УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Ун-т им. А. Нобеля, Днепр)

ОБОБЩЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГЛАДКОСТИ И НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2(\mathbb{R})$. II

In the second part of the paper, we establish the exact Jackson-type inequalities for the characteristic of smoothness Λ^w on the classes of functions $L_2^{\alpha}(\mathbb{R})$ defined by the fractional derivatives of order $\alpha \in (0, \infty)$ in the space $L_2(\mathbb{R})$. The exact values of the mean ν-widths for the classes of functions, defined by the generalized characteristics of smoothness ω^w and Λ^w are also computed in $L_2(\mathbb{R})$.

У просторі $L_2(\mathbb{R})$ на класах функцій $L_2^{\alpha}(\mathbb{R})$, означених за допомогою похідних дробового порядку $\alpha \in (0, \infty)$, отримано точні нерівності типу Джексона для характеристики гладкості Λ^w, а також обчислено точні значення середніх ν-поперечників класів функцій, означених за допомогою узагальнених характеристик гладкості ω^w та Λ^w.

Данная статья является продолжением работы [1], поэтому в ней сохранена сквозная нумерация теорем, следствий, замечаний и пунктов, в каждом из которых использована своя двойная нумерация формул. Кроме того, [1] и эту статью следует рассматривать как своеобразное распространение на случай пространства $L_2(\mathbb{R})$ идейных подходов, изложенных автором в работах [2 – 4].

6. Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями экспоненциального типа $\sigma \in (0, \infty)$ на классах $L_2(\mathbb{R})$ и $L_2^{\alpha}(\mathbb{R})$, $\alpha \in (0, \infty)$, выраженные через характеристику гладкости Λ^w. Исходя из соотношений (2.26) – (2.29) из [1], для характеристики гладкости $\Lambda^w(f, t)$, $t > 0$, произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ имеем

$$\Lambda^w(f, t) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f, \tau)|^2 \mathcal{W}(t\tau)\, d\tau \right\}^{1/2}, \tag{6.1}$$

где

$$\mathcal{W}(x) := \left\{ 0, \text{ если } x = 0;\ \frac{1}{x} \int_0^x |w(h)|^2 dh, \text{ если } x \in \mathbb{R} \text{ и } x \neq 0 \right\}.$$

Всюду далее полагаем, что комплекснозначная функция $w : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$, т. е. квадрат ее модуля $|w|^2$ является непрерывной, четной, ограниченной на всей вещественной оси $\mathbb{R}$ функцией, которая почти всюду на $\mathbb{R}$ отлична от нуля и такая, что $|w(0)| = 0$. Из изложенного очевидно, что и определенная указанным выше способом функция $\mathcal{W}$ будет непрерывной, четной и ограниченной на $\mathbb{R}$, принимающей положительные значения для любого $x \in \mathbb{R}$, отличного от нуля. Это означает, что функция $\mathcal{W}$ принадлежит множеству $\mathbb{G}$, определенному в [1].

Полагаем, что функция $w \in \mathfrak{M}$ такова, что $|w|^2$ удовлетворяет *свойству A* [1], т. е. на множестве $0 \leq x \leq t_*$, $t_* \in (0, \infty)$, $|w|^2$ монотонно возрастает. Здесь $t_* = t_*(|w|^2)$ — такое значение аргумента x, при котором $|w(t_*)|^2 = \sup\left\{|w(x)|^2 : 0 < x < \infty\right\}$. Если верхняя грань достигается более чем при одном значении аргумента, то в качестве t_* берем наименьшее из них. Также полагаем, что $|w|^2$ не удовлетворяет *свойству B* [1], т. е. для значения аргумента $\widetilde{t}_*$, где $\left|w(\widetilde{t}_*)\right|^2 = \inf\left\{|w(x)|^2 : t_* < x < \infty\right\}$, имеем $\left|w(\widetilde{t}_*)\right| = 0$. Если нижняя грань достигается более чем при одном значении аргумента, то в качестве $\widetilde{t}_* = \widetilde{t}_*(|w|^2)$ рассматриваем наименьшее из них.

Исходя из сделанных предположений относительно $|w|^2$, рассмотрим поведение функции $\mathcal{W}(x)$ на интервале $0 < x < \infty$. Так, при $0 < x \leq t_*$ получаем

$$\frac{d\mathcal{W}}{dx} \geq \frac{1}{x}\left\{|w(x)|^2 - \frac{1}{x}\int\limits_0^x \max\left\{|w(t)|^2 : 0 \leq t \leq x\right\}dh\right\} \geq \frac{1}{x}\left\{|w(x)|^2 - |w(x)|^2\right\} = 0,$$

т. е. функция $\mathcal{W}$ монотонно возрастает на рассматриваемом множестве. Пусть далее $t_* < < x < \widetilde{t}_* + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тогда имеем

$$\left.\frac{d\mathcal{W}}{dx}\right|_{x=\widetilde{t}_*} = -\frac{1}{\widetilde{t}_*}\int\limits_0^{\widetilde{t}_*} |w(h)|^2 dh < 0,$$

т. е. функция $\mathcal{W}$ монотонно убывает в некоторой окрестности точки $\widetilde{t}_*$. Следовательно, $\mathcal{W}$ не является монотонно возрастающей функцией на интервале $(0, \infty)$ и при определенном выборе $|w|^2$ функция $\mathcal{W}$ может удовлетворять *свойству А*.

6.1. Для функции $\mathcal{W} \in \mathbb{G}$ полагаем $\mathcal{W}(t_*) := \sup\{\mathcal{W}(x) : 0 < x < \infty\}$, где $t_* = t_*(\mathcal{W})$. Если значений аргумента, для которых достигается верхняя грань, будет более одного, то в качестве t_* рассматриваем наименьшее из них. Функция $\mathcal{W} \in \mathbb{G}$ удовлетворяет *свойству А*, если на отрезке $[0, t_*]$ она монотонно возрастает. Также полагаем $\mathcal{W}(\widetilde{t}_*) := \inf\{\mathcal{W}(x) : t_*(\mathcal{W}) < x < \infty\}$, где $\widetilde{t}_* = \widetilde{t}_*(\mathcal{W})$. Если значений аргумента, для которых достигается нижняя грань, более одного, то в качестве $\widetilde{t}_*$ берем наименьшее из них.

Пусть функция $\mathcal{W}$ принадлежит $\mathbb{G}$ и удовлетворяет *свойству А*. Поскольку $\mathcal{W}(\widetilde{t}_*) \neq 0$, то на интервале $(0, t_*(\mathcal{W}))$ существует единственная точка $\bar{t} = \bar{t}(\mathcal{W})$, в которой

$$\mathcal{W}(\bar{t}) = \mathcal{W}(\widetilde{t}_*). \tag{6.2}$$

Также полагаем

$$\mathcal{W}_0(x) := \Big\{\mathcal{W}(x), \text{ если } |x| \leq \bar{t}(\mathcal{W});\ \mathcal{W}(\bar{t}), \text{ если } \bar{t}(\mathcal{W}) \leq |x| < \infty\Big\}. \tag{6.3}$$

Очевидно, что для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем $\mathcal{W}(x) \geq \mathcal{W}_0(x)$.

Теорема 3. *Пусть σ принадлежит $(0, \infty)$; комплекснозначная функция $w : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$, квадрат ее модуля $|w|^2$ удовлетворяет свойству А, но не удовлетворяет свойству В; функция $\mathcal{W}$ принадлежит множеству $\mathbb{G}$ и удовлетворяет свойству А. Тогда для любого значения $t \in (0, \bar{t}(\mathcal{W})]$, где величина $\bar{t}(\mathcal{W})$ определяется соотношением (6.2), имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_2(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\Lambda^w(f, t/\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{W}(t)}}. \tag{6.4}$$

При этом верхняя грань в (6.4) вычисляется по всем функциям f из $L_2(\mathbb{R})$, которые не эквивалентны нулю.

Доказательство. Используя соотношения (6.1), (6.3) и (4.5), имеем

$$\Lambda^w(f,u) \geq \left\{ \int\limits_{|\tau|\geq\sigma} |\mathcal{F}(f,\tau)|^2 \mathcal{W}(u\tau)\,d\tau \right\}^{1/2} \geq \left\{ \int\limits_{|\tau|\geq\sigma} |\mathcal{F}(f,\tau)|^2 \mathcal{W}_0(u\tau)\,d\tau \right\}^{1/2} \geq$$

$$\geq \sqrt{\mathcal{W}_0(u\sigma)} \left\{ \int\limits_{|\tau|\geq\sigma} |\mathcal{F}(f,\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2} = \sqrt{\mathcal{W}_0(u\sigma)}\mathcal{A}_0(f), \tag{6.5}$$

где $0 < u < \infty$. Полагая в соотношении (6.5) $u = t/\sigma,\ 0 < t \leq \bar{t}(\mathcal{W})$, получаем $\Lambda^w(f, t/\sigma) \geq \geq \sqrt{\mathcal{W}(t)}\mathcal{A}_\sigma(f)$ или

$$\sup_{f\in L_2(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\Lambda^w(f,t/\sigma)} \leq \frac{1}{\sqrt{\mathcal{W}(t)}}. \tag{6.6}$$

Для вычисления оценки снизу экстремальной характеристики, содержащейся в левой части неравенства (6.6), воспользуемся целой функцией $q_{\sigma+\varepsilon}(x) = \sqrt{\pi/2}\big(\lambda_{\sigma+\varepsilon}(x) - \lambda_\sigma(x)\big)$, где $\lambda_a(x) := a\,\mathrm{sinc}(ax),\ a \in (0,\infty),\ \varepsilon \in (0,\sigma_*),\ \sigma_* := \min(\sigma, 1/\sigma)$, имеющей экспоненциальный тип, не превышающий $\sigma + \varepsilon$ [1]. В [1] также отмечалось, что преобразование Фурье функции $q_{\sigma+\varepsilon}$ имеет вид $\mathcal{F}(q_{\sigma+\varepsilon}, x) = \big\{1,$ если $\sigma < |x| < \sigma+\varepsilon;\ 1/2,$ если $|x| = \sigma$ или $|x| = \sigma + + \varepsilon;\ 0,$ если $|x| < \sigma$ или $|x| > \sigma + \varepsilon\big\}$, а величина ее наилучшего среднеквадратического приближения элементами подпространства $\mathbb{B}_{\sigma,2}$ равна $\mathcal{A}_\sigma(q_{\sigma+\varepsilon}) = \sqrt{2\varepsilon}$. Тогда на основании формулы (6.1) для $0 < u < \infty$ получаем

$$\Lambda^w(q_{\sigma+\varepsilon}, u) = \left\{ 2\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon} \mathcal{W}(u\tau)\,d\tau \right\}^{1/2} \leq \sqrt{2\varepsilon\mathcal{W}_*(u(\sigma+\varepsilon))} = \mathcal{A}_\sigma(q_{\sigma+\varepsilon})\sqrt{\mathcal{W}_*(u(\sigma+\varepsilon))}, \tag{6.7}$$

где

$$\mathcal{W}_*(x) := \big\{\mathcal{W}(x),\ \text{если}\ \ |x| \leq t_*(\mathcal{W});\ \mathcal{W}(t_*),\ \text{если}\ \ |x| \geq t_*(\mathcal{W})\big\}. \tag{6.8}$$

Очевидно, что для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем $\mathcal{W}(x) \leq \mathcal{W}_*(x)$. Полагая $u = t/\sigma$, где $0 < t \leq \bar{t}(\mathcal{W})$, из (6.7) находим $\mathcal{A}_\sigma(q_{\sigma+\varepsilon})/\,\Lambda^w(q_{\sigma+\varepsilon}, t/\sigma) \geq 1/\sqrt{\mathcal{W}_*(t(1+\varepsilon/\sigma))}$. Поскольку $q_{\sigma+\varepsilon} \in L_2(\mathbb{R})$, то

$$\sup_{f\in L_2(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\Lambda^w(f,t/\sigma)} \geq \frac{1}{\sqrt{\mathcal{W}_*(t(1+\varepsilon/\sigma))}}. \tag{6.9}$$

В силу выбора величины $\bar{t} = \bar{t}(\mathcal{W})$ согласно соотношению (6.2) для произвольного значения $0 < t \leq \bar{t}(\mathcal{W})$ имеем $\lim\big\{\mathcal{W}_*(t(1+\varepsilon/\sigma)) : \varepsilon \to 0+\big\} = \mathcal{W}(t)$. Поскольку $\mathcal{W}(x)$ является монотонно возрастающей функцией на множестве $0 \leq x \leq t_*(\mathcal{W})$ и $\bar{t}(\mathcal{W}) < t_*(\mathcal{W})$, то для произвольного сколь угодно малого положительного числа δ можно подобрать такое зависящее от него число $\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}(\delta) \in (0,\sigma_*)$, для которого выполняется неравенство $1/\sqrt{\mathcal{W}_*(t(1+\widetilde{\varepsilon}/\sigma)} > > 1/\sqrt{\mathcal{W}(t)} - \delta$. Используя определение верхней грани числового множества, отсюда получаем $\sup\big\{1/\sqrt{\mathcal{W}_*(t(1+\varepsilon/\sigma))} : 0 < \varepsilon < \sigma_*\big\} = 1/\sqrt{\mathcal{W}(t)}$. Вычисляя далее верхнюю грань по $\varepsilon \in (0,\sigma_*)$ от правой части неравенства (6.9), с учетом вышеприведенного соотношения имеем

$$\sup_{f\in L_2(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\Lambda^w(f,t/\sigma)} \geq \frac{1}{\sqrt{\mathcal{W}(t)}}, \quad 0 < t \leq \bar{t}(\mathcal{W}). \tag{6.10}$$

Равенство (6.4) следует из формул (6.6) и (6.10).

Теорема 3 доказана.

6.1.1. Для числовой последовательности $\mathcal{M}_{1,m} := \{\mu_j = (-1)^{m-j}\binom{m}{j},$ если $j = 0, \ldots, m;$ $\mu_j = 0,$ если $j < 0$ или $j > m\}_{j\in\mathbb{Z}},$ $m \in \mathbb{N}$, участвующей в формировании функции $w_{\mathcal{M}}(x) := := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_j e^{ijx}$, имеем $w_{\mathcal{M}_{1,m}}(x) = (e^{ix} - 1)^m$ и $|w_{\mathcal{M}_{1,m}}(x)|^2 = 2^m(1 - \cos x)^m$. Учитывая, что

$$2^m(1-\cos x)^m = \binom{2m}{m} - 2\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\binom{2m}{m-j}\cos(jh),$$

получаем

$$\mathcal{W}_m(t) := \frac{1}{t}\int\limits_0^t \left|w_{\mathcal{M}_{1,m}}(h)\right|^2 dh = \binom{2m}{m} - 2\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\binom{2m}{m-j}\operatorname{sinc}(jt).$$

В частности, при $m = 1$ отсюда находим $\mathcal{W}_1(t) = 2(1 - \operatorname{sinc}(t))$. Путем соответствующих вычислений для функции $\mathcal{W}_1$ получаем $\bar{t}(\mathcal{W}_1) \in (2{,}76; 2{,}78)$. Здесь величина $\bar{t}(\mathcal{W}_1)$ определяется из (6.2), где $\widetilde{t}_*(\mathcal{W}_1) \in (7{,}72; 7{,}73)$. Согласно [1], для $f \in L_2(\mathbb{R})$ имеем

$$\Lambda^{w_{\mathcal{M}_{1,m}}}(f,t) = \Lambda_m(f,t) = \left\{\frac{1}{t}\int\limits_0^t \|\Delta_h^m(f)\|^2 dh\right\}^{1/2}, \quad t > 0,$$

где $\Delta_h^m(f,x) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j} f(x+jh)$ почти всюду на $\mathbb{R}$. Тогда в силу (6.4) для любых значений $0 < t \le \bar{t}(\mathcal{W}_1)$ и $0 < \sigma < \infty$ записываем

$$\sup_{f\in L_2(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\Lambda_1(f, t/\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{W}_1(t)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-\operatorname{sinc}(t))}}. \tag{6.11}$$

Следует отметить, что соотношение (6.11) при более жестком ограничении $0 < t \le 3\pi/4$ было получено в работе автора [5].

6.1.2. В качестве следующего примера использования теоремы 3 рассмотрим числовую последовательность $\mathcal{M}_4 := \big\{\mu_j = 4/(\pi j)^2,$ если $j = 2k+1,$ $k \in \mathbb{Z};$ $\mu_j = 0,$ если $j = = 2\nu,$ $\nu \in \mathbb{Z}\backslash\{0\};$ $\mu_j = -1,$ если $j = 0\big\}_{j\in\mathbb{Z}}$, которой, согласно (2.10), соответствует принадлежащая классу $\mathfrak{M}$ функция $w_{\mathcal{M}_4}$ с квадратом модуля, имеющим на отрезке $-\pi \le x \le \pi$ вид $|w_{\mathcal{M}_4}(x)|^2 = 4x^2/\pi^2$ [1]. В данном случае произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ ставится в соответствие определенное почти всюду на $\mathbb{R}$ разностное соотношение $\widehat{\Delta}_h(f,x) := \Delta_h^{w_{\mathcal{M}_4}}(f,x) = = (4/\pi^2)\sum_{j\in\mathbb{Z}} f(x + (2j+1)h)/(2j+1)^2 - f(x)$. Напомним, что разностный оператор $\widehat{\Delta}_h$ в 2π-периодическом случае использовался ранее в работе К. В. Руновского и Х.-Ю. Шмейссера [6] для определения модуля непрерывности $\widehat{\omega}$, соответствующего производной Рисса. Таким образом, согласно (2.25), приходим к следующей характеристике гладкости в $L_2(\mathbb{R})$:

$$\widehat{\Lambda}(f,t) := \Lambda^{w_{\mathcal{M}_4}}(f,t) = \left\{\frac{1}{t}\int\limits_0^t \|\widehat{\Delta}_h(f)\|^2 dh\right\}^{1/2}, \quad t > 0. \tag{6.12}$$

Поскольку $|w_{\mathcal{M}_4}|^2$ является четной, 2π-периодической функцией, то для любого $x \in \in \big[(2k-1)\pi; (2k+1)\pi\big],$ $k \in \mathbb{N}$, получаем $|w_{\mathcal{M}_4}(x)|^2 = 4(x - 2k\pi)^2/\pi^2$. Тогда для четной функции $\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4}(t) := (1/t)\int_0^t |w_{\mathcal{M}_4}(h)|^2\,dh,\ t\neq 0,\ \mathcal{W}_{\mathcal{M}_4}(0) := 0$, запишем ее представление на множестве $0\le t<\infty$:

$$\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4}(t) = \begin{cases} 4t^2/(3\pi^2), & 0\le t\le \pi,\\ 4\big(2k\pi+(t-2k\pi)^3/\pi^2\big)/(3t), & (2k-1)\pi\le t\le (2k+1)\pi, \quad k\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{6.13}$$

Исходя из представления (6.13) очевидно, что функция $\mathcal{W}=\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4}$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 3. Изучая ее поведение при $0\le t<\infty$, можно убедиться в том, что соответствующие $\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4}$ значения $t_*(\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4})$ и $\widetilde{t}_*(\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4})$ принадлежат отрезку $[\pi,3\pi]$. Исследование на экстремум функции $\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4}$ приводит к нахождению корней уравнения $t^3-3\pi t^2+3\pi^3=0$, принадлежащих $[\pi,3\pi]$. Используя процедуру вычисления корней кубического уравнения с помощью формул Кордано (см., например, [7], гл. 9, § 38), получаем $t_*(\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4}) = \pi(1+2\cos(4\pi/9))\in(4{,}232;4{,}233)$ и $\widetilde{t}_*(\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4}) = \pi(1+2\cos(2\pi/9))\in(7{,}954;7{,}955)$. При этом значение $\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4}(\widetilde{t}_*) = 4\big(2+(2\cos(2\pi/9)-1)^3/\pi^2\big)/\big(3(1+2\cos(2\pi/9))\big)\in(1{,}081;1{,}082)$ меньше, чем $\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4}(\pi)=4/3$, т. е. $\overline{t}(\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4})\in(0,\pi)$. Используя данную информацию, а также формулы (6.2) и (6.13), находим $\overline{t}(\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4}) = (\pi/4)\sqrt{3\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4}(\widetilde{t}_*)}\in(2{,}82;2{,}83)$.

Из вышеприведенного с учетом (6.4), (6.12), (6.13) для любого $t\in(0,\overline{t}(\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4})]$ имеем

$$\sup_{f\in L_2(\mathbb{R})}\frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\widehat{\Lambda}(f,t/\sigma)} = \frac{\sqrt{3}\pi}{2t}, \quad \sigma\in(0,\infty).$$

6.2. **Теорема 4.** *Пусть σ принадлежит $(0,\infty)$; комплекснозначная функция $w:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$ и квадрат ее модуля удовлетворяет свойству A; $\alpha\in[1/2,\infty)$; $\mathcal{W}\in\mathbb{G}$. Тогда для любого значения $t\in(0,t_*(|w|^2)]$ выполняется равенство*

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})}\frac{\sigma^\alpha\mathcal{A}_\sigma(f)}{\Lambda^w(D^\alpha f,t/\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{W}(t)}}. \tag{6.14}$$

Доказательство. Учитывая [1], что $\|\Delta_h^w(D^\alpha f)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}(f,\tau)|^2|\tau|^{2\alpha}|w(h\tau)|^2\,d\tau$, где $f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})$, для произвольного значения $u\in(0,\infty)$ имеем

$$\Lambda^w(D^\alpha f,u) = \left\{\frac{1}{u}\int_0^u\|\Delta_h^w(D^\alpha f)\|^2\,dh\right\}^{1/2} = \left\{\int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}(f,\tau)|^2|\tau|^{2\alpha}\mathcal{W}(u\tau)\,d\tau\right\}^{1/2} \ge$$

$$\ge\left\{\int_{|\tau|\ge\sigma}|\mathcal{F}(f,\tau)|^2|\tau|^{2\alpha}\mathcal{W}(u\tau)\,d\tau\right\}^{1/2}. \tag{6.15}$$

Поскольку функция $\mathcal{W}$ принадлежит множеству $\mathbb{G}$, для $|\tau|\ge\sigma$ записываем

$$Q_\alpha(u,\tau) := |\tau|^{2\alpha}\mathcal{W}(u\tau) = \frac{|\tau|^{2\alpha-1}}{u}\int_0^{u|\tau|}|w(h)|^2\,dh. \tag{6.16}$$

Очевидно, что при любом положительном фиксированном значении u величина Q_α, как функция только переменной τ, будет четной и монотонно возрастающей на множестве $\sigma \leq \tau < \infty$. Следовательно, $\inf\big\{Q_\alpha(u,\tau)\colon |\tau| \geq \sigma\big\} = Q_\alpha(u,\sigma)$. С учетом (6.16) и (4.5) из соотношения (6.15) получаем

$$\Lambda^w(D^\alpha f, u) \geq \left\{\int\limits_{|\tau|\geq\sigma} |\mathcal{F}(f,\tau)|^2 Q_\alpha(u\tau)\,d\tau\right\}^{1/2} \geq$$

$$\geq \sqrt{\inf\{Q_\alpha(u,\tau)\colon \tau \geq \sigma\}}\left\{\int\limits_{|\tau|\geq\sigma} |\mathcal{F}(f,\tau)|^2 d\tau\right\}^{1/2} =$$

$$= \sqrt{Q_\alpha(u,\sigma)}\,\mathcal{A}_\sigma(f) = \sigma^\alpha\sqrt{\mathcal{W}(u\sigma)}\mathcal{A}_\sigma(f). \tag{6.17}$$

Полагая $u = t/\sigma$, где $0 < t \leq t_*(|w|^2)$, из (6.17) имеем $\Lambda^w(D^\alpha f, t/\sigma) \geq \sigma^\alpha\sqrt{\mathcal{W}(t)}\mathcal{A}_\sigma(f)$. Следовательно,

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^\alpha \mathcal{A}_\sigma(f)}{\Lambda^w(D^\alpha f, t/\sigma)} \leq \frac{1}{\sqrt{\mathcal{W}(t)}}. \tag{6.18}$$

Переходя к получению оценки снизу экстремальной характеристики, содержащейся в левой части неравенства (6.18), снова рассматриваем функцию $q_{\sigma+\varepsilon} \in L_2^\alpha(\mathbb{R})$, использовавшуюся в ходе доказательства теоремы 3. Однако предварительно введем следующие обозначения:

$$|w(x)|_*^2 := \big\{|w(x)|^2, \text{ если } |x| \leq t_*(|w|^2);\ |w(t_*)|^2, \text{ если } |x| \geq t_*(|w|^2)\big\}, \tag{6.19}$$

$$\widehat{\mathcal{W}}_*(t) := \left\{\frac{1}{t}\int\limits_0^t |w(h)|_*^2\,dh, \text{ если } t \neq 0;\ 0, \text{ если } t = 0\right\}. \tag{6.20}$$

Очевидно, что для любого $x \in [0,\infty)$ имеем $|w(x)|^2 \leq |w(x)|_*^2$. Определенная указанным в (6.20) образом функция $\widehat{\mathcal{W}}_*$, когда $|w|^2 \in \mathfrak{M}$, является непрерывной на $\mathbb{R}$, четной, неотрицательной и возрастающей на множестве $0 \leq t < \infty$. Используя (6.19), записываем

$$\big\|\Delta_h^w(D^\alpha q_{\sigma+\varepsilon})\big\|^2 = 2\int\limits_\sigma^{\sigma+\varepsilon} \tau^{2\alpha}|w(h\tau)|^2\,d\tau \leq \mathcal{A}_\sigma^2(q_{\sigma+\varepsilon})(\sigma+\varepsilon)^{2\alpha}\big|w(h(\sigma+\varepsilon))\big|_*^2.$$

Отсюда в силу соотношения (6.20) для $u \in (0,\infty)$ получаем

$$\Lambda^w(D^\alpha q_{\sigma+\varepsilon}, u) = \left\{\frac{1}{u}\int\limits_0^u \|\Delta_h^w(D^\alpha q_{\sigma+\varepsilon})\|^2\,dh\right\}^{1/2} \leq \mathcal{A}_\sigma(q_{\sigma+\varepsilon})(\sigma+\varepsilon)^\alpha\sqrt{\widehat{\mathcal{W}}_*(u(\sigma+\varepsilon))}.$$

Полагая $u = t/\sigma$, где $0 < t \leq t_*(|w|^2)$, из последнего неравенства имеем $\Lambda^w(D^\alpha q_{\sigma+\varepsilon}, t/\sigma) \leq$ $\leq \mathcal{A}_\sigma(q_{\sigma+\varepsilon})(\sigma+\varepsilon)^\alpha\sqrt{\widehat{\mathcal{W}}_*(t(1+\varepsilon/\sigma))}$ или

$$\frac{\sigma^\alpha \mathcal{A}_\sigma(q_{\sigma+\varepsilon})}{\Lambda^w(D^\alpha q_{\sigma+\varepsilon}, t/\sigma)} \geq \frac{1}{(1+\varepsilon/\sigma)^\alpha \sqrt{\widehat{\mathcal{W}}_*(t(1+\varepsilon/\sigma))}}. \tag{6.21}$$

Поскольку, как уже отмечалось, функция $q_{\sigma+\varepsilon}$ принадлежит классу $L_2^\alpha(\mathbb{R})$, то, учитывая (6.21), записываем

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^\alpha \mathcal{A}_\sigma(f)}{\Lambda^w(D^\alpha f, t/\sigma)} \geq \frac{1}{(1+\varepsilon/\sigma)^\alpha \sqrt{\widehat{\mathcal{W}}_*(t(1+\varepsilon/\sigma))}}. \tag{6.22}$$

Так как знаменатель дроби, содержащейся в правой части неравенства (6.22), является монотонно возрастающей функцией от $\varepsilon > 0$ при произвольных, но фиксированных значениях $\sigma \in (0,\infty)$, $t \in (0, t_*(|w|^2)]$, $\alpha \in [1/2,\infty)$ и в силу (6.19), (6.20)

$$\lim\left\{(1+\varepsilon/\sigma)^\alpha \sqrt{\widehat{\mathcal{W}}_*(t(1+\varepsilon/\sigma))} \colon \varepsilon \to 0+\right\} = \sqrt{\mathcal{W}(t)},$$

то для любого $\delta > 0$ существует такое значение $\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}(\delta) \in (0,\sigma_*)$, $\sigma_* = \min(\sigma, 1/\sigma)$, для которого выполняется неравенство

$$\frac{1}{\left\{(1+\widetilde{\varepsilon}/\sigma)^\alpha \sqrt{\widehat{\mathcal{W}}_*(t(1+\widetilde{\varepsilon}/\sigma))}\right\}} > \frac{1}{\sqrt{\mathcal{W}(t)}} - \delta.$$

Отсюда, используя определение верхней грани числового множества, имеем

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\sigma_*)} \frac{1}{(1+\varepsilon/\sigma)^\alpha \sqrt{\widehat{\mathcal{W}}_*(t(1+\varepsilon/\sigma))}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{W}(t)}}. \tag{6.23}$$

Вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon \in (0,\sigma_*)$ от правой части неравенства (6.22) и используя (6.23), записываем оценку снизу рассматриваемой экстремальной характеристики:

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^\alpha \mathcal{A}_\sigma(f)}{\Lambda^w(D^\alpha f, t/\sigma)} \geq \frac{1}{\sqrt{\mathcal{W}(t)}}. \tag{6.24}$$

Требуемое равенство (6.14) следует из соотношений (6.18) и (6.24), что и завершает доказательство теоремы 4.

6.2.1. Пусть, как и в пп. 6.1.1, числовая последовательность $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{1,m}$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathcal{W}_m := \mathcal{W}_{\mathcal{M}_{1,m}}$, $\Lambda^{w_{\mathcal{M}_{1,m}}} = \Lambda_m$, $t_*(|w_{\mathcal{M}_{1,m}}|^2) = \pi$ и, согласно теореме 4, для любых $t \in (0,\pi]$, $\alpha \in [1/2,\infty)$ и $\sigma \in (0,\infty)$ получаем

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^\alpha \mathcal{A}_\sigma(f)}{\Lambda_m(D^\alpha f, t/\sigma)} = \left\{\binom{2m}{m} - 2\sum_{j=1}^m (-1)^{j+1}\binom{2m}{m-j}\operatorname{sinc}(jt)\right\}^{-1/2}.$$

6.2.2. Пусть, как и в пп. 6.1.2, числовая последовательность $\mathcal{M} = \mathcal{M}_4$. Тогда $\Lambda^{w_{\mathcal{M}_4}} = \widehat{\Lambda}$, $t_*(|w_{\mathcal{M}_4}|^2) = \pi$ и при любых t, α, σ, удовлетворяющих указанным в пп. 6.2.1 условиям, в силу (6.14) и (6.13) справедливо равенство

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})}\frac{\sigma^\alpha\mathcal{A}_\sigma(f)}{\widehat{\Lambda}(D^\alpha f,t/\sigma)}=\frac{\sqrt{3}\pi}{2t}.$$

6.2.3. Рассмотрим далее числовую последовательность $\mathcal{M}_3:=\big\{\mu_j=3/(\pi j)^2,$ если $j\in\in\mathbb{Z}\backslash\{0\};\ \mu_j=-1,$ если $j=0\big\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Ей на основании формулы (2.10) соответствует функция $w_{\mathcal{M}_3}\in\mathfrak{M}$, квадрат модуля которой на отрезке $-\pi\le x\le\pi$ имеет вид $|w_{\mathcal{M}_3}(x)|^2==9x^2(1-|x|/(2\pi))^2/\pi^2$ [1]. В данном случае произвольной функции $f\in L_2(\mathbb{R})$ ставится в соответствие определенное почти всюду на $\mathbb{R}$ разностное соотношение $\overline{\Delta}_h(f,x):=:=\Delta^{w_{\mathcal{M}_3}}(f,x)=(3/\pi^2)\sum_{j\in\mathbb{Z}}f(x+jh)/j^2-f(x)$. Разностный оператор $\overline{\Delta}_h: L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$ был использован С. Ю. Артамоновым в [8] для определения модуля непрерывности $\omega_{\langle'\rangle}$, как одной из возможных модификаций характеристики гладкости $\widehat{\omega}$ из [6]. Поскольку в рассматриваемом случае $t_*(|w_{\mathcal{M}_3}|^2)=\pi$ и для $0<t\le\pi$ имеем $\mathcal{W}_{\mathcal{M}_3}(t)=(1/t)\displaystyle\int_0^t|w_{\mathcal{M}_3}(h)|^2\,dh==3t^2(3t^2-15\pi t+20\pi^2)/(20\pi^2)$, то для произвольных значений $\alpha\in[1/2,\infty),\ \sigma\in(0,\infty)$ и $t\in(0,\pi]$ из (6.14) получаем

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})}\frac{\sigma^\alpha\mathcal{A}_\sigma(f)}{\Lambda_{\langle'\rangle}(D^\alpha f,t/\sigma)}=\frac{2\sqrt{5}\pi}{t\sqrt{3(3t^2-15\pi t+20\pi^2)}},$$

где

$$\Lambda_{\langle'\rangle}(f,t):=\Lambda^{w_{\mathcal{M}_3}}(f,t)=\left\{\frac{1}{t}\int\limits_0^t\big\|\overline{\Delta}_h(f)\big\|^2\,dh\right\}^{1/2},\quad t>0. \tag{6.25}$$

6.2.4. Пусть $w=\widetilde{w}_m,\ m\in\mathbb{N}$. Тогда $|\widetilde{w}_m(x)|^2=(1-\operatorname{sinc}(x))^{2m}$ и значение $t_*(|\widetilde{w}_m|^2)$ принадлежит отрезку (4,49; 4,51), являясь наименьшим положительным корнем уравнения $tg(x)=x$ [4]. Как отмечалось в [1], для характеристики гладкости ω^w в данном случае имеем

$$\widetilde{\Omega}_m(f,t)=\omega^{\widetilde{w}_m}(f,t)=\sup\left\{\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}(f,\tau)|^2(1-\operatorname{sinc}(h\tau))^{2m}\,d\tau\right):0<h\le t\right\},\quad t>0,$$

где $f\in L_2(\mathbb{R})$.

Используя соотношение (6.1), для $f\in L_2(\mathbb{R})$ полагаем

$$\widetilde{\Lambda}_m(f,t):=\Lambda^{\widetilde{w}_m}(f,t)=\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}(f,\tau)|^2\widetilde{\mathcal{W}}_m(t\tau)\,d\tau\right\}^{1/2},\quad t>0, \tag{6.26}$$

где $\widetilde{\mathcal{W}}_m(x):=\left\{0,\ \text{если}\ \ x=0;\ (1/x)\displaystyle\int_0^x(1-\operatorname{sinc}(h))^{2m}\,dh,\ \text{если}\ \ x\in\mathbb{R}\ \text{и}\ x\ne0\right\}$. Тогда из теоремы 4 в рассматриваемом случае имеем

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})}\frac{\sigma^\alpha\mathcal{A}_\sigma(f)}{\widetilde{\Lambda}_m(D^\alpha f,t/\sigma)}=\left\{\frac{t}{\displaystyle\int_0^t(1-\operatorname{sinc}(\tau))^{2m}\,d\tau}\right\}^{1/2},$$

где $0 < t \le t_*(|\widetilde{w}_m|^2)$, $\alpha \in [1/2, \infty)$, $\sigma \in (0, \infty)$. В случае, когда $m = 1$, отсюда получаем

$$\sup_{f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^\alpha \mathcal{A}_\sigma(f)}{\widetilde{\Lambda}_1(D^\alpha f, t/\sigma)} = \left\{ 1 - \frac{\mathrm{Si}(t)}{t} + \frac{1}{t} \int\limits_0^t \mathrm{sinc}^2(\tau)\, d\tau \right\}^{-1/2},$$

где $\mathrm{Si}(t) := \displaystyle\int_0^t \mathrm{sinc}(h)\, dh$ — интегральный синус.

6.3. **Теорема 5.** *Пусть* α *и* σ *принадлежат* $(0, \infty)$; *комплекснозначная функция* $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *принадлежит классу* $\mathfrak{M}$ *и квадрат ее модуля удовлетворяет свойству* A; $p \in (0, 2]$; $\mathcal{W} \in \mathbb{G}$; x — *конечное положительное число*; ξ — *неотрицательная, измеримая, существенно ограниченная на отрезке* $[0, x]$ *функция, которая не эквивалентна нулю*;

$$\eta_{w,\alpha,p,x}(\xi, \tau) := |\tau|^{2\alpha} \left\{ \int\limits_0^x \mathcal{W}^{p/2}(\tau t) \xi(t)\, dt \right\}^{2/p}, \tag{6.27}$$

где $\tau \in \mathbb{R}$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{ \displaystyle\int_0^x (\Lambda^w(D^\alpha f, t))^p \xi(t)\, dt \right\}^{1/p}} = \left\{ \inf_{\tau \ge \sigma} \eta_{w,\alpha,p,x}(\xi, \tau) \right\}^{-1/2}. \tag{6.28}$$

Доказательство. Полагаем $S(f; t, \tau) := |\tau|^{\alpha p} |\mathcal{F}(f, \tau)|^p \mathcal{W}^{p/2}(t\tau) \xi(t)$. Используя соотношение (6.15), а также применяя обобщенное неравенство Минковского (см., например, [9], гл. I, п. 1.3), обозначение (6.27) и учитывая, что $\eta_{w,\alpha,p,x}(\xi, \tau) = \eta_{w,\alpha,p,x}(\xi, -\tau)$, в силу принадлежности функции $\mathcal{W}$ множеству $\mathbb{G}$ записываем

$$\left\{ \int\limits_0^x (\Lambda^w(D^\alpha f, t))^p \xi(t)\, dt \right\}^{1/p} \ge \left\{ \int\limits_0^x \left[\int\limits_{|\tau| \ge \sigma} |\mathcal{F}(f, \tau)|^2 |\tau|^{2\alpha} \mathcal{W}(t\tau)\, d\tau \right]^{p/2} \xi(t)\, dt \right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{ \int\limits_0^x \left[\int\limits_{|\tau| \ge \sigma} \left(|\tau|^{\alpha p} |\mathcal{F}(f, \tau)|^p \mathcal{W}^{p/2}(t\tau) \xi(t) \right)^{2/p} d\tau \right]^{p/2} dt \right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{ \int\limits_0^x \left[\int\limits_{|\tau| \ge \sigma} S^{2/p}(f; t, \tau)\, d\tau \right]^{p/2} dt \right\}^{1/p} \ge \left\{ \int\limits_{|\tau| \ge \sigma} \left[\int\limits_0^x S(f; t, \tau)\, dt \right]^{2/p} d\tau \right\}^{\frac{p}{2} \cdot \frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{ \int\limits_{|\tau| \ge \sigma} |\mathcal{F}(f, \tau)|^2 \left[|\tau|^{\alpha p} \int\limits_0^x \mathcal{W}^{p/2}(t\tau) \xi(t)\, dt \right]^{2/p} d\tau \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \int\limits_{|\tau|\geq\sigma} |\mathcal{F}(f,\tau)|^2 \eta_{w,\alpha,p,x}(\xi,\tau)\,d\tau \right\}^{1/2} \geq$$

$$\geq \mathcal{A}_\sigma(f) \left\{ \inf_{\tau\geq\sigma} \eta_{w,\alpha,p,x}(\xi,\tau) \right\}^{1/2}.$$

Отсюда следует оценка сверху рассматриваемой экстремальной характеристики:

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{ \int_0^x (\Lambda^w(D^\alpha f,t))^p \xi(t)\,dt \right\}^{1/p}} \leq \left\{ \inf_{\tau\geq\sigma} \eta_{w,\alpha,p,x}(\xi,\tau) \right\}^{-1/2}. \tag{6.29}$$

Перейдем к получению оценки снизу экстремальной характеристики, содержащейся в левой части неравенства (6.29). Для этого зафиксируем произвольное значение $u \in \mathbb{R}$, $|u| \geq \sigma$, и рассмотрим целую функцию экспоненциального типа $\leq |u| + \varepsilon$ следующего вида: $q_{|u|+\varepsilon}(x) := \sqrt{\pi/2}(\lambda_{|u|+\varepsilon}(x) - \lambda_{|u|})$, где $\varepsilon \in (0, \widetilde{u})$, $\widetilde{u} := \min(|u|, 1/|u|)$, $\lambda_a(x) := a\,\mathrm{sinc}(ax)$, $a \in (0,\infty)$. Поскольку $\mathcal{F}(q_{|u|+\varepsilon}, x) = \{1,$ если $|u| < |x| < |u| + \varepsilon;\ 1/2,$ если $|x| = |u|$ или $|x| = |u| + \varepsilon;\ 0,$ если $|x| < |u|$ или $|x| > |u| + \varepsilon\}$, то очевидно, что $q_{|u|+\varepsilon}$ принадлежит $L_2^\alpha(\mathbb{R})$ и $\mathcal{A}_\sigma(q_{|u|+\varepsilon}) = \sqrt{2\varepsilon}$. Учитывая, что $\left\|\Delta_h^w(D^\alpha q_{|u|+\varepsilon})\right\|^2 = 2\int_{|u|}^{|u|+\varepsilon} \tau^{2\alpha}|w(h\tau)|^2\,d\tau$, для произвольного $t \in (0,\infty)$ получаем

$$\left(\Lambda^w(D^\alpha q_{|u|+\varepsilon}, t)\right)^2 = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \left\|\Delta_h^w(D^\alpha q_{|u|+\varepsilon})\right\|^2 dh =$$

$$= \frac{2}{t}\int\limits_0^t \left\{ \int\limits_{|u|}^{|u|+\varepsilon} \tau^{2\alpha}|w(h\tau)|^2 d\tau \right\} dh = 2\int\limits_{|u|}^{|u|+\varepsilon} \tau^{2\alpha}\mathcal{W}(t\tau)\,d\tau. \tag{6.30}$$

Возводя левую и правую части равенства (6.30) в степень $p/2$, а затем умножая их на функцию $\xi(t)$ и интегрируя по переменной t в пределах от 0 до x, имеем

$$\int\limits_0^x \left(\Lambda^w(D^\alpha q_{|u|+\varepsilon}, t)\right)^p \xi(t)\,dt = 2^{p/2}\int\limits_0^x \left\{ \int\limits_{|u|}^{|u|+\varepsilon} \tau^{2\alpha}\mathcal{W}(t\tau)\,d\tau \right\}^{p/2} \xi(t)\,dt. \tag{6.31}$$

В силу теоремы о среднем имеем $\int_{|u|}^{|u|+\varepsilon} \mathcal{W}(t\tau)\,d\tau = \varepsilon\mathcal{W}(ty)$, где величина y зависит от u, ε, т. е. $y = y(u,\varepsilon) \in (|u|, |u| + \varepsilon)$. Используя данный факт, из (6.31) получаем

$$\left\{ \int\limits_0^x \left(\Lambda^w(D^\alpha q_{|u|+\varepsilon}, t)\right)^p \xi(t)\,dt \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \mathcal{A}_\sigma(q_{|u|+\varepsilon})(|u|+\varepsilon)^\alpha \left\{\int\limits_0^x \mathcal{W}^{p/2}(ty(u,\varepsilon))\xi(t)\,dt\right\}^{1/p}, \quad |u| \geq \sigma.$$

Следовательно,

$$\frac{\mathcal{A}_\sigma(q_{|u|+\varepsilon})}{\left\{\int\limits_0^x \big(\Lambda^w(D^\alpha q_{|u|+\varepsilon},t)\big)^p \xi(t)\,dt\right\}^{1/p}} \geq (|u|+\varepsilon)^{-\alpha} \left\{\int\limits_0^x \mathcal{W}^{p/2}(ty(u,\varepsilon))\xi(t)\,dt\right\}^{-1/p}, \quad |u| \geq \sigma.$$

Поскольку, как уже отмечалось, $q_{|u|+\varepsilon}$ принадлежит $L_2^\alpha(\mathbb{R})$, то в силу последнего неравенства записываем

$$\chi_{w,\alpha,p,\sigma}(x) := \sup_{f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int\limits_0^x \big(\Lambda^w(D^\alpha f,t)\big)^p \xi(t)\,dt\right\}^{1/p}} \geq$$

$$\geq (|u|+\varepsilon)^{-\alpha} \left\{\int\limits_0^x \mathcal{W}^{p/2}(ty(u,\varepsilon))\xi(t)\,dt\right\}^{-1/p}, \quad |u| \geq \sigma.$$

Далее, так как левая часть данного соотношения не зависит от ε, выполняются неравенства

$$\chi_{w,\alpha,p,\sigma}(x) \geq \limsup \left\{(|u|+\varepsilon)^{-\alpha} \left(\int\limits_0^x \mathcal{W}^{p/2}(ty(u,\varepsilon))\xi(t)\,dt\right)^{-1/p} : \varepsilon \to 0+\right\} \geq$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} (|u|+1/n)^{-\alpha} \left\{\int\limits_0^x \mathcal{W}^{p/2}(ty(u,1/n))\xi(t)\,dt\right\}^{-1/p} =$$

$$= |u|^{-\alpha} \left\{\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^x \psi_n(t)\,dt\right\}^{-1/p}, \tag{6.32}$$

где $\psi_n(t) := \mathcal{W}^{p/2}(ty(u,1/n))\xi(t)$, $n \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}$ $(|u| \geq \sigma)$ — произвольное фиксированное число, $p \in (0,2]$, $t \in [0,x]$ — переменная величина.

Поскольку для функции $w \in \mathfrak{M}$ квадрат ее модуля удовлетворяет *свойству A*, то для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем $\mathcal{W}(x) \leq |w(t_*)|^2$, где величина t_* зависит от $|w|^2$. Так как ξ является неотрицательной, измеримой, не эквивалентной нулю и существенно ограниченной на отрезке $[0,x]$ функцией, то $\Psi := \{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — множество неотрицательных и суммируемых на $[0,x]$ функций. Пусть $e \in [0,x]$ — произвольное множество и $\mathrm{mes}(e)$ — его мера. Поскольку

$$\int\limits_e \psi_n(t)\,dt \leq |w(t_*)|^p \int\limits_e \xi(t)\,dt \leq |w(t_*)|^p \|\xi\|_{L_\infty([0,x])} \mathrm{mes}(e),$$

где $L_\infty([0,x])$ — пространство существенно ограниченных на $[0,x]$ функций, то очевидно, что для любого $\delta > 0$ существует такое значение $\mu > 0$, $\mu = \mu(\delta)$, что при выполнении для любого множества $e \subset [0,x]$ условия $\mathrm{mes}(e) < \mu$ неравенство $\int\limits_e \psi_n(t)\,dt < \delta$ будет выполняться для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, функции ψ_n, $n \in \mathbb{N}$, множества Ψ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Вследствие того, что $\lim\{y(u,\varepsilon)\colon \varepsilon \to 0+\} = |u|$, для почти всех $t \in [0,x]$ имеем $\lim\{\psi_n(t)\colon n \to \infty\} = F(t)$, где $F(t) := \mathcal{W}^{p/2}(ut)\xi(t)$. При этом последовательность функций $\psi_1, \psi_2, \ldots$ сходится к F на отрезке $[0,x]$ и по мере. Тогда согласно теореме Д. Витали (см., например, [10], гл. II, § 3) из вышеприведенного получаем

$$\lim\left\{\int\limits_0^x \psi_n(t)dt\colon n \to \infty\right\} = \int\limits_0^x F(t)\,dt$$

или

$$\lim\left\{\int\limits_0^x \mathcal{W}^{p/2}(ty(u,1/n)\xi(t)\,dt\colon n \to \infty\right\} = \int\limits_0^x \mathcal{W}^{p/2}(ut)\xi(t)\,dt.$$

Используя данный факт и (6.27), из (6.32) находим

$$\chi_{w,\alpha,p,\sigma}(x) \geq |u|^{-\alpha}\left\{\int\limits_0^x \mathcal{W}^{p/2}(ut)\xi(t)\,dt\right\}^{-1/p} = \left\{\eta_{w,\alpha,p,x}(\xi,u)\right\}^{-1/2}, \quad |u| \geq \sigma.$$

Поскольку левая часть данного соотношения не зависит от u, то

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^x (\Lambda^w(D^\alpha f,t))^p\xi(t)\,dt\right\}^{1/p}} \geq \sup_{u\geq\sigma}\left\{\eta_{w,\alpha,p,x}(\xi,u)\right\}^{-1/2} = \left\{\inf_{\tau\geq\sigma}\eta_{w,\alpha,p,x}(\xi,\tau)\right\}^{-1/2}. \tag{6.33}$$

Равенство (6.28) следует из соотношений (6.29) и (6.33), что и завершает доказательство теоремы 5.

7. Некоторые следствия, вытекающие из теоремы 5. Общий результат, содержащийся в теореме 5, позволяет при определенных конкретизациях функции w точно вычислить правую часть равенства (6.28). Этому вопросу и будут посвящены нижеследующие утверждения.

***7.1. Следствие* 5.** *Пусть комплекснозначная функция $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$, а функция $\mathcal{W}$ является элементом множества $\mathbb{G}$. При этом функции $|w|^2$ и $\mathcal{W}$ удовлетворяют свойству A; $\alpha, \sigma \in (0,\infty)$; $p \in (0,2]$; $x \in (0, \overline{t}(\mathcal{W})/\sigma]$; ξ — неотрицательная, измеримая, существенно ограниченная на отрезке $[0,x]$ функция, которая не эквивалентна нулю. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^\alpha\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^x (\Lambda^w(D^\alpha f,t))^p\xi(t)\,dt\right\}^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^x \mathcal{W}^{p/2}(\sigma t)\xi(t)\,dt\right\}^{-1/p}. \tag{7.1}$$

Доказательство. Используя приведенные в пп. 6.1 определения величин $\overline{t}(\mathcal{W})$, $t_*(\mathcal{W})$ и $\widetilde{t_*}(\mathcal{W})$, а также в силу геометрических соображений относительно поведения функции $\mathcal{W} \in \mathbb{G}$, удовлетворяющей на множестве $0 \leq t < \infty$ *свойству A*, для произвольных $z \in (0, \overline{t}(\mathcal{W})]$, $v \in [1, \infty)$ и $\nu, \delta \in [0, \infty)$ имеем $v^{\nu}\mathcal{W}^{\delta}(vz) \geq \mathcal{W}^{\delta}(z)$. Полагая $v = \tau/\sigma$, $\tau \in [\sigma, \infty)$, $z = \sigma t$, где $t \in (0, x]$, $\nu = \alpha p$ и $\delta = p/2$, отсюда получаем $\tau^{\alpha p}\mathcal{W}^{p/2}(\tau t) \geq \sigma^{\alpha p}\mathcal{W}^{p/2}(\sigma t)$. Умножая обе части данного неравенства на функцию $\xi(t)$ и интегрируя обе части полученного таким образом соотношения по переменной t в пределах от 0 до x, находим

$$\tau^{\alpha p}\int\limits_0^x \mathcal{W}^{p/2}(\tau t)\xi(t)\,dt \geq \sigma^{\alpha p}\int\limits_0^x \mathcal{W}^{p/2}(\sigma t)\xi(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$\inf\left\{\tau^{2\alpha}\left(\int\limits_0^x \mathcal{W}^{p/2}(\tau t)\xi(t)\,dt\right)^{2/p} : \tau \geq \sigma\right\} = \sigma^{2\alpha}\left\{\int\limits_0^x \mathcal{W}^{p/2}(\sigma t)\xi(t)\,dt\right\}^{2/p}$$

или, в силу (6.27), $\inf\big\{\eta_{w,\alpha,p,x}(\xi,\tau) : \tau \geq \sigma\big\} = \eta_{w,\alpha,p,x}(\xi,\sigma)$. Поскольку равенство (7.1) вытекает из данного факта и (6.27), (6.28), следствие 5 доказано.

7.1.1. Используя изложенную в пп. 6.1.1 информацию, из (7.1) в рассматриваемом случае имеем

$$\sup_{f\in L_2^{\alpha}(\mathbb{R})}\frac{\sigma^{\alpha}\mathcal{A}_{\sigma}(f)}{\left\{\int_0^x \Lambda_1^p(D^{\alpha}f,t)\xi(t)\,dt\right\}^{1/p}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\int\limits_0^x (1-\operatorname{sinc}(\sigma t))^{p/2}\xi(t)\,dt\right\}^{-1/p},$$

где $0 < x \leq \overline{t}(\mathcal{W}_1)/\sigma$. Отсюда, в частности, при $p = 2$, $\xi(t) \equiv 1$ и $x = h/\sigma$, где $h \in (0, \overline{t}(\mathcal{W}_1)]$, получаем

$$\sup_{f\in L_2^{\alpha}(\mathbb{R})}\frac{\sigma^{\alpha-1/2}\mathcal{A}_{\sigma}(f)}{\left\{\int_0^{h/\sigma} \Lambda_1^2(D^{\alpha}f,t)\,dt\right\}^{1/2}} = \big\{2(h - \mathrm{Si}(h))\big\}^{-1/2}.$$

7.1.2. Используя результаты, изложенные в пп. 6.1.2, из соотношения (7.1) имеем

$$\sup_{f\in L_2^{\alpha}(\mathbb{R})}\frac{\sigma^{\alpha+1}\mathcal{A}_{\sigma}(f)}{\left\{\int_0^x \widehat{\Lambda}^p(D^{\alpha}f,t)\xi(t)\,dt\right\}^{1/p}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}\left\{\int\limits_0^x t^p\xi(t)\,dt\right\}^{-1/p},$$

где $0 < x \leq \overline{t}(\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4})/\sigma$. Полагая, например, $\xi(t) = t^k$, где $k \in (0, \infty)$, отсюда получаем

$$\sup_{f\in L_2^{\alpha}(\mathbb{R})}\frac{\sigma^{\alpha+1}\mathcal{A}_{\sigma}(f)}{\left\{\int_0^x \widehat{\Lambda}^p(D^{\alpha}f,t)t^k\,dt\right\}^{1/p}} = \frac{\sqrt{3}\pi(p+k+1)^{1/p}}{x^{1+(k+1)/p}}.$$

7.2. ***Следствие 6.*** *Пусть комплекснозначная функция* $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *принадлежит классу* $\mathfrak{M}$ *и квадрат ее модуля удовлетворяет свойству A*; $\sigma \in (0, \infty)$; $\alpha \in [1/2, \infty)$, $p \in [1/\alpha, 2]$; $x \in (0, \infty)$ — *произвольное фиксированное число. Если функция* ξ *на интервале* $(0, x)$ *является* *измеримой, существенно ограниченной, неотрицательной, не эквивалентной нулю, дифференцируемой почти всюду и при некотором* $p = \widetilde{p}$ *почти для всех* $t \in (0, x)$ *удовлетворяет условию*

$$\xi(t)(\alpha\widetilde{p} - 1) - t\xi'(t) \geq 0, \tag{7.2}$$

то для данного $\widetilde{p}$ *справедливо равенство* (7.1).

Доказательство. Из соотношения (6.27) очевидно, что для выполнения равенства (7.1) при указанных в следствии 6 условиях достаточно показать справедливость формулы

$$\inf\left\{\eta_{w,\alpha,\widetilde{p},x}(\xi,\tau) : \tau \geq \sigma\right\} = \eta_{w,\alpha,\widetilde{p},x}(\xi,\sigma). \tag{7.3}$$

Для этого при $\tau \geq \sigma$ рассмотрим вспомогательную функцию $Q(\tau) := \left\{\eta_{w,\alpha,\widetilde{p},x}(\xi,\tau)\right\}^{\widetilde{p}/2} = \tau^{\alpha\widetilde{p}} \int_0^x \mathcal{W}^{\widetilde{p}/2}(\tau t)\xi(t)\,dt$, где α, $\widetilde{p}$, x — некоторые фиксированные значения, и вычислим ее производную первого порядка

$$Q'(\tau) = \alpha\widetilde{p}\tau^{\alpha\widetilde{p}-1} \int\limits_0^x \mathcal{W}^{\widetilde{p}/2}(\tau t)\xi(t)\,dt + \tau^{\alpha\widetilde{p}} \int\limits_0^x \xi(t)\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{W}^{\widetilde{p}/2}(\tau t)\,dt. \tag{7.4}$$

Используя понятие производной сложной функции, можно убедиться в справедливости равенства $\dfrac{1}{t}\dfrac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{W}^{\widetilde{p}/2}(\tau t) = \dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial}{\partial t}\mathcal{W}^{\widetilde{p}/2}(\tau t)$, где переменные τ и t принимают положительные значения. С учетом данного соотношения из (7.4) получаем

$$Q'(\tau) = \tau^{\alpha\widetilde{p}-1}\left\{\alpha\widetilde{p}\int\limits_0^x \mathcal{W}^{\widetilde{p}/2}(\tau t)\xi(t)\,dt + \int\limits_0^x t\xi(t)\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{W}^{\widetilde{p}/2}(\tau t)\,dt\right\}.$$

Интегрируя по частям второй интеграл, имеем

$$Q'(\tau) = \tau^{\alpha\widetilde{p}-1}\left\{x\mathcal{W}^{\widetilde{p}/2}(\tau x)\xi(x) + \int\limits_0^x \mathcal{W}^{\widetilde{p}/2}(\tau t)\big(\xi(t)(\alpha\widetilde{p}-1) - t\xi'(t)\big)\,dt\right\}. \tag{7.5}$$

Используя условие (7.2), из (7.5) получаем $Q'(\tau) \geq 0$ для любого $\tau \geq \sigma$, т. е. Q является неубывающей функцией от τ и, следовательно, справедливо равенство (7.3).

Следствие 6 доказано.

Рассмотрим несколько конкретизаций основного результата в следствии 6.

7.2.1. Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{1,m}$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{W}_m = \mathcal{W}_{\mathcal{M}_{1,m}}$. Тогда $\Lambda^{w_{\mathcal{M}_{1,m}}} = \Lambda_m$. Используя приведенное в пп. 6.1.1 представление функции $\mathcal{W}_m$ и полагая, что все условия следствия 6 выполнены, для произвольного $x \in (0,\infty)$ получаем

$$\sup_{f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^\alpha \mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^x \Lambda_m^{\widetilde{p}}(D^\alpha f, t)\xi(t)\,dt\right\}^{1/\widetilde{p}}} =$$

$$= \left\{\int\limits_0^x \left[\binom{2m}{m} - 2\sum_{j=1}^m (-1)^{j+1}\binom{2m}{m-j}\operatorname{sinc}(j\sigma t)\right]^{\widetilde{p}/2} \xi(t)\,dt\right\}^{-1/\widetilde{p}}. \tag{7.6}$$

Несложно проверить, что в случае $\widetilde{p} = 2$ и $\xi(t) \equiv 1$ условие (7.2) выполняется автоматически. Тогда, полагая $x = z/\sigma$, где $z \in (0, \infty)$, с учетом (7.6) имеем

$$\sup_{f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{\alpha-1/2}\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^{z/\sigma} \Lambda_m^2(D^\alpha f, t)\, dt\right\}^{1/2}} = \left\{z\left[\binom{2m}{m} - 2\sum_{j=1}^m \binom{2m}{m-j}\frac{\mathrm{Si}(jz)}{jz}\right]\right\}^{-1/2}.$$

Если, например, в данном равенстве $m = 1$, то

$$\sup_{f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{\alpha-1/2}\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^{z/\sigma} \Lambda_1^2(D^\alpha f, t)\, dt\right\}^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2(z - \mathrm{Si}(z))}}.$$

Напомним, что для частного случая $\alpha = r \in \mathbb{N}$ и $m = 1$ соотношение (7.6) было получено в работе [5].

7.2.2. Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{M}_4$. Используя результаты пп. 6.1.2, записываем разложение четной, непрерывной, 2π-периодической функции $|w_{\mathcal{M}_4}|^2$ в ряд Фурье, а именно $|w_{\mathcal{M}_4}(x)|^2 = 4/3 + (16/\pi^2)\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k k^{-2}\cos(kx)$. Тогда

$$\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4}(t) := \frac{1}{t}\int_0^t |w_{\mathcal{M}_4}(h)|^2\, dh = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k k^{-2}\,\mathrm{sinc}(kt), \quad t \in (0, \infty).$$

На основании следствия 6 и данного соотношения для любого $x \in (0, \infty)$ имеем

$$\sup_{f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{\alpha}\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^{x} \widehat{\Lambda}^{\widetilde{p}}(D^\alpha f, t)\xi(t)\, dt\right\}^{1/\widetilde{p}}} = \left\{\int_0^x \mathcal{W}_{\mathcal{M}_4}^{\widetilde{p}/2}(\sigma t)\xi(t)\, dt\right\}^{-1/\widetilde{p}} =$$

$$= \left\{\int_0^x \left[\frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k \frac{1}{k^2}\,\mathrm{sinc}(k\sigma t)\right]^{\widetilde{p}/2} \xi(t)\, dt\right\}^{-1/\widetilde{p}}. \tag{7.7}$$

Пусть $\xi = \xi_0$, где $\xi_0(t) := t$. Тогда условие (7.2) принимает вид $\widetilde{p} \geq 2/\alpha$. Следовательно, для $\widetilde{p} \in [2/\alpha, 2]$, где $\alpha \in [1, \infty)$, и функции ξ_0 имеет место равенство (7.7). Тогда, например, при $\widetilde{p} = 2$ и $x = z/\sigma$, где $z \in (0, \infty)$, получаем

$$\sup_{f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{\alpha-1}\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^{z/\sigma} \widehat{\Lambda}^2(D^\alpha f, t)t\, dt\right\}^{1/2}} = \left\{2z^2\left[\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k \frac{1}{k^2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{kz}{2}\right)\right]\right\}^{-1/2}. \tag{7.8}$$

Отметим, что при $0 < z \leq \pi$ правую часть формулы (7.8) можно представить в эквивалентном виде, использовав для этого многочлен Бернулли B_4 (см., например, [11, c. 652, 728, 776]), т. е.

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})}\frac{\sigma^{\alpha-1}\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^{z/\sigma}\widehat{\Lambda}^2(D^\alpha f,t)t\,dt\right\}^{1/2}}=\left\{\frac{2}{3}z^2-\frac{7\pi^2}{45}+\frac{16\pi^2}{3}B_4\left(\frac{1}{2\pi}z+\frac{1}{2}\right)\right\}^{-1/2},$$

где $B_4(t)=t^4-2t^3+t^2-1/30$. Полагая в (7.7) $x=z/\sigma$, где $z\in(0,\infty)$, $\xi(t)\equiv 1$ и $\widetilde{p}=2$, имеем

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})}\frac{\sigma^{\alpha-1/2}\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^{z/\sigma}\widehat{\Lambda}^2(D^\alpha f,t)\,dt\right\}^{1/2}}=\left\{\frac{4}{3}z+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{1}{k^3}\,\mathrm{Si}(kz)\right\}^{-1/2}.$$

7.2.3. В качестве следующего примера рассмотрим приведенный в пп. 6.2.3 случай, когда числовая последовательность $\mathcal{M}=\mathcal{M}_3$. В данном случае разложение в ряд Фурье четной, непрерывной, 2π-периодической функции $|w_{\mathcal{M}_3}|^2$ имеет вид $|w_{\mathcal{M}_3}(x)|^2=6/5-(108/\pi^4)\sum_{k\in\mathbb{N}}k^{-4}\cos(kx)$. Тогда $\mathcal{W}_{\mathcal{M}_3}(t)=6/5-(108/\pi^4)\sum_{k\in\mathbb{N}}k^{-4}\,\mathrm{sinc}(kt)$. С учетом этого факта для произвольного $x\in(0,\infty)$ имеем

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})}\frac{\sigma^{\alpha}\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^{x}\Lambda_{\langle\prime\rangle}^{\widetilde{p}}(D^\alpha f,t)\xi(t)\,dt\right\}^{1/\widetilde{p}}}=\left\{\int\limits_0^x\left[\frac{6}{5}-\frac{108}{\pi^4}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\mathrm{sinc}(k\sigma t)}{k^4}\right]^{\widetilde{p}/2}\xi(t)\,dt\right\}^{-1/\widetilde{p}}. \qquad (7.9)$$

В частности, при $\xi=\xi_0$ и, следовательно, в силу условия (7.2), где $\widetilde{p}\in[2/\alpha,2]$, $\alpha\in[1,\infty)$, равенство (7.9) также будет справедливым. Полагая, например, $\widetilde{p}=2$ и $x=z/\sigma$, где $z\in(0,\infty)$, из указанного соотношения получаем

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})}\frac{\sigma^{\alpha-1}\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^{z/\sigma}\Lambda_{\langle\prime\rangle}^2(D^\alpha f,t)t\,dt\right\}^{1/2}}=\left\{3z^2\left[\frac{1}{2}-\frac{18}{\pi^4}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\mathrm{sinc}^2(kz/2)}{k^4}\right]\right\}^{-1/2}. \qquad (7.10)$$

При $0<z\le 2\pi$ правую часть формулы (7.10) можно представить в эквивалентном виде, использовав многочлен Бернулли B_6 (см., например, [11, с. 277, 726 (п. 5.4.2, формула 7), 777]), т. е.

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})}\frac{\sigma^{\alpha-1}\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^{z/\sigma}\Lambda_{\langle\prime\rangle}^2(D^\alpha f,t)t\,dt\right\}^{1/2}}=\left\{\frac{3}{2}z^2-\frac{\pi^2}{9}+\frac{24\pi^2}{5}B_6\left(\frac{z}{2\pi}\right)\right\}^{-1/2},$$

где $B_6(t)=t^6-3t^5+5t^4/2-t^2/2+1/42$. Если $\xi(t)\equiv 1$ и $\widetilde{p}=2$, то из (7.9) при $x=z/\sigma$, $z\in(0,\infty)$, получаем

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})}\frac{\sigma^{\alpha-1/2}\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^{z/\sigma}\Lambda_{\langle\prime\rangle}^2(D^\alpha f,t)\,dt\right\}^{1/2}}=\left\{\frac{6}{5}z-\frac{108}{\pi^4}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\mathrm{Si}(kz)}{k^5}\right\}^{-1/2}.$$

7.3. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\zeta_{w,\alpha,p,z}(\psi,u) := u^{2\alpha}\left\{\int\limits_0^z \mathcal{W}^{p/2}(ut)\psi(t)\,dt\right\}^{2/p}, \quad u>0. \tag{7.11}$$

Используя формулу (6.27), где $\tau\geq\sigma$, и полагая $x=\widetilde{x}$, где $\widetilde{x}=z/\sigma,\ z\in(0,\infty),\ \xi(t):=\psi(\sigma t)$, с учетом формулы (7.11) записываем

$$\eta_{w,\alpha,p,\widetilde{x}}(\psi,\tau)=\tau^{2\alpha}\left\{\int\limits_0^{z/\sigma}\mathcal{W}^{p/2}(\tau t)\psi(\sigma t)\,dt\right\}^{2/p}=$$

$$=\sigma^{2(\alpha-1/p)}\left\{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\alpha p}\int\limits_0^z\mathcal{W}^{p/2}\left(\frac{\tau}{\sigma}t\right)\psi(t)\,dt\right\}^{2/p}=\sigma^{2(\alpha-1/p)}\zeta_{w,\alpha,p,z}(\psi,\tau/\sigma).$$

Следовательно,

$$\inf\left\{\eta_{w,\alpha,p,\widetilde{x}}(\psi,\tau)\colon\tau\geq\sigma\right\}=\sigma^{2(\alpha-1/p)}\inf\left\{\zeta_{w,\alpha,p,z}(\psi,u)\colon u\geq 1\right\}. \tag{7.12}$$

Используя соотношение (7.12), из теоремы 5 получаем следующее утверждение.

***Следствие* 7.** *Пусть α и σ принадлежат $(0,\infty)$; комплекснозначная функция $w\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$ и $|w|^2$ удовлетворяет свойству A; $p\in(0,2]$; z — конечное положительное число; ψ — неотрицательная, измеримая, существенно ограниченная на отрезке $[0,z]$ функция, которая не эквивалентна нулю. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})}\frac{\sigma^\alpha\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^z(\Lambda^w(D^\alpha f,t/\sigma))^p\psi(t)\,dt\right\}^{1/p}}=\left\{\inf_{u\geq 1}\zeta_{w,\alpha,p,z}(\psi,u)\right\}^{-1/2}. \tag{7.13}$$

7.4. Определенный интерес, по мнению автора, представляет вопрос о том, при каких условиях справедливо равенство

$$\inf\left\{\zeta_{w,\alpha,p,z}(\psi,u)\colon u\geq 1\right\}=\zeta_{w,\alpha,p,z}(\psi,1). \tag{7.14}$$

Один из возможных ответов на него дает следующее утверждение.

***Следствие* 8.** *Пусть α и σ принадлежат $(0,\infty)$; $p\in(0,2]$; $z\in(0,\infty)$ — произвольное фиксированное число; $\psi_0(t):=t^{\alpha p-1}\widetilde{\psi}(t)$, где $\widetilde{\psi}$ — определенная на отрезке $[0,z]$ неотрицательная, невозрастающая, измеримая, суммируемая и не эквивалентная нулю функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})}\frac{\sigma^\alpha\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^z(\Lambda^w(D^\alpha f,t/\sigma))^p\ t^{\alpha p-1}\widetilde{\psi}(t)\,dt\right\}^{1/p}}=\left\{\int\limits_0^z\mathcal{W}^{p/2}(t)t^{\alpha p-1}\widetilde{\psi}(t)\,dt\right\}^{-1/p}. \tag{7.15}$$

Доказательство. Покажем справедливость соотношения (7.14) при $\psi = \psi_0$. Для этого полагаем

$$\widetilde{\psi}_*(t) := \Big\{\widetilde{\psi}(t), \text{ если } 0 \le t \le z;\ \widetilde{\psi}(z), \text{ если } z \le t < \infty\Big\}. \tag{7.16}$$

Используя формулы (7.11) и (7.16), для произвольного $u \ge 1$ имеем

$$\zeta_{w,\alpha,p,z}(\psi_0, u) = u^{2\alpha}\left\{\int\limits_0^z \mathcal{W}^{p/2}(ut)t^{\alpha p-1}\widetilde{\psi}(t)\,dt\right\}^{2/p} =$$

$$= \left\{\int\limits_0^{zu} \mathcal{W}^{p/2}(t)t^{\alpha p-1}\widetilde{\psi}(t/u)\,dt\right\}^{2/p} = \left\{\int\limits_0^{zu} \mathcal{W}^{p/2}(t)t^{\alpha p-1}\widetilde{\psi}_*(t/u)\,dt\right\}^{2/p}. \tag{7.17}$$

Поскольку $\widetilde{\psi}$ — невозрастающая на отрезке $[0,z]$ функция, то в силу (7.16) для любого $t \ge 0$ получаем $\widetilde{\psi}_*(t/u) \ge \widetilde{\psi}_*(t)$. С учетом этого факта для любого $u \ge 1$ из (7.17) имеем

$$\zeta_{w,\alpha,p,z}(\psi_0, u) \ge \left\{\int\limits_0^{zu} \mathcal{W}^{p/2}(t)t^{\alpha p-1}\widetilde{\psi}_*(t)\,dt\right\}^{2/p} \ge$$

$$\ge \left\{\int\limits_0^{z} \mathcal{W}^{p/2}(t)t^{\alpha p-1}\widetilde{\psi_*}(t)\,dt\right\}^{2/p} =$$

$$= \left\{\int\limits_0^{z} \mathcal{W}^{p/2}(t)t^{\alpha p-1}\widetilde{\psi}(t)\,dt\right\}^{2/p} = \zeta_{w,\alpha,p,z}(\psi_0, 1),$$

т. е. равенство (7.14) справедливо. Справедливость равенства (7.15) при $\psi = \psi_0$ следует из соотношений (7.13), (7.14) и (7.11).

Следствие 8 доказано.

Рассмотрим некоторые конкретизации соотношения (7.15).

7.4.1. Пусть, как и в пп. 6.1.1, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{1,m},\ m \in \mathbb{N}$. Тогда на основании равенства (7.15) для произвольного фиксированного значения $z \in (0,\infty)$ записываем

$$\sup_{f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^\alpha \mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^z \Lambda_m^p(D^\alpha f, t/\sigma)\ t^{\alpha p-1}\widetilde{\psi}(t)\,dt\right\}^{1/p}} =$$

$$= \left\{\int\limits_0^z \left[\binom{2m}{m} - 2\sum_{j=1}^m (-1)^{j+1}\binom{2m}{m-j}\operatorname{sinc}(jt)\right]^{p/2} t^{\alpha p-1}\widetilde{\psi}(t)\,dt\right\}^{-1/p}. \tag{7.18}$$

Отметим, что в качестве $\widetilde{\psi}$ можем рассматривать, например, заданные на отрезке $[0,z]$ функции $\widetilde{\psi}_\nu(t) := (z-t)^\nu$, где $\nu \in (0,\infty),\ t \in [0,z]$. Полагая в формуле (7.18) $\widetilde{\psi} = \widetilde{\psi}_1,\ p = 2$ и $\alpha = 1$, получаем

$$\sup_{f\in L_2^1(\mathbb{R})}\frac{\sigma\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^z \Lambda_m^2(f^{(1)},t/\sigma)t(z-t)\,dt\right\}^{1/2}}=$$

$$=\left\{z\left[\frac{1}{6}\binom{2m}{m}z^2-2\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\frac{1}{j^2}\binom{2m}{m-j}(1-\operatorname{sinc}(jz))\right]\right\}^{-1/2}. \tag{7.19}$$

В случае, когда $m=1$, из (7.19) имеем

$$\sup_{f\in L_2^1(\mathbb{R})}\frac{\sigma\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^z \Lambda_1^2(f^{(1)},t/\sigma)t(z-t)\,dt\right\}^{1/2}}=\left\{z\left[\frac{z^2}{2}-2(1-\operatorname{sinc}(z))\right]\right\}^{-1/2}.$$

7.4.2. Пусть $\mathcal{M}=\mathcal{M}_4$. Используя результаты, изложенные в пп. 6.1.2 и 7.2.2, с учетом соотношения (7.15) записываем

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})}\frac{\sigma\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^z \widehat{\Lambda}^p(D^\alpha f,t/\sigma)t^{\alpha p-1}\widetilde{\psi}(t)\,dt\right\}^{1/p}}=$$

$$=\left\{\int\limits_0^z\left[\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^k\operatorname{sinc}(kt)}{k^2}\right]^{p/2}t^{\alpha p-1}\widetilde{\psi}(t)\,dt\right\}^{-1/p}. \tag{7.20}$$

Полагая, например, в формуле (7.20) $\widetilde{\psi}=\widetilde{\psi}_1$, $p=2$ и $\alpha=1$, для произвольного $z\in(0,\infty)$ получаем

$$\sup_{f\in L_2^1(\mathbb{R})}\frac{\sigma\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^z \widehat{\Lambda}^2(f^{(1)},t/\sigma)t(z-t)\,dt\right\}^{1/2}}=\left\{z\left[\frac{2}{9}z-\frac{7\pi^2}{45}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^k\operatorname{sinc}(kz)}{k^4}\right]\right\}^{-1/2}.$$

Используя [11, с.726] (п. 5.4.2, формула 6), при $0<z\le\pi$ из последнего равенства имеем

$$\sup_{f\in L_2^1(\mathbb{R})}\frac{\sigma\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^z \widehat{\Lambda}^2(f^{(1)},t/\sigma)t(z-t)\,dt\right\}^{1/2}}=\left\{\frac{2}{9}z^3-\frac{7\pi^2}{45}z+\frac{32}{15}\pi^3B_5\left(\frac{z+\pi}{2\pi}\right)\right\}^{-1/2},$$

где $B_5(t)=t^5-5t^4/2+5t^3/3-t/6$ — полином Бернулли.

7.4.3. Пусть $\mathcal{M}=\mathcal{M}_3$. Исходя из результатов, изложенных в пп. 6.2.3 и 7.2.3, в силу следствия 8 для произвольного фиксированного значения $z\in(0,\infty)$ записываем

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})}\frac{\sigma^\alpha\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^z \Lambda_{\langle'\rangle}^p(D^\alpha f,t/\sigma)t^{\alpha p-1}\widetilde{\psi}(t)\,dt\right\}^{1/p}}=$$

$$=\left\{\int\limits_0^z\left[\frac{6}{5}-\frac{108}{\pi^4}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\operatorname{sinc}(kt)}{k^4}\right]^{p/2}t^{\alpha p-1}\widetilde{\psi}(t)\,dt\right\}^{-1/p}. \tag{7.21}$$

Полагая в формуле (7.21) $\widetilde{\psi}=\widetilde{\psi}_1,\ p=2,\ \alpha=1,$ имеем

$$\sup_{f\in L_2^1(\mathbb{R})}\frac{\sigma\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^z\Lambda^2_{\langle\prime\rangle}(f^{(1)},t/\sigma)t(z-t)\,dt\right\}^{1/2}}=\left\{z\left[\frac{3}{5}z^2-\frac{4\pi^2}{35}+\frac{108}{\pi^4}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\operatorname{sinc}(kz)}{k^6}\right]\right\}^{-1/2}.$$

В случае $0<z\le\pi$ правую часть последнего равенства можно записать, использовав многочлен Бернулли B_7 [11, с. 726] (п. 5.4.2, формула 5):

$$\sup_{f\in L_2^1(\mathbb{R})}\frac{\sigma\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^z\Lambda^2_{\langle\prime\rangle}(f^{(1)},t/\sigma)t(z-t)\,dt\right\}^{1/2}}=\left\{\frac{3}{5}z-\frac{4\pi^2}{35}z+\frac{48\pi^3}{35}B_7\Big(\frac{z}{2\pi}\Big)\right\}^{-1/2},$$

где $B_7(t)=t^7-7t^6/2+7t^5/2-7t^3/6+t/6.$

8. Точные значения средних ν-поперечников классов функций, определенных с помощью характеристик гладкости ω^w и Λ^w. Известно, что в случае приближения на $\mathbb{R}$ целыми функциями или, например, сплайнами указанные множества являются бесконечномерными образованиями и возникает проблема, связанная со сравнением между собой подобных методов аппроксимации. Один из возможных подходов связан с понятием средней размерности. Так, К. Шеннон, изучая вопрос „энтропийного” усреднения, рассматривал усредненные характеристики классов случайных функций. А. Н. Колмогоровым был введен соответствующий детерминированный вариант. Подобного рода характеристика для подпространств функций на прямой, вытекающая не из понятия энтропии, а из понятия колмогоровского поперечника и названная средней размерностью, была предложена В. М. Тихомировым в [12] и рассматривалась в работах Динь Зунга и Г. Г. Магарил-Ильяева [13], Динь Зунга [14], Ле Чыонг Тунга [15]. Впоследствии это позволило Г. Г. Магарил-Ильяеву в работах [16, 17] определить асимптотические характеристики подпространств, где в качестве размерности использовалась средняя размерность, и на этой основе ввести понятия ряда средних ν-поперечников классов функций на прямой. В результате этого стало возможным сравнивать аппроксимативные свойства подпространства $\mathbb{B}_{\sigma,2}$ с аналогичными характеристиками иных подпространств в $L_2(\mathbb{R})$, имеющих такую же среднюю размерность, и решать целый ряд экстремальных задач теории аппроксимации функций оптимизационного содержания. Точные значения средних ν-поперечников различных классов функций были вычислены, например, в работах [16–29].

8.1. Непрерывную, возрастающую на множестве $[0,\infty)$ функцию Φ такую, что $\Phi(0)=0$, будем называть мажорантой. Символом $\mathcal{K}^\alpha(\omega^w,\Phi)$, где $\alpha\in(0,\infty)$, обозначим класс функций $f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})$, для которых при любом $t\in(0,\infty)$ выполняется неравенство $\omega^w(D^\alpha f,t)\le\Phi(t)$. Также для произвольного класса $\mathfrak{N}\subset L_2(\mathbb{R})$ полагаем $\mathcal{A}_\sigma(\mathfrak{N}):=\sup\{\mathcal{A}_\sigma(f)\colon f\in\mathfrak{N}\}$.

Теорема 6. *Пусть ν и α принадлежат $(0,\infty)$; комплекснозначная функция $w\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$ и такая, что $|w|^2$ удовлетворяет свойствам A и B; точка $\overline{t}=\overline{t}(|w|^2)$ определяется следующим образом: $|w(\overline{t})|^2=|w(\widetilde{t}_*)|^2$, где значение $\widetilde{t}_*=\widetilde{t}_*(|w|^2)$ находится с помощью формулы (4.3), когда $\varphi=|w|^2$; $\tau\in(0,\overline{t}\,]$ — произвольное фиксированное число; мажоранта Φ при любых $\sigma>\nu\pi$ и $t\in(0,\infty)$ удовлетворяет условию*

$$\Phi(t)/\Phi(\tau/\sigma)\ge|w(t\sigma)|_*/|w(\tau)|,\tag{8.1}$$

где функция $|w|_*$ задается соотношением (6.19). Тогда справедливы равенства

$$\overline{\Pi}_\nu\big(\mathcal{K}^\alpha(\omega^w,\Phi);L_2(\mathbb{R})\big)=\mathcal{A}_{\nu\pi}\big(\mathcal{K}^\alpha(\omega^w,\Phi)\big)=$$

$$=\sup\big\{\|f-\mathcal{L}_{\nu\pi}(f)\|: f\in\mathcal{K}^\alpha(\omega^w,\Phi)\big\}=\frac{1}{|w(\tau)|(\nu\pi)^\alpha}\Phi\Big(\frac{\tau}{\nu\pi}\Big). \tag{8.2}$$

Здесь оператор $\mathcal{L}_{\nu\pi}: L_2(\mathbb{R})\to\mathbb{B}_{\nu\pi,2}$ *определяется формулой* (4.4) *при* $\sigma=\nu\pi$, *а* $\overline{\Pi}_\nu(\cdot)$ — *любой из средних* ν*-поперечников: бернштейновский* $\overline{b}_\nu(\cdot)$, *колмогоровский* $\overline{d}_\nu(\cdot)$, *линейный* $\overline{\delta}_\nu(\cdot)$. *При этом пара* $(L_2^\alpha(\mathbb{R}),\mathcal{L}_{\nu\pi})$ *является экстремальной для среднего линейного* ν*-поперечника* $\overline{\delta}_\nu\big(\mathcal{K}^\alpha(\omega^w,\Phi);L_2(\mathbb{R})\big)$, *а подпространство* $\mathbb{B}_{\nu\pi,2}$ *является экстремальным для среднего колмогоровского* ν*-поперечника* $\overline{d}_\nu\big(\mathcal{K}^\alpha(\omega^w,\Phi);L_2(\mathbb{R})\big)$.

Доказательство. Используя соотношение (4.7), для произвольной функции $f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})$ записываем

$$\mathcal{A}_\sigma(f)\le\frac{1}{\sigma^\alpha|w(\tau)|}\,\omega^w\left(D^\alpha f,\frac{\tau}{\sigma}\right), \tag{8.3}$$

где $\tau\in(0,\overline{t}]$. Поскольку средняя размерность подпространства $\mathbb{B}_{\sigma,2}$ равна σ/π [16], то $\overline{\dim}(\mathbb{B}_{\nu\pi,2};L_2(\mathbb{R}))=\nu$. Исходя из определений рассматриваемых средних ν-поперечников и соотношений между ними (см., например, [5, 17, 21–26, 28, 29]), а также на основании (8.3) и определения класса функций $\mathcal{K}^\alpha(\omega^w,\Phi)$ получаем оценки сверху

$$\overline{\Pi}_\nu\big(\mathcal{K}^\alpha(\omega^w,\Phi);L_2(\mathbb{R})\big)\le\overline{\delta}_\nu\big(\mathcal{K}^\alpha(\omega^w,\Phi);L_2(\mathbb{R})\big)\le$$

$$\le\sup\big\{\|f-\mathcal{L}_{\nu\pi}(f)\|: f\in\mathcal{K}^\alpha(\omega^w,\Phi)\big\}=\mathcal{A}_{\nu\pi}(\mathcal{K}^\alpha(\omega^w,\Phi))\le\frac{1}{|w(\tau)|(\nu\pi)^\alpha}\Phi\Big(\frac{\tau}{\nu\pi}\Big). \tag{8.4}$$

Перейдем к нахождению оценок снизу рассматриваемых экстремальных аппроксимативных характеристик класса $\mathcal{K}^\alpha(\omega^w,\Phi)$. Пусть $\widehat{\sigma}:=\nu\pi(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon\in(0,\nu_*)$, $\nu_*:=\min(\nu,1/\nu)$. Подпространство целых функций $\mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к подпространствам, участвующим в определении среднего бернштейновского ν-поперечника. При этом его средняя размерность $\overline{\dim}\big(\mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2};L_2(\mathbb{R})\big)=\nu(1+\varepsilon)$ и $\overline{d}_\nu\big(\mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}\cap BL_2(\mathbb{R});L_2(\mathbb{R})\big)=1$, где $BL_2(\mathbb{R})$ — единичный шар в $L_2(\mathbb{R})$. Положив

$$\rho_1:=\frac{1}{|w(\tau)|(\widehat{\sigma})^\alpha}\,\Phi\Big(\frac{\tau}{\widehat{\sigma}}\Big), \tag{8.5}$$

рассмотрим множество $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_1):=\mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}\cap\rho_1BL_2(\mathbb{R})=\{g\in\mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}:\|g\|\le\rho_1\}$, где $\rho_1BL_2(\mathbb{R})$ — шар радиуса ρ_1 в $L_2(\mathbb{R})$. Покажем справедливость включения

$$\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_1)\subset\mathcal{K}^\alpha(\omega^w,\Phi) \tag{8.6}$$

Согласно теореме Винера – Пэли для произвольной функции $g\in\mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}$ справедливо представление $g(x)=(1/\sqrt{2\pi})\displaystyle\int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}}v(u)e^{ixu}\,du$, где $v\in L_2[-\widehat{\sigma},\widehat{\sigma}]$. При этом $\|g\|=\left\{\displaystyle\int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}}|v(u)|^2\,du\right\}^{1/2}$. Отсюда и из (2.22) получаем

$$\big\|\Delta_h^w(g)\big\|^2=\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}}|v(u)|^2|w(hu)|^2\,du\le|w(h\widehat{\sigma})|_*^2\|g\|^2,$$

где функция $|w|_*^2$ определена формулой (6.19). Из формулы (3.2) имеем

$$\|D^\alpha g\| = \left\{ \int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} |u|^{2\alpha} |v(u)|^2 \, du \right\}^{1/2} \leq (\widehat{\sigma})^\alpha \|g\|.$$

Следовательно, $\left\|\Delta_h^w(D^\alpha g)\right\| \leq (\widehat{\sigma})^\alpha |w(h\widehat{\sigma})|_* \|g\|$. Тогда для произвольной функции $g \in \mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_1)$ в силу (8.1) и формулы (8.5) для любого $t \in (0, \infty)$ записываем

$$\omega^w(D^\alpha g, t) = \sup\left\{\|\Delta_h^w(D^\alpha g)\| : 0 \leq h \leq t\right\} \leq (\widehat{\sigma})^\alpha |w(t\widehat{\sigma})|_* \rho_1 = \frac{|w(t\widehat{\sigma})|_*}{|w(\tau)|} \Phi\left(\frac{\tau}{\widehat{\sigma}}\right) \leq \Phi(t),$$

т. е. имеет место соотношение (8.6).

Используя определение среднего бернштейновского ν-поперечника [16] и формулу (8.5), получаем

$$\overline{b}_\nu\big(\mathcal{K}^\alpha(\omega^w, \Phi); L_2(\mathbb{R})\big) \geq \widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha,\nu}(\Phi, \varepsilon) \frac{1}{|w(\tau)|(\nu\pi)^\alpha}, \tag{8.7}$$

где

$$\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha,\nu}(\Phi, \varepsilon) := \frac{1}{(1+\varepsilon)^\alpha} \Phi\left(\frac{\tau}{\nu\pi(1+\varepsilon)}\right). \tag{8.8}$$

Величина (8.8) является монотонно убывающей функцией от $\varepsilon \in (0, \nu_*)$ при фиксированных значениях остальных параметров α и ν, τ. При этом $\lim\left\{\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha,\nu}(\Phi, \varepsilon) : \varepsilon \to 0+\right\} = \Phi(\tau/(\nu\pi))$. Следовательно,

$$\sup\left\{\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha,\nu}(\Phi, \varepsilon) : 0 < \varepsilon < \nu_*\right\} = \Phi\left(\frac{\tau}{\nu\pi}\right). \tag{8.9}$$

Вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon \in (0, \nu_*)$ от правой части неравенства (8.7) и учитывая (8.9), имеем

$$\overline{\Pi}_\nu\big(\mathcal{K}^\alpha(\omega^w, \Phi); L_2(\mathbb{R})\big) \geq \overline{b}_\nu\big(\mathcal{K}^\alpha(\omega^w, \Phi); L_2(\mathbb{R})\big) \geq \frac{1}{|w(\tau)|(\nu\pi)^\alpha} \Phi\left(\frac{\tau}{\nu\pi}\right). \tag{8.10}$$

Равенство (8.2) следует из соотношений (8.4) и (8.10), что и завершает доказательство теоремы 6.

8.1.1. Полагая, например, $\tau = \pi/2$, $w = \widetilde{w}_m$, где $m \in \mathbb{N}$, и учитывая, что $|\widetilde{w}_m(x)| = (1 - \operatorname{sinc}(x))^m$ (см. пп. 2.3.4), из теоремы 6 получаем следующий результат: *если мажоранта* Φ *при любых* $\sigma > \nu\pi$ *и* $t \in (0, \infty)$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/(2\sigma))} \geq \left(\frac{\pi}{\pi - 2}\right)(1 - \operatorname{sinc}(t\sigma))_*^m, \tag{8.11}$$

то справедливы равенства

$$\overline{\Pi}_\nu\big(\mathcal{K}^\alpha(\widetilde{\Omega}_m, \Phi); L_2(\mathbb{R})\big) = \mathcal{A}_{\nu\pi}\big(\mathcal{K}^\alpha(\widetilde{\Omega}_m, \Phi)\big) =$$

$$= \sup\left\{\|f - \mathcal{L}_{\nu\pi}(f)\| : f \in \mathcal{K}^\alpha(\widetilde{\Omega}_m, \Phi)\right\} = \frac{\pi^{m-\alpha}}{(\pi-2)^m \nu^\alpha} \Phi\left(\frac{1}{2\nu}\right).$$

В случае, когда $\alpha = r \in \mathbb{N}$, отсюда, в частности, следует один результат, полученный в [25]. Отметим, что одним из примеров мажоранты, удовлетворяющей условию (8.11), является функция $\widetilde{\Phi}(t) := t^{2m/(\pi-2)}$.

8.2. Обозначим через $\mathcal{K}(\Lambda^w, \Phi)$ класс функций $f \in L_2(\mathbb{R})$, для каждой из которых при любом $t \in (0, \infty)$ выполняется неравенство $\Lambda^w(f,t) \le \Phi(t)$.

Теорема 7. *Пусть ν принадлежит $(0,\infty)$; комплекснозначная функция $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$ и такая, что квадрат ее модуля удовлетворяет свойству A, но не удовлетворяет свойству B; функция $\mathcal{W}$ принадлежит множеству $\mathbb{G}$ и удовлетворяет свойству A; $\tau \in (0, \bar{t}(\mathcal{W})]$ — произвольное фиксированное число, где величина $\bar{t}(\mathcal{W})$ определяется указанным в пп.* 6.1 *образом с помощью соотношения* (6.2); *мажоранта Φ при любых $\sigma > \nu\pi$ и $t \in (0,\infty)$ удовлетворяет условию*

$$\Phi^2(t)/\Phi^2(\tau/\sigma) \ge \mathcal{W}_*(t\sigma)/\mathcal{W}(\tau), \tag{8.12}$$

где функция $\mathcal{W}_*$ определяется формулой (6.8). *Тогда выполнены следующие равенства*:

$$\overline{\Pi}_\nu\big(\mathcal{K}(\Lambda^w,\Phi); L_2(\mathbb{R})\big) = \mathcal{A}_{\nu\pi}(\mathcal{K}(\Lambda^w,\Phi)) =$$

$$= \sup\big\{\|f - \mathcal{L}_{\nu\pi}(f)\|\colon f \in \mathcal{K}(\Lambda^w,\Phi)\big\} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{W}(\tau)}}\Phi\Big(\frac{\tau}{\nu\pi}\Big), \tag{8.13}$$

где $\overline{\Pi}_\nu(\cdot)$ — любой из рассмотренных в теореме 6 *средних ν-поперечников; оператор $\mathcal{L}_{\nu\pi}$ определяется формулой* (4.4) *при $\sigma = \nu\pi$. При этом пара $(L_2(\mathbb{R}), \mathcal{L}_{\nu\pi})$ является экстремальной для среднего линейного ν-поперечника $\overline{\delta}_\nu\big(\mathcal{K}(\Lambda^w,\Phi); L_2(\mathbb{R})\big)$, а для среднего колмогоровского ν-поперечника $\overline{d}_\nu(\mathcal{K}(\Lambda^w,\Phi); L_2(\mathbb{R}))$ экстремальным является подпространство $\mathbb{B}_{\nu\pi,2}$.*

Доказательство. Для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ из соотношения (6.4) получаем $\mathcal{A}_\sigma(f) \le \Lambda^w(f,\tau/\sigma)/\sqrt{\mathcal{W}(\tau)}$, где $\tau \in (0, \bar{t}(\mathcal{W})]$. Полагая $\sigma = \nu\pi$ и используя определение класса $\mathcal{K}(\Lambda^w,\Phi)$, отсюда имеем

$$\overline{\Pi}_\nu\big(\mathcal{K}(\Lambda^w,\Phi); L_2(\mathbb{R})\big) \le \overline{\delta}_\nu\big(\mathcal{K}(\Lambda^w,\Phi); L_2(\mathbb{R})\big) \le$$

$$\le \sup\big\{\|f - \mathcal{L}_{\nu\pi}(f)\|\colon f \in \mathcal{K}(\Lambda^w,\Phi)\big\} = \mathcal{A}_{\nu\pi}(\mathcal{K}(\Lambda^w,\Phi)) \le \frac{1}{\sqrt{\mathcal{W}(\tau)}}\Phi\Big(\frac{\tau}{\nu\pi}\Big). \tag{8.14}$$

Для получения оценок снизу рассматриваемых средних ν-поперечников воспользуемся ходом рассуждений, проведенных во второй части доказательства теоремы 6. С этой целью обозначим $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_2) := \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2} \cap \rho_2 BL_2(\mathbb{R}) = \{g \in \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}\colon \|g\| \le \rho_2\}$, где $\widehat{\sigma} := \nu\pi(1+\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0,\nu_*)$, $\nu_* := \min(\nu, 1/\nu)$,

$$\rho_2 :== \frac{1}{\sqrt{\mathcal{W}(\tau)}}\,\Phi\Big(\frac{\tau}{\widehat{\sigma}}\Big)\,. \tag{8.15}$$

Покажем справедливость соотношения

$$\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_2) \subset \mathcal{K}(\Lambda^w,\Phi). \tag{8.16}$$

Для произвольной функции $g \in \mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_2)$ с учетом условия (8.12) и обозначения (6.8) в случае любого $t \in (0,\infty)$ получаем

$$\Lambda^w(g,t) = \left\{ \frac{1}{t} \int\limits_0^t \left\| \Delta_h^w(g) \right\|^2 dh \right\}^{1/2} = \left\{ \int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} |v(u)|^2 \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t |w(hu)|^2 dh \right) du \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} |v(u)|^2 \mathcal{W}(tu)\, du \right\}^{1/2} \leq \sqrt{\mathcal{W}_*(t\widehat{\sigma})} \|g\| \leq \sqrt{\mathcal{W}_*(t\widehat{\sigma})} \rho_2 = \sqrt{\frac{\mathcal{W}_*(t\widehat{\sigma})}{\mathcal{W}(\tau)}}\, \Phi\Big(\frac{\tau}{\widehat{\sigma}}\Big) \leq \Phi(t).$$

Следовательно, включение (8.16) имеет место. Используя определение среднего бернштейновского ν-поперечника [16] и соотношение (8.15), записываем

$$\overline{b}_\nu(\mathcal{K}(\Lambda^w, \Phi); L_2(\mathbb{R})) \geq \frac{1}{\sqrt{\mathcal{W}(\tau)}} \Phi\left(\frac{\tau}{\nu\pi(1+\varepsilon)} \right). \tag{8.17}$$

Поскольку Φ является убывающей функцией от $\varepsilon \in (0, \nu_*)$ при фиксированных значениях ν, τ и при этом $\lim \big\{ \Phi(\tau/(\nu\pi(1+\varepsilon))) : \varepsilon \to 0+ \big\} = \Phi(\tau/(\nu\pi))$, то

$$\sup \left\{ \Phi\left(\frac{\tau}{\nu\pi(1+\varepsilon)} \right) : 0 < \varepsilon < \nu_* \right\} = \Phi\Big(\frac{\tau}{\nu\pi}\Big). \tag{8.18}$$

Вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon \in (0, \nu_*)$ от правой части неравенства (8.17) и используя формулу (8.18), получаем

$$\overline{\Pi}_\nu\big(\mathcal{K}(\Lambda^w, \Phi); L_2(\mathbb{R})\big) \geq \overline{b}_\nu\big(\mathcal{K}(\Lambda^w, \Phi); L_2(\mathbb{R})\big) \geq \frac{1}{\sqrt{\mathcal{W}(\tau)}}\, \Phi\Big(\frac{\tau}{\nu\pi}\Big). \tag{8.19}$$

Равенства (8.13) следуют из соотношений (8.14) и (8.19).

Теорема 7 доказана.

Рассмотрим некоторые частные случаи реализации общего результата (8.13).

8.2.1. Полагая, например, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{1,1}$, согласно результатам пп. 6.1.1 имеем $|w_{\mathcal{M}_{1,1}}(x)|^2 = 2(1 - \cos x)$ и $\mathcal{W}_1(t) = (1/t) \int_0^t |w_{\mathcal{M}_{1,1}}(h)|^2 dh = 2(1 - \operatorname{sinc}(t))$. Пусть $\tau = \pi/2$. Тогда при выполнении условия

$$\Phi^2(t)/\Phi^2(\pi/(2\sigma)) \geq \pi(1 - \operatorname{sinc}(\sigma t))_*/(\pi - 2), \tag{8.20}$$

где $\sigma \geq \nu\pi$ и $t \in (0, \infty)$ — произвольные числа, справедливы равенства

$$\overline{\Pi}_\nu\big(\mathcal{K}(\Lambda_1, \Phi); L_2(\mathbb{R})\big) = \mathcal{A}_{\nu\pi}(\mathcal{K}(\Lambda_1, \Phi)) =$$

$$= \sup \big\{ \|f - \mathcal{L}_{\nu\pi}(f)\| : f \in \mathcal{K}(\Lambda_1, \Phi) \big\} = \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}}\, \Phi\left(\frac{1}{2\nu} \right).$$

Здесь $\overline{\Pi}_\nu$ — любой из перечисленных выше средних ν-поперечников. Отметим, что данный результат был получен в работе [5], в которой также отмечалось, что множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (8.20), является непустым.

8.2.2. Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{M}_4$. Тогда в соответствии с результатами пп. 6.1.2 $\Lambda^{w_{\mathcal{M}_4}}(f,t) = \widehat{\Lambda}(f,t)$, $t > 0$, $f \in L_2(\mathbb{R})$, а функция $\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4}$ определяется согласно соотношению (6.13). При этом

$$\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4,*}(t) = \frac{4}{3}\begin{cases}(t/\pi)^2, & \text{если} \quad 0 \le t \le \pi,\\ \pi(2+(t/\pi-2)^3)/t, & \text{если} \quad \pi \le t \le t_*,\\ \pi(2+(t_*/\pi-2)^3)/t_*, & \text{если} \quad t_* \le t \le \infty,\end{cases} \tag{8.21}$$

где $t_* = t_*(\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4})$. Пусть $\tau = \pi/2$, поскольку, согласно пп. 6.1.2, величина $\overline{t}(\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4}) \in$ $\in (2{,}82; 2{,}83)$. Из теоремы 7 следует, что в данном случае при выполнении условия

$$\Phi^2(t)/\Phi^2(\pi/(2\sigma)) \ge 3\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4,*}(t\sigma), \tag{8.22}$$

где $\sigma \ge \nu\pi$ и $t \in (0,\infty)$ — произвольные числа, справедливы равенства

$$\overline{\Pi}_\nu\big(\mathcal{K}(\widehat{\Lambda},\Phi); L_2(\mathbb{R})\big) = \mathcal{A}_{\nu\pi}(\mathcal{K}(\widehat{\Lambda},\Phi)) = \sup\big\{\|f-\mathcal{L}_{\nu\pi}(f)\| : f \in \mathcal{K}(\widehat{\Lambda},\Phi)\big\} = \sqrt{3}\Phi\left(\frac{1}{2\nu}\right),$$

где $\overline{\Pi}_\nu(\cdot)$ — любой из средних ν-поперечников, рассмотренных ранее.

Покажем, что множество мажорант, удовлетворяющих условию (8.22), не пусто. Для этого рассмотрим, например, в качестве мажоранты функцию $\widehat{\Phi}(t) := t$. Полагая $v = t\sigma/\pi$ и используя (8.22), где $\Phi = \widehat{\Phi}$, несложно убедиться в выполнении соотношения $v^2 \ge \big\{v^2,$ если $0 <$ $< v \le 1;$ $(2+(v-2)^3)/v,$ если $1 \le v \le t_*/\pi;$ $\pi(2+(t_*/\pi-2)^3)/t_*,$ если $t_*/\pi \le v < \infty\big\}$, что и подтверждает требуемый результат.

8.3. Пусть $0 < p \le 2$; $\alpha \in (0,\infty)$; H — конечное положительное число; ξ — измеримая, неотрицательная, существенно ограниченная на отрезке $[0,H]$ функция, которая не эквивалентна нулю. Символом $H\mathcal{K}_p^\alpha(\Lambda^w,\xi)$ обозначим класс функций $f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})$, для которых выполнено условие $\displaystyle\int_0^H (\Lambda^w(D^\alpha f,t))^p\xi(t)\,dt \le \int_0^H \xi(t)\,dt.$

Теорема 8. *Пусть $\nu \in (0,\infty)$; $\alpha \in [1/2,\infty)$; $p \in [1/\alpha,2]$; комплекснозначная функция $w\colon$ $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$ и квадрат ее модуля удовлетворяет свойству A; функция $\mathcal{W}$ принадлежит классу $\mathbb{G}$ и удовлетворяет свойству A; величина H принадлежит $(0, t_*(\mathcal{W})/(\nu\pi)]$, где $t_*(\mathcal{W})$ определяется в пп. 6.1; функция ξ на интервале $(0,H)$ является измеримой, существенно ограниченной, неотрицательной, не эквивалентной нулю, дифференцируемой почти всюду и при некотором $p = \widetilde{p}$ почти для всех $t \in (0,\infty)$ удовлетворяет условию* (7.2). *Тогда справедливы равенства*

$$\overline{\Pi}_\nu(H\mathcal{K}_p^\alpha(\Lambda^w,\xi); L_2(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_{\nu\pi}(H\mathcal{K}_p^\alpha(\Lambda^w,\xi)) = \sup\big\{\|f-\mathcal{L}_{\nu\pi}(f)\| : f \in H\mathcal{K}_p^\alpha(\Lambda^w,\xi)\big\} =$$

$$= (\nu\pi)^{-\alpha}\left\{\int\limits_0^H \xi(t)\,dt\right\}^{1/\widetilde{p}}\left\{\int\limits_0^H \mathcal{W}^{\widetilde{p}/2}(\nu\pi t)\xi(t)\,dt\right\}^{-1/\widetilde{p}}, \tag{8.23}$$

где $\overline{\Pi}_\nu(\cdot)$ — любой из рассмотренных ранее средних ν-поперечников. При этом для среднего линейного ν-поперечника $\overline{\delta}_\nu\big(\mathcal{K}(\Lambda^w,\Phi); L_2(\mathbb{R})\big)$ пара $(L_2^\alpha(\mathbb{R}), \mathcal{L}_{\nu\pi})$ является экстремальной, а подпространство $\mathbb{B}_{\nu\pi,2}$ является экстремальным для среднего колмогоровского ν-поперечника $\overline{d}_\nu\big(\mathcal{K}(\Lambda^w,\Phi); L_2(\mathbb{R})\big)$.

Доказательство. Используя следствие 6, для произвольной функции $f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})$ записываем

$$\mathcal{A}_\sigma(f) \le \sigma^{-\alpha} \left\{ \int\limits_0^x (\Lambda^w(D^\alpha f, t))^{\widetilde{p}} \xi(t)\, dt \right\}^{1/\widetilde{p}} \left\{ \int\limits_0^x \mathcal{W}^{\widetilde{p}/2}(\sigma t)\xi(t) dt \right\}^{-1/\widetilde{p}}. \tag{8.24}$$

Полагая $\sigma = \nu\pi$, $x = H$ и применяя определение класса $H\mathcal{K}_{\widetilde{p}}^\alpha(\Lambda^w, \xi)$, из (8.24) получаем оценки сверху

$$\overline{\Pi}_\nu\big(H\mathcal{K}_{\widetilde{p}}^\alpha(\Lambda^w, \xi); L_2(\mathbb{R})\big) \le \overline{\delta}_\nu\big(H\mathcal{K}_{\widetilde{p}}^\alpha(\Lambda^w, \xi); L_2(\mathbb{R})\big) \le$$

$$\le \sup\big\{\|f - \mathcal{L}_{\nu\pi}(f)\| \colon f \in H\mathcal{K}_{\widetilde{p}}^\alpha(\Lambda^w, \xi)\big\} = \mathcal{A}_{\nu\pi}(H\mathcal{K}_{\widetilde{p}}^\alpha(\Lambda^w, \xi)) \le$$

$$\le (\nu\pi)^{-\alpha} \left\{ \int\limits_0^H \xi(t)\, dt \right\}^{1/\widetilde{p}} \left\{ \int\limits_0^H \mathcal{W}^{\widetilde{p}/2}(\nu\pi t)\xi(t)\, dt \right\}^{-1/\widetilde{p}}. \tag{8.25}$$

Во второй части доказательства для получения оценок снизу средних ν-поперечников класса $H\mathcal{K}_{\widetilde{p}}^\alpha(\Lambda^w, \xi)$ рассмотрим множество целых функций $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_3) := \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2} \cap \rho_3 BL_2(\mathbb{R}) = \big\{g \in \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2} \colon \|g\| \le \rho_3\big\}$, где $\widehat{\sigma} := \nu\pi(1+\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \nu_*)$, $\nu_* := \min(\nu, 1/\nu)$,

$$\rho_3 := (\widehat{\sigma})^{-\alpha} \left\{ \int\limits_0^H \xi(t)\, dt \right\}^{1/\widetilde{p}} \left\{ \int\limits_0^H \mathcal{W}^{\widetilde{p}/2}(\widehat{\sigma} t)\xi(t)\, dt \right\}^{-1/\widetilde{p}}, \tag{8.26}$$

и покажем принадлежность $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_3)$ классу $H\mathcal{K}_{\widetilde{p}}^\alpha(\Lambda^w, \xi)$. Для целой функции $g \in \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}$, где $g(x) = \big(1/\sqrt{2\pi}\big) \int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} v(u) e^{ixu}\, du$, $v \in L_2[-\widehat{\sigma}, \widehat{\sigma}]$, имеет место представление

$$\Lambda^w(D^\alpha g, t) = \left\{ \int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} |u|^{2\alpha} |v(u)|^2 \mathcal{W}(tu)\, du \right\}^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^H \big(\Lambda^w(D^\alpha g, t)\big)^{\widetilde{p}} \xi(t)\, dt \le (\widehat{\sigma})^{\alpha\widetilde{p}} \int\limits_0^H \left(\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} |v(u)|^2 \mathcal{W}(tu) du \right)^{\widetilde{p}/2} \xi(t)\, dt.$$

Используя соотношения (6.8) и (8.26), для произвольного элемента $g \in \mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_3)$ отсюда получаем

$$\int\limits_0^H \big(\Lambda^w(D^\alpha g, t)\big)^{\widetilde{p}} \xi(t)\, dt \le (\widehat{\sigma})^{\alpha\widetilde{p}} \|g\|^{\widetilde{p}} \int\limits_0^H \mathcal{W}_*^{\widetilde{p}/2}(\widehat{\sigma} t)\xi(t)\, dt \le \mathfrak{R}_{\widetilde{p},H,\nu,\varepsilon}(\mathcal{W}, \xi) \int\limits_0^H \xi(t)\, dt, \tag{8.27}$$

где

$$\mathfrak{R}_{\widetilde{p},H,\nu,\varepsilon}(\mathcal{W}, \xi) := \left(\int\limits_0^H \mathcal{W}_*^{\widetilde{p}/2}(\nu\pi(1+\varepsilon)t)\xi(t)\, dt \right) \Bigg/ \left(\int\limits_0^H \mathcal{W}^{\widetilde{p}/2}(\nu\pi(1+\varepsilon)t)\xi(t)\, dt \right). \tag{8.28}$$

Поскольку левая часть неравенства (8.27) не зависит от величины ε, то, исходя из вида соотношений (6.8) и (8.28), записываем

$$\int\limits_0^H \big(\Lambda^w(D^\alpha g,t)\big)^{\widetilde{p}}\xi(t)\,dt \le \liminf\big\{\mathfrak{R}_{\widetilde{p},H,\nu,\varepsilon}(\mathcal{W},\xi) : \varepsilon\to 0+\big\}\int\limits_0^H \xi(t)\,dt \le$$

$$\le \lim\big\{\mathfrak{R}_{\widetilde{p},H,\nu,1/n}(\mathcal{W},\xi) : n\to\infty\big\}\int\limits_0^H \xi(t)\,dt = \int\limits_0^H \xi(t)\,dt.$$

Таким образом, $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_3)\subset H\mathcal{K}^\alpha_{\widetilde{p}}(\Lambda^w,\xi)$.

Полагая

$$Y_{\widetilde{p},H,\nu,\varepsilon}(\mathcal{W},\xi) := (1+\varepsilon)^\alpha\left\{\int\limits_0^H \mathcal{W}^{\widetilde{p}/2}(\nu\pi(1+\varepsilon)t)\xi(t)\,dt\right\}^{1/\widetilde{p}}$$

и используя соотношение (8.26) и определение среднего бернштейновского ν-поперечника, получаем оценки снизу

$$\overline{\Pi}_\nu\big(H\mathcal{K}^\alpha_{\widetilde{p}}(\Lambda^w,\xi);L_2(\mathbb{R})\big)\ge \overline{b}_\nu\big(H\mathcal{K}^\alpha_{\widetilde{p}}(\Lambda^w,\xi);L_2(\mathbb{R})\big)\ge \limsup\{\rho_3:\varepsilon\to 0+\} =$$

$$= (\nu\pi)^{-\alpha}\left\{\int\limits_0^H \xi(t)\,dt\right\}^{1/\widetilde{p}} \limsup\big\{1/Y_{\widetilde{p},H,\nu,\varepsilon}(\mathcal{W},\xi):\varepsilon\to 0+\big\} =$$

$$= (\nu\pi)^{-\alpha}\left\{\int\limits_0^H \xi(t)\,dt\right\}^{1/\widetilde{p}} \Big/ \liminf\big\{Y_{\widetilde{p},H,\nu,\varepsilon}(\mathcal{W},\xi):\varepsilon\to 0+\big\} \ge$$

$$\ge (\nu\pi)^{-\alpha}\left\{\int\limits_0^H \xi(t)\,dt\right\}^{1/\widetilde{p}} \Big/ \lim_{n\to\infty} Y_{\widetilde{p},H,\nu,1/n}(\mathcal{W},\xi) =$$

$$= (\nu\pi)^{-\alpha}\left\{\int\limits_0^H \xi(t)\,dt\right\}^{1/\widetilde{p}}\left\{\int\limits_0^H \mathcal{W}^{\widetilde{p}/2}(\nu\pi t)\xi(t)\,dt\right\}^{-1/\widetilde{p}}. \tag{8.29}$$

Равенства (8.23) следуют из соотношений (8.25) и (8.29), что и завершает доказательство теоремы 8.

Далее приведем несколько конкретных реализаций общего результата (8.23).

8.3.1. Пусть, например, $\mathcal{M}=\mathcal{M}_{1,1}$. Тогда согласно результатам пп. 8.2.1 и соотношению (8.23) имеем

$$\overline{\Pi}_\nu\big(H\mathcal{K}^\alpha_{\widetilde{p}}(\Lambda_1,\xi);L_2(\mathbb{R})\big) = \mathcal{A}_{\nu\pi}(H\mathcal{K}^\alpha_{\widetilde{p}}(\Lambda_1,\xi)) = \sup\big\{\|f-\mathcal{L}_{\nu\pi}(f)\| : f\in H\mathcal{K}^\alpha_{\widetilde{p}}(\Lambda_1,\xi)\big\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu\pi)^{-\alpha}\left\{\int\limits_0^H \xi(t)\,dt\right\}^{1/\widetilde{p}}\left\{\int\limits_0^H (1-\operatorname{sinc}(\nu\pi t))^{\widetilde{p}/2}\xi(t)\,dt\right\}^{-1/\widetilde{p}}, \tag{8.30}$$

где $0 < H \leq t_*(\mathcal{W}_1)/(\nu\pi)$. Полагая, в частности, $\xi = \xi_0$, где $\xi_0(t) := t$, несложно убедиться в том, что при $\widetilde{p} = 2$ и $\alpha \in [1, \infty)$ условие (7.2) имеет место. Тогда из (8.30) получаем

$$\overline{\Pi}_\nu\big(H\mathcal{K}_2^\alpha(\Lambda_1, \xi_0); L_2(\mathbb{R})\big) = \mathcal{A}_{\nu\pi}\big(H\mathcal{K}_2^\alpha(\Lambda_1, \xi_0)\big) =$$

$$= \sup\big\{\|f - \mathcal{L}_{\nu\pi}(f)\|\colon f \in H\mathcal{K}_2^\alpha(\Lambda_1, \xi_0)\big\} =$$

$$= \big\{2(\nu\pi)^{2\alpha}(1 - \operatorname{sinc}^2(\nu\pi H/2))\big\}^{-1/2}.$$

Здесь, как и ранее, $\overline{\Pi}_\nu(\cdot)$ — любой из средних ν-поперечников, рассмотренных выше.

8.3.2. Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{M}_4$. В данном случае, исходя из (8.20), для удобства воспользуемся более жестким ограничением на величину H, заменив для этого $t_*(\mathcal{W}_{\mathcal{M}_4})$ на π, т. е. $0 < H \leq$ $\leq 1/\nu$. Тогда, исходя из (8.21) и (8.23), имеем

$$\overline{\Pi}_\nu\big(H\mathcal{K}_{\widetilde{p}}^\alpha(\widehat{\Lambda}, \xi); L_2(\mathbb{R})\big) = \mathcal{A}_{\nu\pi}\big(H\mathcal{K}_{\widetilde{p}}^\alpha(\widehat{\Lambda}, \xi)\big) = \sup\big\{\|f - \mathcal{L}_{\nu\pi}(f)\|\colon f \in H\mathcal{K}_{\widetilde{p}}^\alpha(\widehat{\Lambda}, \xi)\big\} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}(\nu\pi)^{-(\alpha+1/2)}\left\{\int\limits_0^H \xi(t)\,dt\right\}^{1/\widetilde{p}}\left\{\int\limits_0^H t^{\widetilde{p}/2}\xi(t)\,dt\right\}^{-1/\widetilde{p}}. \tag{8.31}$$

Полагая, например, $\xi = \widehat{\xi}$, где $\widehat{\xi}(t) := t^m$, $m \in [0, \infty)$, и $\widetilde{p} \in [(m+1)/\alpha, 2]$, где $\alpha \in$ $\in [(m+1)/2, \infty)$, из (8.31) получаем следующие равенства:

$$\overline{\Pi}_\nu\big(H\mathcal{K}_{\widetilde{p}}^\alpha(\widehat{\Lambda}, \widehat{\xi}); L_2(\mathbb{R})\big) = \mathcal{A}_{\nu\pi}\big(H\mathcal{K}_{\widetilde{p}}^\alpha(\widehat{\Lambda}, \widehat{\xi})\big) =$$

$$= \sup\Big\{\|f - \mathcal{L}_{\nu\pi}(f)\|\colon f \in H\mathcal{K}_{\widetilde{p}}^\alpha(\widehat{\Lambda}, \widehat{\xi})\Big\} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2H}}(\nu\pi)^{-(\alpha+1/2)}\left(1 + \frac{\widetilde{p}}{2(m+1)}\right)^{1/\widetilde{p}}.$$

В заключение отметим, что основные теоремы и следствия из них, полученные в первой и второй частях данной статьи, имеют достаточно общий характер в том смысле, что для любой новой характеристики гладкости, являющейся частным случаем общих характеристик гладкости (2.24) или (2.26) и удовлетворяющей сформулированным в соответствующих утверждениях требованиям, можно будет записать уже готовые окончательные результаты.

Литература

1. *Вакарчук С. Б.* Обобщенные характеристики гладкости и некоторые экстремальные задачи теории аппроксимации функций в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. I // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 9. – С. 1166 – 1191.
2. *Vakarchuk S. B.* Jackson-type inequalities with generalized modulus of continuity and exact values of the n-widths for the classes of (ψ, β)-differentiable functions in L_2. I // Ukr. Math. J. – 2016. – **68**, № 6. – P. 823 – 848.
3. *Vakarchuk S. B.* Jackson-type inequalities with generalized modulus of continuity and exact values of the n-widths for the classes of (ψ, β)-differentiable functions in L_2. II // Ukr. Math. J. – 2017. – **68**, № 8. – P. 1165 – 1183.
4. *Vakarchuk S. B.* Jackson-type inequalities with generalized modulus of continuity and exact values of the n-widths for the classes of (ψ, β)-differentiable functions in L_2. III // Ukr. Math. J. – 2017. – **68**, № 10. – P. 1495 – 1518.
5. *Vakarchuk S. B.* Exact constants in Jackson-type inequalities for the best mean square approximation in $L_2(\mathbb{R})$ and exact values of mean ν-widths of the classes of functions // J. Math. Sci. – 2017. – **224**, № 4. – P. 582 – 603.
6. *Runovski K., Schmeisser H-J.* On modulus of continuity related to Riesz derivative. – Jena, 2011. – (Preprint / Friedrich-Schiller-Univ. Jena).

7. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – 6-е изд. – М.: Физматгиз, 1959. – 431 с.
8. *Artamonov S. Yu.* Nonperiodic modulus of smoothness corresponding to the Riesz derivative // Math. Notes. – 2016. – **99**, № 6. – P. 928 – 931.
9. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
10. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. – 3-е изд. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
11. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев С. И.* Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 798 с.
12. *Тихомиров В. М.* Об аппроксимативных характеристиках гладких функций многих переменных // Теория кубатурных формул и вычислительная математика. – Новосибирск: Наука, 1980. – С. 183 – 188.
13. *Ding Zung, Magaril-Il'Yaev G. G.* Problems of Bernstein and Favard types and the mean ε-dimensionality of some function classes // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1979. – **249**, № 4. – P. 783 – 786.
14. *Ding Zung.* Mean ε-dimension of the functional class $B_{G,p}$ // Math. Notes. – 1980. – **28**, № 5. – P. 818 – 823.
15. *Ле Чыонг Тунг.* Средняя ε-размерность класса функций, имеющих носитель преобразования Фурье, содержащийся в заданном множестве // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. – 1980. – № 5. – С. 44 – 49.
16. *Magaril-Il'Yaev G. G.* Mean dimension and widths of classes of functions on the line // Soviet Math. Dokl. – 1991. – **43**, № 3. – P. 661 – 665.
17. *Magaril-Il'Yaev G. G.* Mean dimension, widths and optimal recovery of Sobolev classes of functions on the line // Math. USSR-Sb. – 1993. – **74**, № 2. – P. 381 – 403.
18. *Vakarchuk S. B.* Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2-approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes // East J. Approxim. – 2004. – **10**, № 1-2. – P. 27 – 39.
19. *Vakarchuk S. B., Doronin V. G.* Best mean square approximations by entire functions of finite degree on a straight line and exact values of mean widths of functional classes // Ukr. Math. J. – 2011. – **62**, № 8. – P. 1199 – 1212.
20. *Vakarchuk S. B.* Best mean-square approximation of functions defined on the real axis by entire functions of exponential type // Ukr. Math. J. – 2012. – **64**, № 5. – P. 680 – 692.
21. *Vakarchuk S. B.* On some extremal problems of approximation theory of functions on the real axis. I // J. Math. Sci. – 2013. – **188**, № 2. – P. 146 – 166.
22. *Vakarchuk S. B.* On some extremal problems of approximation theory of functions on the real axis. II // J. Math. Sci. – 2013. – **190**, № 4. – P. 613 – 630.
23. *Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А.* О точных значениях средних ν-поперечников некоторых классов целых функций // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – **18**, № 4. – С. 315 – 327.
24. *Юсупов Г. А.* О наилучших среднеквадратических приближениях на всей оси целыми функциями экспоненциального типа // Докл. АН Республики Таджикистан. – 2013. – **56**, № 3. – С. 192 – 195.
25. *Vakarchuk S. B.* Jackson-type inequalities for the special moduli of continuity on the entire real axis and the exact values of mean ν-widths for the classes of functions in the space $L_2(\mathbb{R})$ // Ukr. Math. J. – 2014. – **66**, № 6. – P. 827 – 856.
26. *Vakarchuk S. B.* Best mean-square approximations by entire functions of exponential type and mean ν-widths of classes of functions on the line // Math. Notes. – 2014. – **96**, № 6. – P. 878 – 896.
27. *Vakarchuk S. B., Shabozov M. Sh., Langarshoev M. R.* On the best mean square approximations by entire functions of exponential type in $L_2(\mathbb{R})$ and mean ν-widths of some functional classes // Russian Math. – 2014. – **58**, № 7. – P. 25 – 41.
28. *Vakarchuk S. B.* Mean square approximation of function classes, given on the all real axis $\mathbb{R}$ by the entire functions of exponential type // Int. J. Adv. Math. – 2016. – **6**. – P. 1 – 12.
29. *Vakarchuk S. B.* On the moduli of continuity and fractional-order derivatives in the problems of best mean-square approximations by entire functions of the exponential type on the entire real axis // Ukr. Math. J. – 2017. – **69**, № 5. – P. 599 – 623.

Получено 22.03.18