],$$

$$\mu_X(\theta) = H'_X(\theta) + \int_0^{\theta} H_X(s)\, ds.$$

Рассмотрим ДДС в пространстве $\operatorname{conv}\mathbb{R}^2$

$$\overline{X} = \mathbf{A}X + \psi\big(S[X]\big)B, \tag{20}$$

где $X \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^2$, $\mathbf{A} = \beta\mathbf{U}_\alpha$, $\beta > 0$, $\mathbf{U}_\alpha$ — оператор поворота в положительном направлении на угол α, $S[X]$ — площадь выпуклого компакта X, $B \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^2$.

Предположим, что эта ДДС имеет неподвижную точку $X^* \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^2$. В частном случае, когда приведенная опорная функция $H_B(\theta)$ представляет собой тригонометрический полином

$$H_B(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} b_k e^{ik\theta}, \qquad b_{-k} = \overline{b}_k, \quad k = \overline{-N, N},$$

можно установить достаточные условия существования неподвижной точки X^* и представить явные формулы для ее вычисления. Отметим, что любой выпуклый компакт на плоскости $\operatorname{conv}\mathbb{R}^2$ можно сколь угодно точно аппроксимировать выпуклыми компактами, опорные функции которых являются тригонометрическими полиномами.

Для этого укажем дополнительные условия, при которых некоторый тригонометрический полином

$$T(\theta)=\sum_{k=-N}^{N} t_k e^{ik\theta}, \qquad t_{-k}=\bar{t}_k, \quad k=\overline{-N,N},$$

является приведенной опорной функцией некоторого выпуклого компакта $T\in\operatorname{conv}\mathbb{R}^2$, т. е. $H_T(\theta)=T(\theta)$.

Напомним некоторые известные факты, касающиеся тригонометрических полиномов [15]. Пусть $F(\theta)=\sum_{k=-N}^{N} f_k e^{ik\theta}$, $f_{-k}=\overline{f}_k$, $k=\overline{-N,N}$, — тригонометрический полином, которому сопоставим вектор

$$\hat{F}=(f_0,\operatorname{Re}f_1,\operatorname{Im}f_1,\ldots,\operatorname{Re}f_N,\operatorname{Im}f_N)\in\mathbb{R}^{2N+1}.$$

В пространстве $\mathbb{R}^{2N+1}$ определим конус $\mathfrak{K}$, соответствующий неотрицательным тригонометрическим полиномам. Согласно теореме Рисса – Фейера [15], для неотрицательности тригонометрического полинома $F(\theta)$ необходимо и достаточно, чтобы существовал тригонометрический полином $X(\theta)=\sum_{k=0}^{N} x_k e^{ik\theta}$, $x_k\in\mathbb{C}$, такой, что

$$F(\theta)=\sum_{k=-N}^{N} f_k e^{ik\theta}=\left|\sum_{k=0}^{N} x_k e^{ik\theta}\right|^2=\sum_{p=0,q=0}^{N} x_p\overline{x}_q e^{ik(p-q)\theta}=\big|X(\theta)\big|^2.$$

Приравнивая коэффициенты в этом соотношении, получаем систему $2N+1$ полиномиальных уравнений

$$P_m(f_0,\operatorname{Re}f_1,\operatorname{Im}f_1,\ldots,\operatorname{Re}f_N,\operatorname{Im}f_N,x_0,x_1,\ldots,x_N)=0, \qquad m=\overline{-N,N}.$$

Применяя теорему Зайденберга – Тарского [16], из этой системы можно исключить переменные $x_0,x_1,\ldots,x_N$ и прийти к конечной системе полиномиальных неравенств вида

$$Q_l(f_0,\operatorname{Re}f_1,\operatorname{Im}f_1,\ldots,\operatorname{Re}f_N,\operatorname{Im}f_N)\geq 0,$$

определяющих конус $\mathfrak{K}$.

Таким образом, $T\in\operatorname{conv}\mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда

$$\big(t_0,0,0,\ldots,(1-k^2)\operatorname{Re}t_k,(1-k^2)\operatorname{Im}t_k,\ldots,(1-N^2)\operatorname{Re}t_N,(1-N^2)\operatorname{Im}t_N\big)\in\mathfrak{K}.$$

Рассмотрим вопрос о существовании и вычислении неподвижной точки $X^*\in\operatorname{conv}\mathbb{R}^2$ ДДС (20).

Приведенную опорную функцию $H_{X^*}(\theta)$ неподвижной точки X^*,

$$X^*=\mathbf{A}X^*+\psi\big(S[X^*]\big)B,$$

будем искать в виде

$$H_{X^*}(\theta)=\sum_{k=-N}^{N} x_k e^{ik\theta}, \qquad x_{-k}=\overline{x}_k, \quad k=\overline{-N,N}.$$

Тогда

$$H_{X^*}(\theta)=\beta H_{X^*}(\theta-\alpha)+\psi\big(S[X^*]\big)H_B(\theta).$$

Следовательно,

$$H_{X^*}(\theta) = \psi\big(S[X^*]\big) \sum_{k=-N}^{N} \frac{b_k}{1-\beta e^{-ik\alpha}} e^{ik\theta}.$$

Применяя формулу для смешанной площади [14, с. 128], получаем

$$S[X^*] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (H^2_{X^*}(\theta) - (H'_{X^*}(\theta))^2)\, d\theta = \pi\psi^2(S[X^*]) \sum_{k=-N}^{N} \frac{(1-k^2)|b_k|^2}{1-2\beta\cos k\alpha + \beta^2}.$$

Следовательно, приходим к следующим условиям существования неподвижной точки ДДС (20).

Предложение 1. *Предположим, что алгебраическое уравнение*

$$s^* = \pi\psi^2(s^*) \sum_{k=-N}^{N} \frac{(1-k^2)|b_k|^2}{1-2\beta\cos k\alpha + \beta^2}$$

имеет решение $s^* \geq 0$ *и вектор*

$$\left(\frac{b_0}{1-\beta}, 0, 0, \ldots, (1-k^2)\,\mathrm{Re}\,\frac{b_k}{1-\beta e^{-ik\alpha}}, (1-k^2)\,\mathrm{Im}\,\frac{b_k}{1-\beta e^{-ik\alpha}}, \ldots\right) \in \mathfrak{K}.$$

Тогда существует неподвижная точка $X^* \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^2$ *ДДС* (20), *приведенная опорная функция которой имеет вид*

$$H_{X^*}(\theta) = \psi(s^*) \sum_{k=-N}^{N} \frac{b_k}{1-\beta e^{-ik\alpha}} e^{ik\theta}.$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости неподвижной точки X^* ДДС (20). Оператор $\mathcal{Z}$ имеет вид

$$(\mathcal{Z}F)(\theta) = \beta F(\theta-\alpha) + \psi'_S\big(S[X^*]\big) H_B(\theta) \int_0^{2\pi} F(\tau)\, d\mu_{X^*}(\tau).$$

Функции $\mathrm{A}_{kq}(\theta)$ и $\mu_{mq}(\theta)$ определим из рекуррентных уравнений

$$\mathrm{A}_{l,k+1}(\theta) = \mathrm{A}_{lk}(\theta), \quad l = \overline{1,k}, \qquad \mathrm{A}_{k+1,k+1}(\theta) = \beta^k \psi'_S\big(S[X^*]\big) H_B(\theta - k\alpha),$$

$$\mu_{l,k+1}(\theta) = \beta\mu_{lk}(\theta+\alpha) + \mu_{X^*}(\theta)\psi'_S\big(S[X^*]\big) \int_0^{2\pi} H_B(\tau) d\mu_{lk}(\tau), \qquad l = \overline{1,k}, \tag{21}$$

$$\mu_{k+1,k+1}(\theta) = \mu_{X^*}(\theta),$$

с начальными условиями

$$\mathrm{A}_{11}(\theta) = H_B(\theta), \qquad \mu_{11}(\theta) = \mu_{X^*}(\theta).$$

В этом случае характеристический многочлен $D(\lambda) = \det[D - \lambda I]$, $D = [d_{km}]_{k,m=1}^{q}$ — матрица с элементами

$$d_{km} = \int_0^{2\pi} \mathrm{A}_{kq}(\theta) d\mu_{mq}(\theta).$$

В частном случае, когда $H_B(\theta)$ является тригонометрическим полиномом, функция $\mu_{X^*}(\theta)$ дифференцируема и

$$d\mu_{X^*}(\theta) = \psi\big(S[X^*]\big) \sum_{k=-N}^{N} \frac{(1-k^2)b_k}{1-\beta e^{-ik\alpha}} e^{ik\theta}\, d\theta.$$

Обозначим

$$M = \{\lambda \in \mathbb{C}\ |\Delta(\lambda) = 0\} \cup \{0\}.$$

Непосредственным следствием доказанной теоремы является следующее утверждение.

Предложение 2. *Предположим, что*

$$\beta^q + M \subset B_1(0) \subset \mathbb{C}.$$

Тогда неподвижная точка $X^* \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^2$ *ДДС* (20) *является асимптотически устойчивой.*

5. Пример. Рассмотрим ДДС (20) в пространстве $\operatorname{conv}\mathbb{R}^2$, предполагая, что $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Пусть X^* — неподвижная точка этой ДДС.

Непосредственными вычислениями можно показать, что элементы матрицы D имеют вид

$$d_{11} = \beta^3 n_3 + \beta^2(n_1^2 + 2n_0n_2) + 3\beta n_0^2 n_1 + n_0^4,$$

$$d_{12} = \beta^2 n_2 + 2\beta n_0 n_1 + n_0^3, \qquad d_{13} = \beta n_1 + n_0^2, \qquad d_{14} = n_0,$$

$$d_{21} = \beta^3 n_0 + \beta^2(n_0n_3 + 2n_1n_2) + \beta(n_0^2 n_2 + n_0 n_1^2) + n_0^3 n_1,$$

$$d_{22} = \beta^2 n_3 + \beta(n_0n_2 + n_1^2) + n_0^2 n_1,$$

$$d_{23} = \beta n_2 + n_0 n_1, \quad d_{24} = n_1,$$

$$d_{31} = \beta^3 n_1 + \beta^2(n_0^2 + n_1n_3 + n_2^2) + \beta(n_0^2 n_3 + 2n_0n_1n_2) + n_0^3 n_2,$$

$$d_{32} = \beta^2 n_0 + \beta(n_0n_3 + n_1n_2) + n_0^2 n_2,$$

$$d_{33} = \beta n_3 + n_0 n_2, \qquad d_{34} = n_2,$$

$$d_{41} = \beta^3 n_2 + \beta^2(2n_0n_1 + n_2n_3) + \beta(2n_0n_1n_3 + n_0^3) + n_3 n_0^3,$$

$$d_{42} = \beta^2 n_1 + \beta(n_0^2 + n_1n_3) + n_0^2 n_3,$$

$$d_{43} = \beta n_0 + n_0 n_3, \quad d_{44} = n_3.$$

Здесь $n_k = \displaystyle\int_0^{2\pi} H_B\left(\theta - \frac{\pi k}{2}\right) d\mu_{X^*}(\theta)$, $k = 0,1,2,3$. Условия устойчивости неподвижной точки X^* следуют из предложения 2 и сводятся к проверке условий Шура – Кона локализации корней характеристического полинома матрицы D.

Пусть $\psi(s) = \operatorname{th} s$ и приведенная опорная функция $H_B(\theta)$ выпуклого компакта B является тригонометрическим полиномом. Рассмотрим трансцендентное уравнение

$$s^* = \pi \sum_{m=-N}^{N} \frac{(1-m^2)|b_m|^2}{1+\beta^2-2\beta\cos\frac{\pi m}{2}} \operatorname{th}^2 s^*. \tag{22}$$

Это уравнение всегда имеет тривиальное решение, ему соответствует неподвижная точка $X^* = \{0\}$. Если

$$\sum_{m=-N}^{N} \frac{(1-m^2)|b_m|^2}{1+\beta^2-2\beta\cos\frac{\pi m}{2}} > \frac{27}{16\pi},$$

то уравнение (22) имеет два положительных решения s_1^* и s_2^*. Пусть выполняются условия предложения 1, тогда решениям s_m^*, $m=1,2$, соответствуют две неподвижные точки X_1^* и X_2^*,

$$H_{X_m^*}(\theta) = \psi(s_m^*) \sum_{k=-N}^{N} \frac{b_k}{1-\beta e^{-\pi i k/2}} e^{ik\theta}, \qquad m = 1,2.$$

В этом случае

$$n_k = 2\pi\psi(s^*)\psi'(s^*) \sum_{m=-N}^{N} \frac{(1-m^2)|b_m|^2 e^{-\frac{\pi k m i}{2}}}{1-\beta e^{\frac{\pi m i}{2}}}, \qquad k = 0,1,2,3.$$

В частности, если B — круг с центром в начале координат радиуса r, то $H_B(\theta) = r$ и условия устойчивости принимают особенно простую форму.

В случае, когда $r \in (0, r_0)$, $r_0 = \dfrac{3\sqrt{3}(1-\beta)}{4\sqrt{\pi}}$, существует одна тривиальная неподвижная точка и она является асимптотически устойчивой. При $r > r_0$ кроме тривиальной неподвижной точки существуют еще две неподвижные точки, которые являются кругами с радиусами $R_m = \dfrac{r \operatorname{th} s_m^*}{1-\beta}$, s_m^* — корни трансцендентного уравнения

$$s^* = \frac{\pi r^2}{(1-\beta)^2} \operatorname{th}^2 s^*.$$

Характеристический полином $\Delta(\lambda)$ в этом случае имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 - \operatorname{tr} D \lambda^3, \qquad \operatorname{tr} D = \left(\beta + \frac{2\pi \operatorname{th} s_m^* r^2}{(1-\beta)\operatorname{ch}^2 s_m^*}\right)^4 - \beta^4.$$

Условия асимптотической устойчивости неподвижной точки таковы:

$$\beta < 1, \quad \frac{2\pi \operatorname{th} s_m^* r^2}{(1-\beta)^2 \operatorname{ch}^2 s_m^*} < 1.$$

Используя элементарные методы и графический анализ, можно показать, что одна из неподвижных точек X_1^*, для которой $S[X_1^*] < s^{**} \approx 0{,}771702$, неустойчива, а другая неподвижная точка X_2^*, для которой $S[X_2^*] > s^{**}$, асимптотически устойчива.

6. Заключение. Результаты А. Д. Александрова о расширении основных понятий теории выпуклых тел позволяют построить уравнение в вариациях в окрестности неподвижной точки ДДС в пространстве $\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$. Уравнение в вариациях порождает ДДС в банаховом пространстве $C(S^{n-1})$, что дает возможность установить условия асимптотической устойчивости неподвижных точек ДДС в пространстве $\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ по линейному приближению. Для изученных в настоящей работе квазилинейных ДДС установлено, что ограничение $\mathbf{A}^q = \beta\mathbf{I}$ на линейную часть ДДС позволяет свести вопрос об устойчивости неподвижной точки к локализации корней характеристического многочлена степени q, аналогично случаю конечномерной динамической системы. Представляет интерес исследование ДДС в пространстве $\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ при более общих предположениях относительно оператора $\mathbf{A}$.

Литература

1. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: Астропринт, 1999. – 356 с.
2. *Плотников А. В., Скрипник Н. В.* Дифференциальные уравнения с „четкой” и нечеткой многозначной правой частью: асимптотические методы. – Одесса: Астропринт, 2009.
3. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007.
4. *Gnana Bhaskar T., Shaw M.* Stability results for set difference equations // Dynam. Systems and Appl. – 2004. – **13**. – P. 479–485.
5. *Lakshmikantham V., Gnana Bhaskar T., Vasundhara Devi J.* Theory of set differential equations in metric spaces. – London: Cambridge Sci. Publ., 2006.
6. *Slyn'ko V. I.* The stability of fixed points of discrete dynamical systems in the space $\operatorname{conv} R^n$ // Funct. Anal. and Appl. – 2016. – **50**, № 2. – P. 163 – 165.
7. *Slyn'ko V. I.* Stability in terms of two measures for set difference equations in space $\operatorname{conv} R^n$ // Appl. Anal. – 2017. – **96**, № 2. – P. 278 – 292.
8. *Александров А. Д.* К теории смешанных объемов выпуклых тел. I. Расширение некоторых понятий теории выпуклых тел // Мат. сб. – 1937. – **2(44)**, № 5. – С. 947 – 972.
9. *Черноусько Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. – М.: Наука, 1988. – 319 с.
10. *Radstrem H.* An embedding theorem for spaces of convex sets // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – **3**. – P. 165 – 169.
11. *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. – М.: Физматлит, 2014. – 597 с.
12. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 356 с.
13. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. – М.: Наука, 1979. – 304 с.
14. *Бляшке В.* Круг и шар. – М.: Наука, 1967. – 232 с.
15. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973. – 552 с.
16. *Горин Е. А.* Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций от нескольких переменных // Успехи мат. наук. – 1961. – **16**, № 1. – С. 91 – 118.

Получено 24.01.17,
после доработки — 20.02.17