УДК 517.9

Т. А. Комлева (Одес. гос. акад. стр-ва и архитектуры),
Л. И. Плотникова (Одес. нац. политехн. ин-т),
А. В. Плотников (Одес. гос. акад. стр-ва и архитектуры, Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

ОДНА МНОГОЗНАЧНАЯ ДИСКРЕТНАЯ СИСТЕМА И ЕЕ СВОЙСТВА

We consider one multivalued discrete system and study its properties and the existence of its solution.

Розглянуто одну багатозначну дискретну систему, досліджено деякі її властивості та існування розв'язку.

1. Введение. В 1969 г. F. S. de Blasi и F. Iervolino рассмотрели дифференциальные уравнения с производной Хукухары [1]. В дальнейшем многие авторы изучали свойства решений дифференциальных уравнений, интегро-дифференциальные уравнения, уравнения высших порядков, импульсные и управляемые уравнения, а также дифференциальные включения (см. [2 – 8] и приведенную в них библиографию).

Многозначные уравнения в последнее время не только изучаются в рамках самостоятельной теории — многозначных дифференциальных уравнений, но и широко применяются при исследовании обычных дифференциальных включений и нечетких дифференциальных уравнений и включений (см. [3 – 10] и приведенную в них библиографию).

При численном решение многозначных дифференциальных уравнений часто используются многозначные дискретные системы [11 – 22]. В данной работе мы рассмотрим одну многозначную дискретную систему, исследуем некоторые ее свойства и докажем условия существования решения.

2. Основные определения и обозначения. Пусть $\operatorname{conv}(R^n)$ — пространство непустых выпуклых компактных подмножеств пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A,B) = \min\big\{r \geq 0\colon A \subset B + S_r(0), B \subset A + S_r(0)\big\},$$

где $A, B \in \operatorname{conv}(R^n)$, $S_r(c) = \{x \in R^n\colon \|x - c\| \leq r\}$.

Кроме обычных теоретико-множественных операций рассмотрим в пространстве $\operatorname{conv}(R^n)$ еще две: операции суммы и умножения на скаляр:

$$A + B = \{a + b\colon a \in A, b \in B\} \quad \text{и} \quad \lambda A = \{\lambda a\colon a \in A, \lambda \in R\}.$$

Справедливы следующие свойства: 1) $(\operatorname{conv}(R^n), h)$ — полное метрическое пространство, 2) $h(A + C, B + C) = h(A, B)$, 3) $h(\lambda A, \lambda B) = |\lambda| h(A, B)$ для всех $A, B, C \in \operatorname{conv}(R^n)$ и $\lambda \in R$.

Однако пространство $\operatorname{conv}(R^n)$ не является линейным пространством относительно приведенных операций, так как в общем случае нельзя ввести понятие противоположного для $A \in \operatorname{conv}(R^n)$ элемента, т. е. в общем случае $A + (-1)A \neq \{0\}$, хотя если $A \in R^n$, то для него противоположный элемент существует.

Отсутствие противоположного элемента в пространстве $\operatorname{conv}(R^n)$ приводит к неоднозначному введению понятия разности множеств и условиям ее существования. В данной статье мы будем использовать разность Хукухары [23].

Определение 1 [23]. *Пусть* X *и* Y *принадлежат* $\operatorname{conv}(R^n)$. *Множество* $Z \in \operatorname{conv}(R^n)$ *такое, что* $X = Y + Z$, *называется разностью Хукухары множеств* X *и* Y *и обозначается* $X \overset{h}{-} Y$.

***Замечание* 1.** Известно, что разность Хукухары является частным случаем разности Минковского [25], когда Y полностью выметает множество X.

***Замечание* 2.** Очевидно, что разность Хукухары двух множеств может не существовать. Например, если $A = \{a \in R^2 \colon \|a\| \leq 1\}$, $B = \{b \in R^2 \colon |b_i| \leq 1, i = 1, 2\}$, то разность Хукухары $A \overset{h}{-} B$ не существует.

Аналогично, если A, B принадлежат $\mathrm{conv}(R^n)$ и $\mathrm{diam}(A) < \mathrm{diam}(B)$, то разность Хукухары $A \overset{h}{-} B$ не существует. Например, если $A = B = \{a \in R^2 \colon \|a\| \leq 1\}$, то разность Хукухары $A \overset{h}{-} tB$ не существует для всех $t > 1$.

Основными свойствами разности Хукухары являются следующие:

1) если разность Хукухары двух множеств $A \overset{h}{-} B$ существует, то она единственная;

2) $A \overset{h}{-} A = \{0\}$ для всех A, принадлежащих $\mathrm{conv}(R^n)$;

3) $(A + B) \overset{h}{-} B = A$ для всех A и B, принадлежащих $\mathrm{conv}(R^n)$;

4) если разности Хукухары $A \overset{h}{-} B$ и $C \overset{h}{-} D$ существуют, то

$$(A \overset{h}{-} B) + (C \overset{h}{-} D) = (A + C) \overset{h}{-} (B + D) = A + C \overset{h}{-} B \overset{h}{-} D.$$

***Замечание* 3.** Однако, если разности Хукухары $A \overset{h}{-} B$ и $C \overset{h}{-} D$ существуют, то равенства

$$(A \overset{h}{-} B) + (C \overset{h}{-} D) = (A \overset{h}{-} B \overset{h}{-} D) + C \quad \text{и} \quad (A \overset{h}{-} B) + (C \overset{h}{-} D) = (A \overset{h}{-} D) + (C \overset{h}{-} B)$$

могут не выполняться, так как разности в правой части могут не существовать.

Например, если $A, B = \{a \in R^2 \colon \|a\| \leq 1\}$, $C, D = \{b \in R^2 \colon |b_i| \leq 1, i = 1, 2\}$, то равенство

$$(A \overset{h}{-} tB) + (C \overset{h}{-} kD) = (A + C) \overset{h}{-} (tB + kD) = A + C \overset{h}{-} tB \overset{h}{-} kD$$

будет выполняться для всех $t, k \in (0, 1)$, но равенства

$$(A \overset{h}{-} tB) + (C \overset{h}{-} kD) = (A \overset{h}{-} tB \overset{h}{-} kD) + C \quad \text{и} \quad (A \overset{h}{-} tB) + (C \overset{h}{-} kD) = (A \overset{h}{-} kD) + (C \overset{h}{-} tB)$$

не выполняются, так как разности в правой части не существуют для всех $t, k \in (0, 1)$.

3. Многозначная дискретная система. Рассмотрим многозначную дискретную систему

$$X(i) = X(i-1) + \Phi(\varphi(i-1))F(i-1, X(i-1)) \overset{h}{-} \Phi(-\varphi(i-1))G(i-1, X(i-1)), \tag{1}$$

где $i \in I = \{0, 1, \ldots, N\}$, $F, G(\cdot, \cdot) \colon I \times \mathrm{conv}(R^n) \to \mathrm{conv}(R^n)$ — многозначные отображения, $\varphi(\cdot) \colon I \to \{-1, 0, 1\}$, $\Phi(\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi > 0, \\ 0, & \varphi \leq 0. \end{cases}$

Возьмем произвольное $X_0 \in \mathrm{conv}(R^n)$ и последовательность $\varphi = \{\varphi(i)\}_{i=0}^N$.

Определение 2. *Последовательность множеств* $\{X(i)\}_{i=0}^N$ *называется решением системы* (1), *соответствующим паре* (X_0, φ), *если* $X(0) = X_0$ *и для каждого* $i \in \{1, \ldots, N\}$ *справедливо тождество*

$$X(i) \equiv X(i-1) + \Phi(\varphi(i-1))F(i-1, X(i-1)) \overset{h}{-} \Phi(-\varphi(i-1))G(i-1, X(i-1)).$$

***Замечание* 4.** Если последовательность $\varphi = \{\varphi(i)\}_{i=0}^N$ такая, что $\varphi(i) \in \{0, 1\}$ для всех $i \in I$, то решение системы (1) существует для любого $X_0 \in \mathrm{conv}(R^n)$ и $X(0) = X_0$,

$$X(i) = \begin{cases} X(i-1) + F(i-1, X(i-1)), & \text{если} \quad \varphi(i-1) = 1, \\ X(i-1), & \text{если} \quad \varphi(i-1) = 0, \end{cases} \qquad \text{для всех} \quad i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Каждый элемент решения системы (1) в этом случае можно записать в виде

$$X(i) = X_0 + \sum_{j \in J^{i-1}} F(j, X(j)),$$

где $J^{i-1} = \{1, \ldots, i-1\} \bigcap J,\ J = \{i \colon i \in I, \varphi(i) = 1\}$.

***Замечание* 5.** Если последовательность $\varphi = \big\{\varphi(i)\big\}_{i=0}^{N}$ такая, что $\varphi(i) = 1$ для всех $i \in I$ и $X(i) = Y(i\Delta),\ F(i, X(i)) = \Delta \cdot R(i\Delta, Y(i\Delta)),\ \Delta = T/N,\ R \colon [0, T] \times \mathrm{conv}(R^n) \to \mathrm{conv}(R^n)$, то решение многозначной дискретной системы (1) определяет многозначные вершины ломаной Эйлера для дифференциального уравнения с производной Хукухары [2, 3, 11]

$$D_h Y(t) = R(t, Y(t)), \qquad Y(0) = X_0, \tag{2}$$

где $Y : [0, T] \to \mathrm{conv}(R^n)$ — многозначное отображение, $D_h Y(t)$ — производная Хукухары [23].

***Замечание* 6.** Если последовательность $\varphi = \big\{\varphi(i)\big\}_{i=0}^{N}$ такая, что $\varphi(i) = -1$ для всех $i \in I$, то система (1) имеет вид

$$X(i) = X(i-1) \overset{h}{-} G(i-1, X(i-1)). \tag{3}$$

Очевидно, что разность Хукухары в системе (3) может не существовать и, следовательно, данная система может не иметь решения.

Сформулируем условия существования решения системы (3).

Пусть $CC(R^n),\ n \geq 2,$ — пространство непустых строго выпуклых замкнутых подмножеств пространства R^n [25] и всех элементов пространства R^n.

***Замечание* 7.** Если A и B принадлежат $CC(R^n)$ и $A + C = B$, то C принадлежит $CC(R^n)$ [25].

***Замечание* 8.** Если A и B принадлежат $CC(R^n)$ и существует $c \in R^n$ такое, что $A + c \subset B$, то существует $C \in CC(R^n)$ такое, что $A + C = B$, т. е. $C = B \overset{h}{-} A$ [25].

Теорема 1. *Пусть система* (3) *удовлетворяет следующим условиям*:

1) $G \colon I \times CC(R^n) \to CC(R^n)$;

2) *для всех* $i \in I,\ X \in CC(R^n)$ *и* $\psi \in R^n$ $(\|\psi\| = 1)$ *выполняется неравенство*

$$\big|C(X, \psi) + C(X, -\psi)\big| \geq \big|C(G(i, X), \psi) + C(G(i, X), -\psi)\big|,$$

где $C(A, \psi) = \max_{a \in A}(a_1\psi_1 + \ldots + a_n\psi_n),\ A \in CC(R^n)$.

Тогда для любого $X_0 \in CC(R^n)$ *существует решение системы* (3).

Доказательство. Возьмем любое $X_0 \in CC(R^n)$. Тогда из условия 1 теоремы следует, что $G(0, X_0)$ принадлежит $CC(R^n)$.

Поскольку из условия 2 теоремы имеем

$$\big|C(X_0, \psi) + C(X_0, -\psi)\big| \geq \big|C(G(0, X_0), \psi) + C(G(0, X_0), -\psi)\big|$$

для всех $\psi \in R^n$ $(\|\psi\| = 1)$, то множество $G(0, X_0)$ вложимо в множество X_0 [25], т. е. существует некоторый вектор $c \in R^n$ такой, что $G(0, X_0) + c \subset X_0$. Тогда, согласно замечанию 8, разность Хукухары $X_0 \overset{h}{-} G(0, X_0)$ существует и $X(1) = X_0 \overset{h}{-} G(0, X_0) \in CC(R^n)$.

Далее аналогично можно доказать, что разности Хукухары $X(i) \stackrel{h}{-} G(s, X(i))$ существуют и $X(i+1) = X(i) \stackrel{h}{-} G(i, X(i)) \in CC(R^n)$ для всех $i \in I$.

Теорема 1 доказана.

***Замечание* 9.** Если последовательность $\varphi = \{\varphi(i)\}_{i=0}^{N}$ такая, что $\varphi(i) = -1$ для всех $i \in I$ и $X(i) = Y(i\Delta),\ G(i, X(i)) = \Delta \cdot R(i\Delta, Y(i\Delta)),\ \Delta = T/N,\ R\colon [0,T] \times CC(R^n) \to CC(R^n)$, то решение многозначной дискретной системы (3) определяет многозначные вершины ломаной Эйлера для дифференциального уравнения с обобщенной производной Хукухары [24, 26]

$$DY \stackrel{h}{-} \Phi(-\phi(t))R(t, Y) = \Phi(\phi(t))R(t, Y), \qquad Y(0) = X_0, \tag{4}$$

где $\phi(t) \equiv -1,\ Y\colon [0,T] \to CC(R^n)$ — многозначное отображение, $DY(t)$ — обобщенная производная Хукухары [24, 26].

***Замечание* 10.** Каждый элемент решения системы (3) можно представить в виде

$$X(i) = X_0 \stackrel{h}{-} \sum_{j=0}^{i-1} G(j, X(j)).$$

Теперь рассмотрим общий случай системы (1), когда $\varphi(\cdot)\colon I \to \{-1, 0, 1\}$, и докажем условия существования решения.

Теорема 2. *Пусть система* (1) *удовлетворяет следующим условиям*:

1) $F, G\colon I \times CC(R^n) \to CC(R^n)$;

2) *для всех* $i \in I,\ X \in CC(R^n)$ *и* $\psi \in R^n$ $(\|\psi\| = 1)$ *выполняется неравенство*

$$\big|C(X, \psi) + C(X, -\psi)\big| \geq \big|C(G(i, X), \psi) + C(G(i, X), -\psi)\big|.$$

Тогда для любого $X_0 \in CC(R^n)$ *и любой последовательности* $\varphi = \{\varphi(i)\}_{i=0}^{N}$ *существует решение системы* (1).

Доказательство. Возьмем любое $X_0 \in CC(R^n)$. Тогда из условия 1 теоремы следует, что $F(0, X_0)$ и $G(0, X_0)$ принадлежат $CC(R^n)$. Далее возьмем любую последовательность $\varphi = \{\varphi(i)\}_{i=0}^{N}$.

Возможны три случая:

1) $\varphi(0) = 1$. Тогда $X(1) = X_0 + F(0, X_0)$ и, следовательно, $X(1)$ существует и принадлежит $CC(R^n)$.

2) $\varphi(0) = 0$. Тогда $X(1) = X_0$ и, следовательно, $X(1)$ существует и принадлежит $CC(R^n)$.

3) $\varphi(0) = -1$. Тогда $X(1) = X_0 \stackrel{h}{-} G(0, X_0)$. Поскольку из условия 2 теоремы имеем

$$\big|C(X_0, \psi) + C(X_0, -\psi)\big| \geq \big|C(G(0, X_0), \psi) + C(G(0, X_0), -\psi)\big|$$

для всех $\psi \in R^n$ $(\|\psi\| = 1)$, то множество $G(0, X_0)$ вложимо в множество X_0, т. е. существует некоторый вектор $c \in R^n$ такой, что $G(0, X_0) + c \subset X_0$. Тогда, согласно замечанию 8, разность Хукухары $X_0 \stackrel{h}{-} G(0, X_0)$ существует и $X(1)$ принадлежит $CC(R^n)$.

Далее аналогично можно доказать, что для всех $i \in I$ множества $X(i)$ существуют и принадлежат $CC(R^n)$.

Теорема 2 доказана.

***Замечание* 11.** Каждый элемент решения системы (1) можно представить в виде

$$X(i) = X_0 + \sum_{j \in J_1^{i-1}} F(j, X(j)) \stackrel{h}{-} \sum_{j \in J_{-1}^{i-1}} G(j, X(j)), \tag{5}$$

где $J_1^{i-1} = \{1, \ldots, i-1\} \bigcap J_1$, $J_1 = \{i : i \in I, \varphi(i) = 1\}$, $J_{-1}^{i-1} = \{1, \ldots, i-1\} \bigcap J_{-1}$, $J_{-1} = \{i : i \in I, \varphi(i) = -1\}$.

***Замечание* 12.** Выражение (5) нельзя записать в виде

$$X(i) = X_0 \stackrel{h}{-} \sum_{j \in J_{-1}^{i-1}} G(j, X(j)) + \sum_{j \in J_1^{i-1}} F(j, X(j)),$$

так как разность Хукухары $X_0 \stackrel{h}{-} \sum_{j \in J_{-1}^{i-1}} G(j, X(j))$ может не существовать (см. замечание 3).

***Замечание* 13.** Рассмотрим дифференциальное уравнение с обобщенной производной Хукухары [24, 26]

$$DY \stackrel{h}{-} \Phi(-\phi(t)) R_1(t, Y) = \Phi(\phi(t)) R_2(t, Y), \qquad Y(0) = X_0, \tag{6}$$

где $\phi(\cdot)$ принадлежит $C_\theta([0, T]; [-1, 1])$, $C_\theta([0, T]; [-1, 1])$ — множество непрерывных функций, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) если $\phi(\tau) = 0$ и $\phi(\tau + 0) > 0$, то $\phi(t) > 0$ для всех $t \in (\tau, \tau + \theta]$;

2) если $\phi(\tau) = 0$ и $\phi(\tau + 0) < 0$, то $\phi(t) < 0$ для всех $t \in (\tau, \tau + \theta]$;

3) если $\phi(\tau) = 0$ и $|\phi(\tau - 0)| > 0, \phi(\tau + 0) = 0$, то $\phi(t) = 0$ для всех $t \in [\tau, \tau + \theta]$,

$Y : [0, T] \to CC(R^n)$ — многозначное отображение, $DY(t)$ — обобщенная производная Хукухары [24, 26], $R_1, R_2 : [0, T] \times CC(R^n) \to CC(R^n)$ — многозначные отображения.

Обозначим через $\{\tau_i\}$ точки отрезка $[0, T]$ такие, что в данных точках $\phi(\tau_i) = 0$ и выполняется одно из следующих условий: 1) $|\phi(\tau_i - 0)| > 0$ и $\phi(\tau_i + 0) = 0$; 2) $\phi(\tau_i - 0) = 0$ и $|\phi(\tau_i + 0)| > 0$; 3) $|\phi(\tau_i - 0)| > 0$ и $|\phi(\tau_i + 0)| > 0$.

Теперь возьмем $m \in N$ такое, что $\Delta = \dfrac{T}{m} < \theta$, и определим точки $\{s_i\}$ следующим образом: $s_i = i \cdot \Delta$, $i = \overline{0, m}$.

Пусть $\{t_i\} = \{\tau_i\} \bigcup \{s_i\}$ и количество элементов этого множества равно $N + 1$.

Определим последовательность $\varphi = \{\varphi(i)\}_{i=0}^N$ следующим образом:

$$\varphi(i) = \begin{cases} 1, & \phi(t_i) > 0 \quad \text{или} \quad \phi(t_i) = 0, \quad \phi(t_i + 0) > 0, \\ 0, & \phi(t_i) = 0 \quad \text{и} \quad \phi(t_i + 0) = 0, \\ -1, & \phi(t_i) < 0 \quad \text{или} \quad \phi(t_i) = 0, \quad \phi(t_i + 0) < 0, \end{cases} \qquad i = \overline{0, N}.$$

Теперь определим $X(i) = Y(t_i)$, $F(i, X(i)) = (t_{i+1} - t_i) \cdot R_2(t_i, Y(t_i))$, $G(i, X(i)) = (t_{i+1} - t_i) \cdot R_1(t_i, Y(t_i))$ и запишем многозначную дискретную систему вида (1). Решение данной многозначной дискретной системы определяет многозначные вершины ломаной Эйлера для дифференциального уравнения с обобщенной производной Хукухары (6).

***Замечание* 14.** Можно получить аналогичные результаты, если вместо пространства $CC(R^n)$ рассмотреть пространство всех непустых M-строго выпуклых замкнутых подмножеств пространства R^n [25, 27] и всех элементов пространства R^n, т. е. $MCC(R^n)$.

Литература

1. *de Blasi F. S., Iervolino F.* Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso // Boll. Unione Mat. Ital. – 1969. – **2**, № 4-5. – P. 491 – 501.
2. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: АстроПринт, 1999. – 354 с.
3. *Плотников А. В., Скрипник Н. В.* Дифференциальные уравнения с четкой и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: АстроПринт, 2009. – 191 с.
4. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 428 с.
5. *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities // de Gruyter Stud. Math. – 2011. – **40**. – 309 p.
6. *Lakshmikantham V., Granna Bhaskar T., Vasundhara Devi J.* Theory of set differential equations in metric spaces. – Cambridge Sci. Publ., 2006.
7. *Lakshmikantham V., Mohapatra R. N.* Theory of fuzzy differential equations and inclusions. – London: Taylor & Francis, 2003.
8. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.
9. *Плотникова Н. В.* Аппроксимация пучка решений линейных дифференциальных включений // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 3. – С. 386 – 400.
10. *Filippov A. F.* Differential equations with discontinuous right-hand sides. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. Group, 1988.
11. *de Blasi F. S., Iervolino F.* Euler method for differential equations with set-valued solutions // Boll. Unione Mat. Ital. – 1971. – **4**, № 4. – P. 941 – 949.
12. *Chahma I. A.* Set-valued discrete approximation of state-constrained differential inclusions // Bayreuth. Math. Schr. – 2003. – **67**. – P. 3 – 162.
13. *Baier R., Donchev T.* Discrete approximation of impulsive differential inclusions // Numer. Funct. Anal. and Optim. – 2010. – **31**, № 6. – P. 653 – 678.
14. *Gu R. B., Guo W. J.* On mixing properties in set valued discrete system // Chaos, Solitons and Fractals. – 2006. – **28**, № 3. – P. 747 – 754.
15. *Khan A., Kumar P.* Chaotic properties on time varying map and its set valued extension // Adv. Pure Math. – 2013. – **3**. – P. 359 – 364.
16. *Plotnikov A. V., Komleva T. A.* The averaging of fuzzy linear differential inclusions on finite interval // Dyn. Contin., Discrete Impuls. Syst., Ser. B., Appl. Algorithms. – 2016. – **23**, № 1. – P. 1 – 9.
17. *Plotnikov A. V., Komleva T. A.* The partial averaging of fuzzy differential inclusions on finite interval // Int. J. Different. Equat. – 2014. – **2014**. – Article ID 307941. – 5 p.
18. *Плотников А. В.* Схема полного усреднения для нечетких дифференциальных включений на конечном промежутке // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 3. – С. 366 – 374.
19. *Плотников В. А., Плотникова Л. И., Яровой А. Т.* Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления // Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, № 2. – С. 241 – 254.
20. *Roman-Flores H.* A note on transitivity in set valued discrete systems // Chaos, Solitons Fractals. – 2003. – **17**, № 1. – P. 99 – 104.
21. *Roman-Flores H., Chalco-Cano Y.* Robinsons chaos in set-valued discrete systems // Chaos, Solitons and Fractals. – 2005. – **25**, № 1. – P. 33 – 42.
22. *Shi Y. M., Chen G. R.* Chaos of time-varying discrete dynamic systems // J. Different. Equat. and Appl. – 2009. – **15**, № 5. – P. 429 – 449.
23. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Funkc. Ekvacioj. – 1967. – № 10. – P. 205 – 223.
24. *Plotnikov A., Skripnik N.* Existence and uniqueness theorems for generalized set differential equations // Int. J. Control Sci. Eng. – 2012. – **2**, №. 1. – P. 1 – 6.
25. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М.: Физматлит, 2004. – 416 с.
26. *Плотников А. В., Скрипник Н. В.* Многозначные дифференциальные уравнения с обобщенной производной // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 10. – С. 1350 – 1362.
27. *Балашов М. В. Половинкин Е. С.* M-сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества // Мат. сб. – 2000. – **191**, № 1. – С. 27 – 64.

Получено 09.01.17