УДК 517.956

А. Т. Асанова (Ин-т математики и мат. моделирования МОН Республики Казахстан, Алматы)

К ТЕОРИИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

We consider a nonlocal problem with integral conditions for a system of hyperbolic equations of the second order. By method of introduction of functional parameters, the investigated problem is reduced to an equivalent problem formed by the Goursat problem for a system of hyperbolic equations with parameters and integral relations. Algorithms for finding approximate solutions of this problem are constructed and their convergence to the exact solution is demonstrated. Sufficient conditions for the unique solvability of the equivalent problem are obtained in terms of the initial data. Moreover, the conditions of unique solvability of the nonlocal problem with integral conditions for system of hyperbolic equations are established in terms of the coefficients of the system and kernels in the integral conditions.

Розглядається нелокальна задача з інтегральними умовами для системи гіперболічних рівнянь другого порядку. Методом уведення функціональних параметрів досліджувану задачу зведено до еквівалентної задачі, що складається із задачі Гурса для системи гіперболічних рівнянь з параметрами та інтегральним співвідношенням. Побудовано алгоритми знаходження наближених розв'язків зазначеної задачі та показано їх збіжність до її точного розв'язку. Отримано достатні умови існування єдиного розв'язку еквівалентної задачі у термінах вихідних даних. Встановлено умови однозначної розв'язності нелокальної задачі з інтегральними умовами для системи гіперболічних рівнянь у термінах коефіцієнтів системи та ядер в інтегральних умовах.

1. Введение и постановка задачи. Как известно, нелокальными задачами принято называть задачи, в которых условия даны в виде комбинации значения искомого решения и (или) его производных в различных точках границы, либо же в точках границы и в каких-либо внутренних точках [1 – 3]. Задачи такого типа возникают при математическом моделировании различных физических, химических, биологических и экологических явлений, когда вместо классических краевых условий задается определенная связь значений искомой функции на границе области и внутри нее. Подобные ситуации имеют место, например, при исследовании распространения тепла, влагопереноса в пористых средах, явлений, происходящих в плазме, некоторых технологических процессов, задач математической биологии и демографии, задач механики твердого тела, теории упругости и теории оболочек [1 – 6].

В настоящее время теория нелокальных задач интенсивно развивается и является важным разделом теории дифференциальных уравнений с частными производными. Большой интерес в этой области представляют задачи с нелокальными интегральными условиями [5 – 17]. Такие задачи служат удобным способом описания условий, налагаемых на искомое решение в тех случаях, когда, например, невозможно непосредственное измерение каких-либо физических величин на границе области, но известно их усредненное значение внутри. Иногда интегральные нелокальные условия считают обобщением дискретных нелокальных условий или условий локального смещения (сдвига). На сегодняшний день разработаны методы исследования нелокальных задач с интегральными условиями и успешно применены к решению различных классов дифференциальных уравнений. Теория нелокальных задач для уравнений гиперболического типа является одним из важных разделов современной математической физики. Несмотря на большое количество публикаций в данном направлении, все еще остаются актуальными вопросы существования, единственности решения исследуемых задач, а также способы их нахождения. В этой связи модификация известных методов и создание новых методов исследования нелокальных задач для гиперболических уравнений позволяют решить многие вопросы указанной теории. В настоящей статье предпринимается попытка восполнить этот пробел: предлагается новый подход к исследованию и решению нелокальных задач с интегральными условиями для систем уравнений гиперболического типа второго порядка, основанный на введении новых неизвестных функциональных параметров [18 – 23]. Рассматриваемая задача сводится к эквивалентной задаче, содержащей известную задачу Гурса для гиперболических уравнений и краевые задачи с интегральным условием для обыкновенных дифференциальных уравнений относительно параметров. Устанавливаются условия однозначной разрешимости краевых задач с интегральным условием для обыкновенных дифференциальных уравнений в терминах исходных данных. Предложен способ построения приближенных решений эквивалентной задачи. Получены условия существования решения нелокальной задачи с интегральными условиями для систем уравнений гиперболического типа второго порядка.

Рассматривается нелокальная задача с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными в прямоугольной области $\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x), \tag{1.1}$$

$$\int\limits_0^a K(t,\xi)u(t,\xi)d\xi = \psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.2}$$

$$\int\limits_0^b M(\tau,x)u(\tau,x)d\tau = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{1.3}$$

где $u = \mathrm{col}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $(n\times n)$-матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ и n-вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на Ω, $(n \times n)$-матрица $K(t,x)$ и n-вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы по t на Ω и $[0,T]$ соответственно, $(n \times n)$-матрица $M(t,x)$ и n-вектор-функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируемы по x на Ω и $[0,\omega]$ соответственно, $0 < a \le \omega$, $0 < b \le T$,

$$\|u(t,x)\| = \max_{i=\overline{1,n}} \big|u_i(x,t)\big|, \qquad \|A(t,x)\| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^n \big|a_{ij}(t,x)\big|.$$

Через $C(\Omega, R^n)$ обозначим пространство непрерывных на Ω функций $u\colon \Omega \to R^n$ с нормой $\|u\|_1 = \max_{(t,x)\in\Omega} \|u(t,x)\|$.

Функция $u(t,x) \in C(\Omega, R^n)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$, называется классическим решением нелокальной задачи (1.1) – (1.3), если она удовлетворяет системе (1.1) и интегральным условиям (1.2), (1.3).

Ранее для исследования и решения нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений был предложен метод введения функциональных параметров [18 – 23]. Были установлены достаточные условия однозначной разрешимости, необходимые и достаточные условия корректной разрешимости нелокальных краевых задач с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений со смешанными производными. В работах [22, 23] исследованы нелокальные задачи для систем гиперболических уравнений с интегральным условием по одной из переменных и получены условия корректной разрешимости. В настоящей работе на основе модификации этого метода [24] установлены условия существования единственного классического решения задачи (1.1) – (1.3) в терминах исходных данных. При этом относительно коэффициентов системы (1.1) предполагается только непрерывность в области Ω, что значительно расширяет класс разрешимых нелокальных задач с интегральными условиями. Рассматриваемая задача сведена к эквивалентной задаче, состоящей из задачи Гурса для системы гиперболических уравнений и краевых задач с интегральным условием для обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложены алгоритмы нахождения приближенных решений эквивалентной задачи. Частные случаи задачи (1.1) – (1.3) рассмотрены в [25 – 26]. В работе [27] условия однозначной разрешимости задачи (1.1) – (1.3) установлены в терминах фундаментальных матриц системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно параметров. В данной статье условия однозначной разрешимости задачи (1.1) – (1.3) получены в терминах коэффициентов системы (1.1) и ядер интегралов в граничных условиях. Решения вспомогательных краевых задач с интегральным условием для системы обыкновенных дифференциальных уравнений построены через общие решения дифференциальных уравнений.

2. Переход к эквивалентной задаче. Обозначим $\mu(t) = u(t,0) - \dfrac{1}{2}u(0,0)$, $\lambda(x) = u(0,x) - \dfrac{1}{2}u(0,0)$. В задаче (1.1) – (1.3) выполним замену $u(t,x) = U(t,x) + \mu(t) + \lambda(x)$ и получим эквивалентную задачу

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial U}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial U}{\partial t} + C(t,x)U + f(t,x) +$$

$$+ A(t,x)\dot{\lambda}(x) + B(t,x)\dot{\mu}(t) + C(t,x)\lambda(x) + C(t,x)\mu(t), \tag{2.1}$$

$$U(t,0) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{2.2}$$

$$U(0,x) = 0, \quad x \in [0,\omega], \tag{2.3}$$

$$\int\limits_0^a K(t,\xi)d\xi \cdot \mu(t) = \psi(t) - \int\limits_0^a K(t,\xi)U(t,\xi)d\xi - \int\limits_0^a K(t,\xi)\lambda(\xi)d\xi, \quad t \in [0,T], \tag{2.4}$$

$$\int\limits_0^b M(\tau,x)d\tau \cdot \lambda(x) = \varphi(x) - \int\limits_0^b M(\tau,x)U(\tau,x)d\tau - \int\limits_0^b M(\tau,x)\mu(\tau)d\tau, \quad x \in [0,\omega]. \tag{2.5}$$

Решением задачи (2.1) – (2.5) будем называть тройку функций $\big(U(t,x), \mu(t), \lambda(x)\big)$, где функция $U(t,x)$ принадлежит $C(\Omega, R^n)$ и имеет частные производные $\dfrac{\partial U(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\dfrac{\partial U(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\dfrac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$, функции $\mu(t)$ и $\lambda(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$ и $[0,\omega]$ соответственно, удовлетворяют системе гиперболических уравнений (2.1), условиям на характеристиках (2.2), (2.3) и функциональным соотношениям (2.4), (2.5) при $\mu(0) = \lambda(0)$.

Задачи (1.1) – (1.3) и (2.1) – (2.5) эквивалентны. Если функция $u^*(t,x)$ является решением задачи (1.1) – (1.3), то тройка функций $(U^*(t,x),\ \mu^*(t),\ \lambda^*(x))$, где $U^*(t,x) = u^*(t,x) - \mu^*(t) - \lambda^*(x)$, $\mu^*(t) = u^*(t,0) - \frac{1}{2}u^*(0,0)$, $\lambda^*(x) = u^*(0,x) - \frac{1}{2}u^*(0,0)$, будет решением задачи (2.1) – (2.5).

Обратное также справедливо. Если тройка функций $\big(U^{**}(t,x), \mu^{**}(t), \lambda^{**}(x)\big)$ является решением задачи (2.1) – (2.5), то функция $u^{**}(t,x)$, определяемая равенством

$$u^{**}(t,x) = U^{**}(t,x) + \mu^{**}(t) + \lambda^{**}(x),$$

где $u^{**}(t,0) - \frac{1}{2}u^{**}(0,0) = \mu^{**}(t)$, $u^{**}(0,x) - \frac{1}{2}u^{**}(0,0) = \lambda^{**}(x)$, будет решением задачи (1.1) – (1.3).

Задача (2.1) – (2.5) при фиксированных $\mu(t)$, $\lambda(x)$ является задачей Гурса относительно функции $U(t,x)$ в области Ω.

Обозначим $V(t,x) = \dfrac{\partial U(t,x)}{\partial x}$, $W(t,x) = \dfrac{\partial U(t,x)}{\partial t}$. Тогда из условий (2.2), (2.3) следует $W(t,0) = V(0,x) = 0$. Кроме того, справедливо равенство $\dfrac{\partial W(t,x)}{\partial x} = \dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t}$.

Решение задачи Гурса эквивалентно системе трех интегральных уравнений

$$V(t,x) = \int\limits_0^t \Big\{A(\tau,x)V(\tau,x) + B(\tau,x)W(\tau,x) + C(\tau,x)U(\tau,x) + f(\tau,x) +$$

$$+ A(\tau,x)\dot{\lambda}(x) + B(\tau,x)\dot{\mu}(\tau) + C(\tau,x)\lambda(x) + C(\tau,x)\mu(\tau)\Big\}d\tau, \tag{2.6}$$

$$W(t,x) = \int\limits_0^x \Big\{A(t,\xi)V(t,\xi) + B(t,\xi)W(t,\xi) + C(t,\xi)U(t,\xi) + f(t,\xi) +$$

$$+ A(t,\xi)\dot{\lambda}(\xi) + B(t,\xi)\dot{\mu}(t) + C(t,\xi)\lambda(\xi) + C(t,\xi)\mu(t)\Big\}d\xi, \tag{2.7}$$

$$U(t,x) = \int\limits_0^t W(\tau,x)d\tau = \int\limits_0^x V(t,\xi)d\xi, \tag{2.8}$$

а соотношения (2.4), (2.5) позволяют определить неизвестные параметры $\mu(t)$, $\lambda(x)$, удовлетворяющие условию $\mu(0) = \lambda(0)$.

Условие А. Пусть $(n \times n)$-матрица $B_1(t) = \displaystyle\int_0^a K(t,\xi)d\xi$ обратима для всех $t \in [0,T]$, а $(n \times n)$-матрица $B_2(x) = \displaystyle\int_0^b M(\tau,x)d\tau$ обратима для всех $x \in [0,\omega]$.

3. Вспомогательные утверждения и алгоритм метода. Рассмотрим две краевые задачи с интегральными условиями для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mu}(t) = \dot{g}_1(t), \quad t \in [0, T], \tag{3.1}$$

$$\int_0^b M(\tau, 0) d\tau \mu(0) + \int_0^b M(\tau, 0)\mu(\tau) d\tau = \varphi(0), \tag{3.2}$$

$$\dot{\lambda}(x) = \dot{g}_2(x), \quad x \in [0, \omega], \tag{3.3}$$

$$\int_0^a K(0, \xi) d\xi \lambda(0) + \int_0^a K(0, \xi)\lambda(\xi) d\xi = \psi(0), \tag{3.4}$$

где

$$g_1(t) = \big[B_1(t)\big]^{-1} \left\{ \psi(t) - \int_0^a K(t, \xi)\big[U(t, \xi) + \lambda(\xi)\big] d\xi \right\},$$

$$g_2(x) = \big[B_2(x)\big]^{-1} \left\{ \varphi(x) - \int_0^b M(\tau, x)\big[U(\tau, x) + \mu(\tau)\big] d\tau \right\}.$$

Соотношение (2.4) эквивалентно задаче (3.1), (3.2), а соотношение (2.5) — задаче (3.3), (3.4) при выполнении условий А и согласования.

Функция $\mu(t) \in C\big([0, T], R^n\big)$, имеющая производную $\dot{\mu}(t) \in C([0, T], R^n)$, называется решением задачи (3.1), (3.2), если она удовлетворяет системе (3.1) для всех $t \in [0, T]$ и краевому условию (3.2).

Функция $\lambda(x) \in C\big([0, \omega], R^n\big)$, имеющая производную $\dot{\lambda}(x) \in C\big([0, \omega], R^n\big)$, называется решением задачи (3.3), (3.4), если она удовлетворяет системе (3.3) для всех $x \in [0, \omega]$ и краевому условию (3.4).

Единственное решение задачи (3.1), (3.2) имеет вид

$$\mu(t) = g_1(t) + \frac{1}{2}\big[B_2(0)\big]^{-1}\varphi(0) - \frac{1}{2}\big[B_2(0)\big]^{-1} \int_0^b M(\tau, 0)\big\{g_1(\tau) + g_1(0)\big\} d\tau, \quad t \in [0, T], \tag{3.5}$$

а единственное решение задачи (3.3), (3.4) —

$$\lambda(x) = g_2(x) + \frac{1}{2}\big[B_1(0)\big]^{-1}\psi(0) - \frac{1}{2}\big[B_1(0)\big]^{-1} \int_0^a K(0, \xi)\big\{g_2(\xi) + g_2(0)\big\} d\xi, \quad x \in [0, \omega]. \tag{3.6}$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.1. *Предположим, что выполнено условие* А. *Тогда задача* (3.1), (3.2) *имеет единственное решение* $\mu^*(t) \in C([0, T], R^n)$, *представимое в виде* (3.5), *и справедлива оценка*

$$\max_{t \in [0,T]} \|\mu^*(t)\| \le \mathcal{K}_1 \max\left(\max_{t \in [0,T]} \|g_1(t)\|, \|\varphi(0)\| \right), \tag{3.7}$$

где $\mathcal{K}_1 = 1 + \dfrac{1}{2}\big\|[B_2(0)]^{-1}\big\| \Big[1 + 2b \max_{t \in [0,b]} \big\|M(t, 0)\big\|\Big]$.

Теорема 3.2. *Предположим, что выполнено условие* А. *Тогда задача* (3.3), (3.4) *имеет единственное решение* $\lambda^*(x) \in C\big([0,\omega], R^n\big)$, *представимое в виде* (3.6), *и справедлива оценка*

$$\max_{x\in[0,\omega]} \|\lambda^*(x)\| \le \mathcal{K}_2 \max\left(\max_{x\in[0,\omega]} \|G_2(x)\|, \|\psi(0)\|\right), \tag{3.8}$$

где $\mathcal{K}_2 = 1 + \dfrac{1}{2}\big\|[B_1(0)]^{-1}\big\|\Big[1 + 2a\max_{x\in[0,a]}\|K(0,x)\|\Big]$.

Алгоритм нахождения решения задачи (2.1) – (2.5).

Шаг 0. 1. Полагая $U(t,x)=0,\ \lambda(x)=0$ в правой части системы (3.1), определяем $\dot{\mu}^{(0)}(t)$, а из представления (3.5) — $\mu^{(0)}(t)$ для всех $t\in[0,T]$. Полагая $U(t,x)=0,\ \mu(t)=0$ в правой части системы (3.3), определяем $\dot{\lambda}^{(0)}(x)$, а из представления (3.6) — $\lambda^{(0)}(x)$ для всех $x\in[0,\omega]$.

2. Из задачи Гурса (2.1) – (2.3) при $\dot{\lambda}(x)=\dot{\lambda}^{(0)}(x),\ \dot{\mu}(t)=\dot{\mu}^{(0)}(t),\ \lambda(x)=\lambda^{(0)}(x),\ \mu(t)=\mu^{(0)}(t)$ находим $U^{(0)}(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Omega$.

Шаг 1. 1. Полагая $U(t,x)=U^{(0)}(t,x),\ \lambda(x)=\lambda^{(0)}(x)$ в правой части системы (3.1), определяем $\dot{\mu}^{(1)}(t)$, а из представления (3.5) — $\mu^{(1)}(t)$ для всех $t\in[0,T]$. Полагая $U(t,x)=U^{(0)}(t,x)$, $\mu(t)=\mu^{(0)}(t)$ в правой части системы (3.3), определяем $\dot{\lambda}^{(1)}(x)$, а из представления (3.6) — $\lambda^{(1)}(x)$ для всех $x\in[0,\omega]$.

2. Из задачи Гурса (2.1) – (2.3) при $\dot{\lambda}(x)=\dot{\lambda}^{(1)}(x),\ \dot{\mu}(t)=\dot{\mu}^{(1)}(t),\ \lambda(x)=\lambda^{(1)}(x),\ \mu(t)=\mu^{(1)}(t)$ находим $U^{(1)}(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Omega$.

И так далее.

Шаг m. 1. Полагая $U(t,x)=U^{(m-1)}(t,x),\ \lambda(x)=\lambda^{(m-1)}(x)$ в правой части системы (3.1), определяем $\dot{\mu}^{(m)}(t)$, а из представления (3.5) — $\mu^{(m)}(t)$ для всех $t\in[0,T]$. Полагая $U(t,x)=U^{(m-1)}(t,x),\ \mu(t)=\mu^{(m-1)}(t)$ в правой части системы (3.3), определяем $\dot{\lambda}^{(m)}(x)$, а из представления (3.6) — $\lambda^{(m)}(x)$ для всех $x\in[0,\omega]$.

2. Из задачи Гурса (2.1) – (2.3) при $\dot{\lambda}(x)=\dot{\lambda}^{(m)}(x),\ \dot{\mu}(t)=\dot{\mu}^{(m)}(t),\ \lambda(x)=\lambda^{(m)}(x)$, $\mu(t)=\mu^{(m)}(t)$ находим $U^{(m)}(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Omega,\quad m=1,2,\ldots$.

4. Основные результаты. Пусть

$$\alpha = \max_{(t,x)\in\Omega}\|A(t,x)\|,\qquad \beta = \max_{(t,x)\in\Omega}\|B(t,x)\|,\qquad \gamma = \max_{(t,x)\in\Omega}\|C(t,x)\|,$$

$$H = \alpha+\beta+\gamma,\qquad l_0 = \max(T,\omega)He^{H(T+\omega)},$$

$$\kappa_1 = \max_{(t,x)\in\Omega}\|K(t,x)\|,\qquad \kappa_2 = \max_{(t,x)\in\Omega}\left\|\frac{\partial K(t,x)}{\partial t}\right\|,$$

$$\sigma_1 = \max_{(t,x)\in\Omega}\|M(t,x)\|,\qquad \sigma_2 = \max_{(t,x)\in\Omega}\left\|\frac{\partial M(t,x)}{\partial x}\right\|,$$

$$\beta_1 = \max_{t\in[0,T]}\big\|[B_1(t)]^{-1}\big\|,\qquad \beta_2 = \max_{x\in[0,\omega]}\big\|[B_2(x)]^{-1}\big\|,$$

$$l_1(a) = a\beta_1\kappa_1(1+l_0),\qquad l_2(b) = b\beta_2\sigma_1(1+l_0),$$

$$l_3(a) = a\beta_1\big\{a\kappa_2\beta_1\kappa_1+\kappa_2+(a\kappa_2\beta_1\kappa_1+\kappa_1+\kappa_2)l_0\big\},$$

$$l_4(b) = b\beta_2\big\{b\sigma_2\beta_2\sigma_1+\sigma_2+(b\sigma_2\beta_2\sigma_1+\sigma_1+\sigma_2)l_0\big\}.$$

Следующее утверждение дает условия сходимости предложенного алгоритма и существование единственного решения задачи (2.1) – (2.5).

Теорема 4.1. *Пусть*:

1) $(n\times n)$*-матрицы* $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ *и* n*-вектор-функция* $f(t,x)$ *непрерывны на* Ω;

2) $(n \times n)$*-матрица* $K(t,x)$ *и* n*-вектор-функция* $\psi(t)$ *непрерывно дифференцируемы по* t *на* Ω *и* $[0,T]$ *соответственно*; $(n \times n)$*-матрица* $M(t,x)$ *и* $(n \times n)$*-матрица* $\varphi(x)$ *непрерывно дифференцируемы по* x *на* Ω *и* $[0,\omega]$ *соответственно*;

3) *выполнено условие* A;

4) *выполняется неравенство*

$$q = \max\big(\mathcal{K}_1 l_1(a) + \mathcal{K}_2 l_2(b), l_3(a), l_4(b)\big) < 1.$$

Тогда задача (2.1) – (2.5) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть выполнены условия 1 – 3 теоремы 4.1. Используем нулевой шаг алгоритма и рассмотрим краевые задачи с интегральным условием

$$\dot{\mu}(t) = [B_1(t)]^{-1}\dot{\psi}(t) - [B_1(t)]^{-1}\cdot \dot{B}_1(t)\cdot [B_1(t)]^{-1}\psi(t), \quad t\in[0,T], \tag{4.1}$$

$$\int\limits_0^b M(\tau,0)d\tau\mu(0) + \int\limits_0^b M(\tau,0)\mu(\tau)d\tau = \varphi(0), \tag{4.2}$$

$$\dot{\lambda}(x) = [B_2(x)]^{-1}\dot{\varphi}(x) - [B_2(x)]^{-1}\cdot \dot{B}_2(x)\cdot [B_2(x)]^{-1}\varphi(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{4.3}$$

$$\int\limits_0^a K(0,\xi)d\xi\lambda(0) + \int\limits_0^a K(0,\xi)\lambda(\xi)d\xi = \psi(0). \tag{4.4}$$

Условия 3, включающие условия теорем 3.1 и 3.2, обеспечивают однозначную разрешимость задач (4.1), (4.2) и (4.3), (4.4). Найдем начальные приближения $\mu^{(0)}(t)$ и $\lambda^{(0)}(x)$ из задач (4.1), (4.2) и (4.3), (4.4). Тогда, аналогично оценкам (3.7) и (3.8), для функций $\mu^{(0)}(t)$, $\lambda^{(0)}(x)$ и их производных $\dot{\mu}^{(0)}(t)$, $\dot{\lambda}^{(0)}(x)$ имеют место неравенства

$$\max_{t\in[0,T]}\|\mu^{(0)}(t)\| \le \mathcal{K}_1 \max\left(\beta_1 \max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|, \|\varphi(0)\|\right), \tag{4.5}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|\dot{\mu}^{(0)}(t)\| \le \beta_1 \max_{t\in[0,T]}\|\dot{\psi}(t)\| + a\kappa_2\beta_1^2 \max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|, \tag{4.6}$$

$$\max_{x\in[0,\omega]}\|\lambda^{(0)}(x)\| \le \mathcal{K}_2 \max\left(\beta_2 \max_{x\in[0,\omega]}\|\varphi(x)\|, \|\psi(0)\|\right), \tag{4.7}$$

$$\max_{x\in[0,\omega]}||\dot{\lambda}^{(0)}(x)|| \le \beta_2 \max_{x\in[0,\omega]}\|\dot{\varphi}(x)\| + b\sigma_2\beta_2^2 \max_{x\in[0,\omega]}\|\varphi(x)\|. \tag{4.8}$$

Решая задачу Гурса (2.1) – (2.3) для найденных значений параметров, из системы интегральных уравнений (2.6) – (2.8) находим $V^{(0)}(t,x)$, $W^{(0)}(t,x)$, $U^{(0)}(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Omega$.

Выполняется неравенство

$$\max\Big(\|V^{(0)}(t,x)\|, \|W^{(0)}(t,x)\|, \|U^{(0)}(t,x)\|\Big) \le \max(T,\omega)e^{H(T+\omega)} \max_{(t,x)\in\Omega} \|\widetilde{f}(t,x)\|, \qquad (4.9)$$

где $\widetilde{f}(t,x) = A(t,x)\dot{\lambda}^{(0)}(x) + B(t,x)\dot{\mu}^{(0)}(t) + C(t,x)\Big[\lambda^{(0)}(x) + \mu^{(0)}(t)\Big] + f(t,x)$.

Последовательно из m-го шага алгоритма определяем функции $\mu^{(m)}(t),\ \lambda^{(m)}(x),\ \dot{\mu}^{(m)}(t),$ $\dot{\lambda}^{(m)}(x),\ V^{(m)}(t,x),\ W^{(m)}(t,x),\ U^{(m)}(t,x)$, а из $(m+1)$-го шага алгоритма находим $\mu^{(m+1)}(t),$ $\lambda^{(m+1)}(x),\ \dot{\mu}^{(m+1)}(t),\ \dot{\lambda}^{(m+1)}(x),\ V^{(m+1)}(t,x),\ W^{(m+1)}(t,x),\ U^{(m+1)}(t,x),\ m = 1,2,\ldots.$

Оценивая соответствующие разности последовательных приближений, получаем

$$\max_{t\in[0,T]} \|\mu^{(m+1)}(t) - \mu^{(m)}(t)\| \le$$

$$\le \mathcal{K}_1\beta_1\kappa_1 \left[\max_{t\in[0,T]} \int_0^a \|U^{(m)}(t,\xi) - U^{(m-1)}(t,\xi)\|d\xi + \int_0^a \|\lambda^{(m)}(\xi) - \lambda^{(m-1)}(\xi)\|d\xi\right], \qquad (4.10)$$

$$\max_{x\in[0,\omega]} \|\lambda^{(m+1)}(x) - \lambda^{(m)}(x)\| \le$$

$$\le \mathcal{K}_2\beta_2\sigma_1 \left[\max_{x\in[0,\omega]} \int_0^b \|U^{(m)}(\tau,x) - U^{(m-1)}(\tau,x)\|d\tau + \int_0^b \|\mu^{(m)}(\tau) - \mu^{(m-1)}(\tau)\|d\tau\right], \qquad (4.11)$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|\dot{\mu}^{(m+1)}(t) - \dot{\mu}^{(m)}(t)\| \le \beta_1\kappa_1 \max_{t\in[0,T]} \int_0^a \|W^{(m)}(t,\xi) - W^{(m-1)}(t,\xi)\|d\xi +$$

$$+\beta_1\kappa_2(1 + a\beta_1\kappa_1) \max_{t\in[0,T]} \int_0^a \|U^{(m)}(t,\xi) - U^{(m-1)}(t,\xi)\|d\xi +$$

$$+\beta_1\kappa_2(1 + a\beta_1\kappa_1) \int_0^a \|\lambda^{(m)}(\xi) - \lambda^{(m-1)}(\xi)\|d\xi, \qquad (4.12)$$

$$\max_{x\in[0,\omega]} \|\dot{\lambda}^{(m+1)}(x) - \dot{\lambda}^{(m)}(x)\| \le \beta_2\sigma_1 \max_{t\in[0,T]} \int_0^a \|V^{(m)}(t,\xi) - V^{(m-1)}(t,\xi)\|d\xi +$$

$$+\beta_2\sigma_1(1 + b\beta_2\sigma_2) \max_{x\in[0,\omega]} \int_0^b \|U^{(m)}(\tau,x) - U^{(m-1)}(\tau,x)\|d\tau +$$

$$+\beta_2\sigma_1(1 + b\beta_2\sigma_2) \int_0^b \|\mu^{(m)}(\tau) - \mu^{(m-1)}(\tau)\|d\tau, \qquad (4.13)$$

$$\max\Big(\|V^{(m+1)}(t,x) - V^{(m)}(t,x)\|, \|W^{(m+1)}(t,x) - W^{(m)}(t,x)\|, \|U^{(m+1)}(t,x) - U^{(m)}(t,x)\|\Big) \le$$

$$\le \max(T,\omega)e^{H(T+\omega)}\left\{\alpha \max_{x\in[0,\omega]}||\dot\lambda^{(m+1)}(x)-\dot\lambda^{(m)}(x)\|+\beta\max_{t\in[0,T]}\|\dot\mu^{(m+1)}(t)-\dot\mu^{(m)}(t)\|+\right.$$

$$\left.+\gamma\left[\max_{x\in[0,\omega]}\|\lambda^{(m+1)}(x)-\lambda^{(m)}(x)\|+\max_{t\in[0,T]}\|\mu^{(m+1)}(t)-\mu^{(m)}(t)\|\right]\right\}. \qquad (4.14)$$

Обозначим

$$\Delta_{m+1}=\max\Big(\max_{x\in[0,\omega]}\|\lambda^{(m+1)}(x)-\lambda^{(m)}(x)\|+\max_{t\in[0,T]}\|\mu^{(m+1)}(t)-\mu^{(m)}(t)\|,$$

$$\max_{x\in[0,\omega]}\|\dot\lambda^{(m+1)}(x)-\dot\lambda^{(m)}(x)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\dot\mu^{(m+1)}(t)-\dot\mu^{(m)}(t)\|\Big).$$

Тогда из соотношений (4.10) – (4.13), учитывая неравенство (4.14), получаем основное неравенство

$$\Delta_{m+1}\le q\Delta_m. \qquad (4.15)$$

Из условия 4 теоремы следует сходимость последовательности $\Delta_m\to 0$ при $m\to\infty$, т. е. $\Delta_*=$ $=0$. Отсюда следует равномерная сходимость последовательностей $\lambda^{(m)}(x)$, $\dot\lambda^{(m)}(x)$, $\mu^{(m)}(t)$, $\dot\mu^{(m)}(t)$ к $\lambda^*(x)$, $\dot\lambda^*(x)$, $\mu^*(t)$, $\dot\mu^*(t)$ соответственно при $m\to\infty$. Функции $\lambda^*(x)$ и $\mu^*(t)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы на $[0,\omega]$ и $[0,T]$ соответственно. Из неравенства (4.14) с учетом обозначения имеем

$$\max\Big(\|V^{(m+1)}(t,x)-V^{(m)}(t,x)\|,\|W^{(m+1)}(t,x)-W^{(m)}(t,x)\|,\|U^{(m+1)}(t,x)-U^{(m)}(t,x)\|\Big)\le$$

$$\le\max(T,\omega)e^{H(T+\omega)}H\Delta_{m+1}. \qquad (4.16)$$

Из неравенства (4.16) следует, что каждая из последовательностей $V^{(m)}(t,x)$, $W^{(m)}(t,x)$ и $U^{(m)}(t,x)$ мажорируется сходящейся последовательностью Δ_m с постоянной l_0, т. е. последовательности $V^{(m)}(t,x)$, $W^{(m)}(t,x)$, $U^{(m)}(t,x)$ равномерно сходятся к функциям $V^*(t,x)$, $W^*(t,x)$, $U^*(t,x)$ соответственно относительно $(t,x)\in\Omega$. Несложно убедиться, что функции $U^*(t,x)$, $V^*(t,x)$ и $W^*(t,x)$ непрерывны на Ω. Решая задачи на $(m+1)$-м шаге алгоритма и переходя к пределу при $m\to\infty$, убеждаемся, что функции $U^*(t,x),\lambda^*(x)$, $\mu^*(t)$ вместе с их производными удовлетворяют задаче Гурса (2.1) – (2.3) и краевым задачам с интегральным условием (3.1), (3.2) и (3.3), (3.4).

Осуществим обратный переход от задачи (3.1), (3.2) к соотношению (2.4), а от задачи (3.3), (3.4) к соотношению (2.5). Тогда тройка функций $(U^*(t,x),\lambda^*(x),\mu^*(t))$ является решением задачи (2.1) – (2.5).

Докажем единственность решения задачи (2.1) – (2.5). Пусть тройки функций $\big(U^*(t,x),$ $\lambda^*(x),\mu^*(t)\big)$ и $\big(U^{**}(t,x),\lambda^{**}(x),\mu^{**}(t)\big)$ являются решениями задачи (2.1) – (2.5). Пусть

$$\widetilde\Delta=\max\Bigg(\max_{x\in[0,\omega]}\|\lambda^*(x)-\lambda^{**}(x)\|+\max_{t\in[0,T]}\|\mu^*(t)-\mu^{**}(t)\|,$$

$$\max_{x\in[0,\omega]}\|\dot\lambda^*(x)-\dot\lambda^{**}(x)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\dot\mu^*(t)-\dot\mu^{**}(t)\|\Bigg).$$

После вычислений, аналогичных (4.10) – (4.14), имеем

$$\widetilde{\Delta} \leq q\widetilde{\Delta}. \tag{4.17}$$

По условию 4 теоремы $q < 1$. Тогда неравенство (4.17) выполняется только для $\widetilde{\Delta} \equiv 0$. Отсюда следует, что $\lambda^*(x) = \lambda^{**}(x)$, $\mu^*(t) = \mu^{**}(t)$ и $\widetilde{u}^*(t,x) = \widetilde{u}^{**}(t,x)$. Таким образом, решение задачи (2.1) – (2.5) единственно.

Теорема 4.1 доказана.

Из эквивалентности задач (1.1) – (1.3) и (2.1) – (2.5) следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* 1 – 4 *теоремы* 4.1. *Тогда нелокальная задача с интегральными условиями* (1.1) – (1.3) *имеет единственное классическое решение.*

Литература

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
3. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
4. *Kiguradze T.* Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type // Mem. Different. Equat. and Math. Phys. – 1994. – **1**. – P. 1 – 144.
5. *Cannon J. R.* The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. – 1963. – **21**, №. 2. – P. 155 – 160.
6. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, №. 11. – С. 1221 – 1228.
7. *Юрчук Н. И.* Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, №. 12. – С. 2117 – 2126.
8. *Жестков С. В.* О задаче Гурса с интегральными краевыми условиями // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, №. 1. – С. 132 – 135.
9. *Голубева Н. Д., Пулькина Л. С.* Об одной нелокальной задаче с интегральными условиями // Мат. заметки. – 1996. – **59**, №. 3. – С. 171 – 174.
10. *Bouziani A.* Solution forte d'un probleme mixte avec conditions поп locales pour une classe liquations hyperboliques // Bull. Cl. Sci., Acad. Roy. Belg. – 1997. – **43**. – P. 53 – 70.
11. *Beilin S.* Existence of solution for one-demensional wave equations with nonlocal conditions // Electron. J. Different. Equat. – 2001. – **76**. – P. 1 – 8.
12. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральными условиями для квазилинейного гиперболического уравнения // Мат. заметки. – 2001. – **70**, вып. 1. – С. 88 – 95.
13. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 2006. – **42**, №. 9. – С. 1166 – 1179.
14. *Ткач Б. П., Урманчева Л. Б.* Численно-аналитический метод отыскания решений систем с распределенными параметрами с интегральным условием // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, №. 1. – С. 110 – 119.
15. *Ільків В. С., Пташник Б. Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, №. 12. – С. 1624 – 1650.
16. *Il'kiv V. S., Nytrebych Z. M., Pukach P. Y.* Boundary-value problems with integral conditions for a system of Lame equations in the space of almost periodic functions // Electron. J. Different. Equat. – 2016. – **2016**, №. 304. – P. 1 – 12.
17. *Кузь А. М., Пташник Б. Й.* Задача з інтегральними умовами за часом для системи рівнянь типу Соболєва зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, №. 4. – С. 530 – 549.
18. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Однозначная разрешимость краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2002. – **42**, №. 11. – С. 1673 – 1685.

19. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* О корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Докл. РАН. – 2003. – **391**, №. 3. – С. 295 – 297.
20. *Асанова А. Т.* О нелокальной краевой задаче для систем квазилинейных гиперболических уравнений // Докл. РАН. – 2006. – **411**, №. 1. – С. 5 – 9.
21. *Асанова А. Т.* Об однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи с данными на пересекающихся линиях для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 2009. – **45**, №. 3. – С. 373 – 381.
22. *Asanova A. T., Dzhumabaev D. S.* Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // J. Math. Anal. and Appl. – 2013. – **402**, №. 1. – P. 167 – 178.
23. *Asanova A. T.* On solvability of nonlinear boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Electron. J. Qual. Theory Different. Equat. – 2015. – **63**. – P. 1 – 13.
24. *Асанова А. Т.* Периодические на плоскости решения системы гиперболических уравнений второго порядка // Мат. заметки. – 2017. – **101**, вып. 1. – С. 20 – 30.
25. *Асанова А. Т.* Нелокальная задача с интегральными условиями для систем гиперболических уравнений в характеристическом прямоугольнике // Изв. вузов. Математика. – 2017. – №. 5. – С. 11 – 25.
26. *Assanova A. T.* Solvability of a nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions // Electron. J. Different. Equat. – 2017. – **2017**, №. 170. – P. 1 – 12.
27. *Асанова А. Т.* Об одном подходе к решению нелокальной задачи для систем гиперболических уравнений с интегральными условиями // Нелінійні коливання. – 2017. – **20**, №. 4. – С. 435 – 450.

Получено 11.12.17