УДК 517.927

**О. М. Атласюк, В. А. Михайлець** (Ін-т математики НАН України, Київ)

# ФРЕДГОЛЬМОВІ ОДНОВИМІРНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ У ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА

For systems of ordinary differential equations on a compact interval, we investigate the character of solvability of the most general linear boundary-value problems in Sobolev spaces. We find the indexes of these problems and obtain a criterion of their well-posedness.

Досліджено характер розв'язності найбільш загальних лінійних крайових задач у просторах Соболєва для систем звичайних диференціальних рівнянь на скінченному інтервалі. Знайдено індекси таких задач та встановлено критерій їх коректної розв'язності.

**1. Вступ.** Дослідження розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь є суттєвою частиною багатьох задач сучасного аналізу та його застосувань (див., наприклад, [1] та наведену там бібліографію). Для загальних лінійних крайових задач умови фредгольмовості та неперервної залежності розв'язків від параметра встановлені І. Т. Кігурадзе у [2, 3]. Отримані результати набули подальшого розвитку в роботах другого з авторів та його учнів [4 – 6]. Нещодавно ці дослідження поширено на більш загальні класи фредгольмових крайових задач, пов'язаних із різними функціональними банаховими просторами [7 – 10]. Такі задачі мають ряд специфічних особливостей, яких немає у звичайних крайових задачах, і потребують нових підходів та методів. Їх розробці і присвячено цю статтю.

**2. Постановка задачі.** Нехай задано скінченний інтервал $[a,b] \subset \mathbb{R}$ та параметри

$$\{m,n,r\} \subset \mathbb{N}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Позначимо через $W_p^n := W_p^n([a,b];\mathbb{C})$ комплексний простір Соболєва і покладемо $W_p^0 := L_p$. Аналогічно позначимо простори Соболєва вектор-функцій $(W_p^n)^m := W_p^n([a,b];\mathbb{C}^m)$ і матриць-функцій $(W_p^n)^{m\times m} := W_p^n([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$, елементи яких належать функціональному простору $W_p^n$. Норми у цих просторах позначимо через $\|\cdot\|_{n,p}$; вони є сумами відповідних норм у $W_p^n$ всіх елементів векторно- або матричнозначної функції. З контексту завжди зрозуміло, про норму в якому саме просторі (скалярних функцій, вектор-функцій чи матриць-функцій) йде мова. Якщо $m=1$, то всі ці простори збігаються. Як відомо, простори $W_p^n$ є банаховими; вони сепарабельні тоді і лише тоді, коли $p<\infty$.

Розглянемо лінійну крайову задачу для системи $m$ диференціальних рівнянь першого порядку

$$Ly(t) := y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad t \in (a,b), \tag{1}$$

$$By = c, \tag{2}$$

де матриця-функція $A(\cdot)$ належить простору $(W_p^{n-1})^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot)$ — простору $(W_p^{n-1})^m$, вектор $c$ — простору $\mathbb{C}^r$, а $B$ є лінійним неперервним оператором

$$B\colon (W_p^n)^m \to \mathbb{C}^r. \tag{3}$$

Вектори і вектор-функції вважаємо записаними у вигляді стовпців. Під розв'язком крайової задачі (1), (2) розуміємо вектор-функцію $y(\cdot) \in (W_p^n)^m$, яка задовольняє рівняння (1) майже скрізь (при $n \geq 2$ скрізь) на $(a,b)$, та рівність (2), яка задає $r$ скалярних крайових умов. Розв'язки рівняння (1) заповнюють простір $(W_p^n)^m$, коли його права частина $f(\cdot)$ пробігає простір $(W_p^{n-1})^m$. Це випливає з леми 1 (див. п. 4). Тому крайова умова (2) є найбільш загальною для цього рівняння. Вона охоплює як усі відомі типи класичних крайових умов: задачі Коші, дво- та багатоточкові, інтегральні та мішані задачі, так і ряд некласичних задач. Останні можуть містити похідні шуканих функцій порядку $k \leq n$.

Із відомих результатів функціонального аналізу [11] випливає, що кожний з операторів $B$ в (3) при $1 \leq p < \infty$ допускає однозначне аналітичне зображення

$$By = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k y^{(k)}(a) + \int_a^b P(t) y^{(n)}(t) dt, \quad y(\cdot) \in (W_p^n)^m, \tag{4}$$

де матриці $\alpha_k$ належать $\mathbb{C}^{r\times m}$, а матриця-функція $P(\cdot)$ належить $L_{p'}([a,b];\mathbb{C}^{r\times m})$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$. У випадку $p=\infty$ формула (4) також задає деякий оператор $B \in L((W_\infty^n)^m;\mathbb{C}^r)$, але існують й інші оператори цього класу, що визначаються інтегралами Радона за скінченно-адитивними мірами [12].

Основна мета даної статті полягає в доведенні фредгольмовості задачі (1), (2) і знаходженні її індексу. Крім того, буде встановлено критерій однозначної скрізь розв'язності цієї задачі.

**3. Основні результати.** Сформулюємо основні результати статті. Їх доведення наведено в п. 5.

Запишемо неоднорідну крайову задачу (1), (2) у вигляді лінійного операторного рівняння

$$(L,B)y = (f,c),$$

де $(L,B)$ — лінійний оператор у парі банахових просторів

$$(L,B)\colon \left(W_p^n\right)^m \to \left(W_p^{n-1}\right)^m \times \mathbb{C}^r. \tag{5}$$

Нагадаємо, що лінійний неперервний оператор $T\colon X \to Y$, де $X$ і $Y$ — банахові простори, називають фредгольмовим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $Y/T(X)$ скінченновимірні. Якщо цей оператор фредгольмовий, то його область значень $T(X)$ замкнена в $Y$, а індекс

$$\operatorname{ind} T := \dim\ker T - \dim(Y/T(X))$$

є скінченним (див., наприклад, [13], лема 19.1.1).

**Теорема 1.** *Лінійний оператор* (5) *є обмеженим і фредгольмовим з індексом* $m-r$.

Сформулюємо критерій оборотності оператора $(L,B)$, тобто умову, за якої неоднорідна крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок і він неперервно залежить від правих частин диференціального рівняння та крайової умови.

Позначимо через $Y(\cdot) \in (W_p^n)^{m\times m}$ єдиний розв'язок (матрицант) лінійного однорідного матричного рівняння вигляду (1) з початковою умовою Коші

$$Y'(t) + A(t)Y(t) = 0, \quad t \in (a,b), \quad Y(a) = I_m, \tag{6}$$

де $I_m$ — одинична $(m\times m)$-матриця.

У випадку, коли $r=m$, покладемо

$$[BY] := \left( B \begin{pmatrix} y_{1,1}(\cdot) \\ \vdots \\ y_{m,1}(\cdot) \end{pmatrix} \ldots B \begin{pmatrix} y_{1,m}(\cdot) \\ \vdots \\ y_{m,m}(\cdot) \end{pmatrix} \right). \tag{7}$$

Числова квадратна матриця $[BY]$ порядку $m$ утворюється в результаті дії оператора $B$ на відповідні стовпчики (з тими ж номерами) матриціанта $Y(\cdot)$ матричної задачі Коші (6).

**Теорема 2.** *Оператор $(L, B)$ є оборотним тоді і тільки тоді, коли $r = m$ і матриця $[BY]$ невироджена.*

**4. Допоміжні результати.** Встановимо допоміжні твердження, які будуть використані в п. 5 при доведенні теорем 1 і 2. Деякі з цих тверджень мають і самостійний інтерес.

**Лема 1.** *Нехай матриця-функція $A$ належить $(W_p^{n-1})^{m\times m}$. Якщо диференційовна функція $y\colon [a,b] \to \mathbb{C}^m$ є розв'язком рівняння* (1) *для деякої правої частини $f \in (W_p^{n-1})^m$, то $y$ належить $(W_p^n)^m$. Більше того, якщо $f$ пробігає весь простір $(W_p^{n-1})^m$, то розв'язки рівняння* (1) *пробігають увесь простір $(W_p^n)^m$.*

***Доведення.*** Нехай для деякого $f \in \left(W_p^{n-1}\right)^m$ диференційовна вектор-функція $y$ є розв'язком рівняння (1). Доведемо, що $y$ належить $\left(W_p^n\right)^m$. Враховуючи, що $A$ і $f$ є принаймні неперервними на $[a,b]$, маємо

$$y' = f - Ay \in \left(C^{(0)}\right)^m.$$

Звідси випливає, що $y$ належить $\left(C^{(1)}\right)^m \subset (L_p)^m$. Більше того,

$$\left( y' \in \left(W_p^{n-1}\right)^m \ \Rightarrow\ y \in \left(W_p^n\right)^m \right). \tag{8}$$

Справді, якщо $y'$ належить $\left(W_p^{n-1}\right)^m$ для деякого цілого числа $n$, то

$$y' = f - Ay \in \left(W_p^{n-1}\right)^m,$$

і тому $y$ належить $\left(W_p^n\right)^m$. Включення $y \in (L_p)^m$ і властивість (8) обумовлюють потрібне включення $y \in \left(W_p^n\right)^m$.

Доведемо останнє твердження леми. Для довільного $f \in \left(W_p^{n-1}\right)^m$ існує розв'язок $y$ рівняння (1). Як щойно було показано, $y$ належить $\left(W_p^n\right)^m$. Це, враховуючи очевидну імплікацію

$$y \in \left(W_p^n\right)^m \ \Rightarrow\ Ly \in \left(W_p^{n-1}\right)^m,$$

доводить останнє твердження леми.

Лему 1 доведено.

**Лема 2.** *Нехай матриця-функція $Y(\cdot) \in (W_p^n)^{m\times m}$ невироджена для кожного $t \in [a,b]$. Тоді обернена матриця-функція $Y^{-1}(\cdot)$ належить $(W_p^n)^{m\times m}$.*

***Доведення*** проведено спочатку для скалярного випадку $m = 1$ методом математичної індукції по $n \in \mathbb{N}$.

Нехай $n = 1$. За умовою, функція $Y(\cdot)$ належить $W_p^1$, а тому абсолютно неперервна і не дорівнює нулю на множині $[a,b]$. Звідси випливає, що майже скрізь функція $Y^{-1}(\cdot)$ диференційовна і $\left(Y^{-1}\right)'(\cdot) = -Y'(\cdot)Y^{-2}(\cdot)$. Оскільки функція $Y(\cdot)$ відокремлена від нуля і $Y'(\cdot)$ належить $L_p$, то функція $\left(Y^{-1}\right)'(\cdot)$ належить $L_p$. Отже, $Y(\cdot)^{-1}$ належить $W_p^1$.

Припустимо, що висновок леми 2 правильний для деякого номера $n = k \in \mathbb{N}$. Доведемо, що її висновок правильний і для $n = k + 1$. За умовою, $Y(\cdot)$ належить $W_p^{k+1}$ і $Y(t) \neq \{0\}$ для довільного $t \in [a,b]$. Тому $Y^{-1}(\cdot)$ належить $W_p^k$ за індуктивним припущенням. Отже, функція

$\left(Y^{-1}\right)'(\cdot) = -Y'(\cdot)Y^{-2}(\cdot)$ належить простору $W_p^k$, оскільки він є банаховою алгеброю. Таким чином, $Y^{-1}(\cdot)$ належить $W_p^{k+1}$.

Отже, для випадку $m = 1$ лему доведено.

Доведемо її у випадку $m \geq 2$. Як відомо,

$$Y^{-1}(t) = \frac{1}{\det Y(t)} Y^T(t). \tag{9}$$

Тут $Y^T(\cdot)$ — транспонована матриця-функція, утворена алгебраїчними доповненнями елементів матриці-функції $Y(\cdot)$. За умовою, $Y(\cdot)$ належить $(W_p^{k+1})^{m\times m}$, тоді $Y^T(\cdot)$ належить $(W_p^{k+1})^{m\times m}$, оскільки функціональний клас $W_p^{k+1}$ утворює банахову алгебру. Тому, використовуючи доведений вище факт і рівність (9), отримуємо, що і $Y^{-1}(\cdot)$ належить $(W_p^{k+1})^{m\times m}$.

Лему 2 доведено.

Введемо метричний простір невироджених матриць-функцій

$$\mathcal{Y}_p^n := \{Y(\cdot) \in (W_p^n)^{m\times m} :\ Y(a) = I_m,\ \det Y(t) \neq 0\ \forall t \in [a,b]\}$$

із метрикою

$$d_{n,p}(Y,Z) := \|Y(\cdot) - Z(\cdot)\|_{n,p}.$$

**Теорема 3.** *Нелінійне відображення*

$$A(\cdot) \mapsto Y(\cdot), \tag{10}$$

*яке кожній матриці-функції $A(\cdot) \in (W_p^{n-1})^{m\times m}$ ставить у відповідність єдиний розв'язок $Y(\cdot)$ матричної задачі Коші* (6), *є гомеоморфізмом банахового простору $(W_p^{n-1})^{m\times m}$ на метричний простір $\mathcal{Y}_p^n$.*

Доведення теореми розіб'ємо на три частини.

**Лема 3.** *Нелінійне відображення* (10) *є бієкцією простору $(W_p^{n-1})^{m\times m}$ на метричний простір $\mathcal{Y}_p^n$.*

***Доведення*** проведемо індукцією за параметром $n \in \mathbb{N}$.

Доведемо лему 3 у випадку $n = 1$. Нехай $A(\cdot) \in (L_p)^{m\times m}$, а $Y(\cdot)$ — єдиний розв'язок задачі (6). Оскільки $Y(\cdot)$ належить $(L_p)^{m\times m}$ (як неперервна функція) і $Y'(\cdot) = -A(\cdot)Y(\cdot)$ належить $(L_p)^{m\times m}$, то $Y(\cdot)$ належить $(W_p^1)^{m\times m}$. З єдиності розв'язку задачі Коші (6) випливає, що $Y(\cdot) \in \mathcal{Y}_p^1$ однозначно визначається за коефіцієнтом $A(\cdot) \in (L_p)^{m\times m}$. Тому відображення (10) є ін'єктивним.

Доведемо сюр'єктивність відображення. За формулою Ліувілля – Якобі (див., наприклад, [14])

$$\det Y(t) = \det Y(a) \exp\left(\int_a^t \operatorname{sp} A(s)ds\right) = \exp\left(\int_a^t \operatorname{sp} A(s)ds\right) \neq 0,$$

тому матриця $Y(t)$ невироджена для довільного $t \in [a,b]$. Тоді існує обернена матриця $Y^{-1}(t)$ і рівняння (6) можна записати у такому вигляді:

$$A(t) = -Y'(t)Y^{-1}(t). \tag{11}$$

Але $Y'(\cdot)$ належить $(L_p)^{m\times m}$, а $Y^{-1}(\cdot)$ — $(W_p^1)^{m\times m}$ за лемою 2. Тому добуток цих матриць-функцій $A(\cdot)\in(L_p)^{m\times m}$ і відображення (10) є сюр'єктивним, а отже і бієктивним.

Припустимо, що висновок леми 3 правильний для деякого номера $n=k\in\mathbb{N}$. Доведемо, що її висновок правильний і для $n=k+1$. Нехай $A(\cdot)\in(W_p^k)^{m\times m}\subset(W_p^{k-1})^{m\times m}$, а $Y(\cdot)$ — єдиний розв'язок задачі (6). За індуктивним припущенням $Y(\cdot)$ належить $\mathcal{Y}_p^k$. Тому $Y'(\cdot)=$ $=-A(\cdot)Y(\cdot)\in(W_p^k)^{m\times m}$, оскільки $W_p^k$ — банахова алгебра. Отже, $Y(\cdot)$ належить $(W_p^{k+1})^{m\times m}$. З єдиності розв'язку задачі Коші випливає, що $Y(\cdot)$ належить $\mathcal{Y}_p^{k+1}$, тобто відображення (10) при $n=k+1$ є ін'єктивним.

Доведемо сюр'єктивність відображення. Оскільки $Y(\cdot)$ належить $(W_p^{k+1})^{m\times m}$, то похідна $Y'(\cdot)$ належить $(W_p^k)^{m\times m}$, і згідно з лемою 2 маємо включення $Y^{-1}(\cdot)\in(W_p^{k+1})^{m\times m}$. Тоді добуток $-Y'(\cdot)Y^{-1}(\cdot)$ належить $(W_p^k)^{m\times m}$. А тому, оскільки справджується рівність (11), матрична функція $A(\cdot)$ теж належатиме банаховому простору $(W_p^k)^{m\times m}$. Це означає, що кожному матриціанту $Y(\cdot)\in\mathcal{Y}_p^{k+1}$ відповідає, згідно з формулою (11), деяка матриця-функція $A(\cdot)\in(W_p^k)^{m\times m}$.

Лему 3 доведено.

**Лема 4.** *Розв'язок* $Y(\cdot)\in\mathcal{Y}_p^{n+1}$ *задачі* (6) *неперервно залежить від коефіцієнта* $A(\cdot)\in$ $\in(W_p^n)^{m\times m}$.

***Доведення.*** Треба показати, що зі співвідношення

$$\|A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)\|_{n,p}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+,$$

випливає, що $\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{n+1,p}\to 0$. Застосуємо знову принцип математичної індукції за параметром $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Для цього розглянемо параметризовану числом $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ сім'ю матричних задач

$$Y'(t;\varepsilon)+A(t;\varepsilon)Y(t;\varepsilon)=0,\quad t\in(a,b), \tag{12}$$

$$Y(a;\varepsilon)=I_m, \tag{13}$$

де $A(\cdot;\varepsilon)\in(L_p)^{m\times m}$.

Нехай при $\varepsilon\to 0+$ виконується умова

$$\|A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)\|_{0,p}\to 0. \tag{14}$$

Покажемо, що в такому випадку однозначно визначені розв'язки задач (12), (13) задовольняють граничне співвідношення

$$\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{1,p}\to 0,$$

яке еквівалентне такому:

$$\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{1,p}:=\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{0,p}+\|Y'(\cdot;\varepsilon)-Y'(\cdot;0)\|_{0,p}.$$

Тому достатньо показати, що кожен із доданків у правій частині рівності прямує до нуля.

Із умови (14) маємо

$$\|A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)\|_{0,1}\to 0.$$

Як встановлено Я. Д. Тамаркіним [15], із цього випливає рівномірна збіжність матрицантів

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_\infty \to 0. \tag{15}$$

Тому $\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{0,p} \to 0$.

Оскільки простори Соболєва $(W_p^n)^{m\times m}$ утворюють банахову алгебру, то з (14) і (15) випливає, що

$$\|A(\cdot;\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)Y(\cdot;0)\|_{0,p} \to 0.$$

Звідси, враховуючи рівність (12), отримуємо, що

$$\|Y'(\cdot;\varepsilon) - Y'(\cdot;0)\|_{0,p} \to 0.$$

Припустимо, що висновок леми правильний для деякого номера $n = k \in \mathbb{N}$ і розв'язок $Y(\cdot) \in \mathcal{Y}_p^k$ задачі (12), (13) неперервно залежить від коефіцієнта $A(\cdot) \in (W_p^{k-1})^{m\times m}$ при $\varepsilon = 0$.

Доведемо, що її висновок правильний і для $n = k+1$. Нехай при $\varepsilon \to 0+$ виконано умову

$$\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{k,p} \to 0.$$

Тоді, оскільки простори Соболєва утворюють банахову алгебру, зі зробленого припущення випливає, що

$$\|A(\cdot;\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)Y(\cdot;0)\|_{k,p} \to 0.$$

Із рівняння (12) маємо

$$\|Y'(\cdot;\varepsilon) - Y'(\cdot;0)\|_{k,p} \to 0.$$

Звідси випливає потрібне співвідношення

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{k+1,p} \to 0.$$

Лему 4 доведено.

**Лема 5.** *Коефіцієнти $A(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^n)^{m\times m}$ при $\varepsilon = 0$ неперервно залежать від розв'язків $Y(\cdot;\varepsilon) \in \mathcal{Y}_p^{n+1}$ задачі* (12), (13).

***Доведення.*** Нехай при $\varepsilon \to 0+$ для розв'язків задач (12), (13) виконується граничне співвідношення

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{n+1,p} \to 0. \tag{16}$$

Доведемо, що тоді

$$\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{n,p} \to 0.$$

Із припущення (16) випливає, що

$$\|Y'(\cdot;\varepsilon) - Y'(\cdot;0)\|_{n,p} \to 0,$$

а, згідно з лемою 2,

$$\|Y^{-1}(\cdot;\varepsilon) - Y^{-1}(\cdot;0)\|_{n+1,p} \to 0.$$

Враховуючи наведені співвідношення і рівність (11), одержуємо, що при $\varepsilon \to 0+$

$$\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{n,p} = \|Y'(\cdot;\varepsilon)Y^{-1}(\cdot;\varepsilon) - Y'(\cdot;0)Y^{-1}(\cdot;0)\|_{n,p} \to 0.$$

Отже, встановлено бінеперервність відображення

$$A(\cdot) \mapsto Y(\cdot) \colon (W_p^{n-1})^{m\times m} \to \mathcal{Y}_p^n.$$

Лему 5, а разом з нею і теорему 3, доведено.

Встановимо ще одне допоміжне твердження.

**Лема 6.** *Для довільної матриці-функції* $Y(\cdot) \in (W_p^n)^{m\times m}$, *вектора* $q \in \mathbb{C}^m$ *та лінійного неперервного оператора* $B\colon (W_p^n)^{m\times m} \times \mathbb{C}^m$ *є правильною рівність*

$$B(Y(\cdot)q) = [BY]\,q,$$

*де матрицю* $[BY]$ *визначено рівністю* (7).

***Доведення.*** Нехай матриця-функція $Y(\cdot) = (y_{ij}(\cdot))_{i,j=1}^m$, а вектор-стовпчик $q = (q_j)_{j=1}^m$. Позначимо $(\alpha_i)_{i=1}^m = [BY]\,q$ та $(\beta_i)_{i=1}^m = B(Y(\cdot)q)$. Нехай

$$B(y_k(\cdot))_{k=1}^m =: (c_k)_{k=1}^m.$$

При дії оператора $B$ на матрицю-функцію $Y(\cdot)$ отримуємо матрицю

$$[BY] = (c_{ij})_{i,j=1}^m.$$

Тоді

$$(\alpha_i)_{i=1}^m = (c_{ij})_{i,j=1}^m (q_j)_{j=1}^m = \left(\sum_{j=1}^m c_{ij}q_j\right)_{i=1}^m.$$

Отже, довільний елемент $\alpha_i$ має вигляд

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^m c_{ij}q_j, \quad i \in \{1,2,\ldots,m\}.$$

Але

$$(\beta_i)_{i=1}^m = B\left((y_{ij}(\cdot))_{i,j=1}^m \cdot (q_j)_{j=1}^m\right) = B\left(\sum_{j=1}^m y_{ij}(\cdot)q_j\right)_{i=1}^m =$$

$$= \sum_{j=1}^m (By_{ij}(\cdot))_{i=1}^m \cdot q_j = \sum_{j=1}^m (c_{ij})_{i=1}^m \cdot q_j = \left(\sum_{j=1}^m c_{ij}\cdot q_j\right)_{i=1}^m.$$

Із цього випливає, що $\alpha_i = \beta_i$, $i \in \{1,2,\ldots,m\}$.

Лему 6 доведено.

**5. Доведення теорем 1 і 2.** Обґрунтуємо спочатку неперервність оператора $(L,B)$. Оскільки оператор $B$ за умовою є лінійним і неперервним, то достатньо довести неперервність оператора $L$, яка еквівалентна його обмеженості. Обмеженість лінійного оператора

$$L\colon \left(W_p^n\right)^m \to \left(W_p^{n-1}\right)^m$$

випливає з означення норм у просторах Соболєва $W_p^n$ і того, що кожен із цих просторів утворює банахову алгебру.

Доведемо тепер фредгольмовість оператора $(L,B)$ та знайдемо його індекс. Виберемо деякий фіксований лінійний обмежений оператор $C_{r,m}\colon (W_p^n)^m \to \mathbb{C}^r$. Оператор $(L,B)$ допускає зображення

$$(L,B) = (L, C_{r,m}) + (0, B - C_{r,m}),$$

де оператор

$$(L, C_{r,m}) \colon \left(W_p^n\right)^m \to \left(W_p^{n-1}\right)^m \times \mathbb{C}^r,$$

а другий доданок є скінченновимірним оператором. Із другої теореми стійкості (див., наприклад, [16], розд. 3, § 1) випливає, що оператор $(L, B)$ є фредгольмовим, якщо оператор $(L, C_{r,m})$ є таким і

$$\operatorname{ind}(L, B) = \operatorname{ind}(L, C_{r,m}).$$

Тому достатньо довести фредгольмовість оператора $(L, C_{r,m})$ і знайти його індекс, вибравши належним чином оператор $C_{r,m}$. Для цього розглянемо три випадки.

1. Нехай $r = m$. Покладемо

$$C_{m,m}y := (y_1(a), \ldots, y_m(a)).$$

Знайдемо нуль-простір та область значень цього оператора. Нехай $y(\cdot)$ належить $\ker(L, C_{r,m})$. Тоді $Ly = 0$ і $C_{m,m}y = (y_1(a), \ldots, y_m(a)) = 0$. Із теореми про єдиність розв'язку задачі Коші випливає, що $y(\cdot) = 0$. Тому $\ker(L, C_{m,m}) = 0$.

Нехай $h \in (W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^m$ і $c \in \mathbb{C}^m$ вибрано довільним чином. Із теореми 3 випливає, що існує вектор-функція $y(\cdot) \in (W_p^n)^m$ така, що

$$Ly = h, \quad (y_1(a), \ldots, y_m(a)) = c.$$

Тому $\operatorname{ran}(L, C_{r,m}) = \left(W_p^{n-1}\right)^m \times \mathbb{C}^m$.

2. Нехай $r > m$. Покладемо

$$C_{r,m}y := (y_1(a), \ldots, y_m(a), \underbrace{0, \ldots, 0}_{r-m}) \in \mathbb{C}^r.$$

Знайдемо нуль-простір оператора $(L, C_{r,m})$. Нехай $y(\cdot)$ належить $\ker(L, C_{r,m})$. Тоді $Ly = 0$ і $(y_1(a), \ldots, y_m(a)) = 0$. Із теореми про єдиність розв'язку задачі Коші маємо $y(\cdot) = 0$.

Запишемо множину значень оператора $(L, C_{r,m})$ у вигляді прямої суми двох підпросторів

$$\operatorname{ran}(L, C_{r,m}) = \operatorname{ran}(L, C_{m,m}) \oplus (\underbrace{0, \ldots, 0}_{r-m}).$$

Але, як доведено раніше, $\operatorname{ran}(L, C_{m,m}) = (W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^m$. Тому $\operatorname{def} \operatorname{ran}(L, C_{r,m}) = r - m$.

3. Нехай $r < m$. Покладемо

$$C_{r,m}y := (y_1(a), \ldots, y_r(a)) \in \mathbb{C}^r.$$

Доведемо, що

$$\dim \ker(L, C_{r,m}) = m - r,$$

$$\operatorname{def} \operatorname{ran}(L, C_{r,m}) = 0.$$

Нехай $y(\cdot)$ належить $\ker(L, C_{r,m})$. Тоді $Ly = 0$ і $(y_1(a), \ldots, y_r(a)) = 0$. Розглянемо наступні $m - r$ задач Коші

$$Ly_k = 0, \quad C_{m,m}y_k = e_k, \quad \text{де} \quad k \in \{r+1, r+2, \ldots, m\},$$

$$e_k := (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \ldots, 0) \in C^m.$$

Із теореми 3 випливає, що розв'язки цих задач лінійно незалежні та утворюють базис у підпросторі $\ker(L, C_{r,m})$.

Сюр'єктивність оператора $(L, C_{r,m})$ випливає із вже доведеної сюр'єктивності оператора $(L, C_{m,m})$.

Отже, в кожному з трьох випадків оператор $(L, B)$ є фредгольмовим з індексом $m - r$.

Теорему 1 доведено.

***Доведення теореми* 2.** Згідно з теоремою 1, оборотність оператора $(L, B)$ рівносильна тому, що $r = m$ і $\ker(L, B) = \{0\}$. Тому достатньо показати, що умова $\ker(L, B) \neq \{0\}$ рівносильна виродженості квадратної матриці (7).

Нехай $\ker(L, B) \neq \{0\}$. Тоді за лемою 6 існує нетривіальний розв'язок однорідного рівняння $(L, B)y = (0, 0)$ такий, що

$$y(\cdot) \in \ker(L, B) \Leftrightarrow (\exists\, q \in \mathbb{C}^m : y(t) = Y(t) \cdot q,\ [BY]\, q = 0),$$

де вектор $q \neq 0$. Це означає, що стовпці матриці (7) лінійно залежні і сама матриця вироджена.

Навпаки, нехай матриця (7) вироджена. Тоді її стовпці лінійно залежні. Це означає, що для деякого вектора $q \neq 0$

$$[BY]q = 0.$$

Покладемо $y(\cdot) := Y(\cdot)q$. Тоді $y(\cdot) \neq 0$, $Ly = 0$ і

$$By = B(Y(\cdot)q) = [BY]q = 0$$

на підставі леми 6. Тому $y(\cdot) \in \ker(L, B) \neq \{0\}$.

Теорему 2 доведено.

## Література


1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht, Boston: VSP, 2004. – xiv + 317 p.
2. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. – 352 с.
3. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // ВИНИТИ. – 1987. – **30**. – С. 3 – 103.
4. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A., Reva N. V.* Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 1. – P. 77 – 90.
5. *Михайлец В. А., Пелехата О. Б., Рева Н. В.* Предельные теоремы для решений краевых задач // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 2. – С. 216 – 223.
6. *Mikhailets V. A., Chekhanova G. A.* Limit theorem for general one-dimensional boundary-value problems // J. Math. Sci. – 2015. – **204**, № 3. – P. 333 – 342.
7. *Gnyp E. V., Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, № 5. – P. 658 – 667.
8. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces // J. Math. Sci. – 2013. – **190**, № 4. – P. 589 – 599.
9. *Hnyp Y. V., Mikhailets V. A., Murach A. A.* Parameter-dependent one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces // Electron. J. Different. Equat. – 2017. – № 81. – 13 p.

10. *Mikhailets V. A., Murach A. A., Soldatov V. O.* Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems // Electron. J. Qual. Theory Different. Equat. – 2016. – № 87. – 16 p.
11. *Ioffe A. D., Tihomirov V. M.* Theory of extremal problems. – Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979. – 399 p.
12. *Dunford N., Schwartz J. T.* Linear operators. I. General theory. – New York; London: Intersci. Publ., 1958. – xiv + 858 p.
13. *Hörmander L.* The analysis of linear partial differential operators. III: Pseudo-differential operators. – Berlin: Springer, 1985. – viii + 525 p.
14. *Yakubovich V. A., Starzhinskii V. M.* Linear differential equations with periodic coefficients. – New York; Toronto: Halsted Press, 1975. – xii + 386 p.
15. *Tamarkin J. D.* A lemma of the theory of linear differential systems // Bull. Amer. Math. Soc. – 1930. – **36**, № 2. – P. 99 – 102.
16. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. – New York: Springer-Verlag, 1966. – xix + 592 p.

Одержано 30.05.18