УДК 517.9

В. Д. Кошманенко (Ін-т математики НАН України, Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Київ),
В. О. Волошина (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ГРАНИЧНІ РОЗПОДІЛИ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ КОНФЛІКТУ З ТОЧКОВИМ СПЕКТРОМ

We construct a model of conflict dynamical system whose limit states are associated with singular distributions. We prove that a criterion for appearance of a point spectrum in the limit distribution is the strategy of fixed priority. In all other cases, the limit distributions are pure singular continuous.

Побудовано модель динамічної системи конфлікту, граничні стани якої асоційовані з сингулярними розподілами. Доведено, що критерієм для виникнення точкового спектра в граничному розподілі є стратегія фіксованого пріоритету. В усіх інших випадках граничні розподіли є чисто сингулярно неперервними.

1. Вступ. Уперше спектральні властивості граничних сингулярних розподілів для динамічних систем конфлікту вивчалися в роботі [1] (див. також [2, 3]). Як правило, ці розподіли є чисто сингулярно неперервними і мають фрактальну структуру [4 – 7]. Більше того, в роботі [8] доведено, що клас сингулярно неперервних граничних розподілів утворює множину повної міри у просторі всіх граничних станів динамічних систем конфлікту. Точкові (дискретні) розподіли виникають згідно з теоремами типу Джессена – Вінтнера лише за екстремальних умов дуже швидкої локальної концентрації послідовності апроксимуючих мір (див. умову (1)).

Зазначимо, що поняття динамічної системи конфлікту було введено в роботі [9] (див. також [2, 3, 10 – 13]), а типова властивість чистої сингулярності граничних станів, напевно, є проявом універсального феномена сингулярності, відомого в теорії функцій, функціональному аналізі та теорії лінійних операторів (див., наприклад, [14 – 16, 24]). З нього випливає, що дискретні та абсолютно неперервні функції та розподіли, як і точкові та абсолютно неперервні спектри, є екзотичними, усі ж інші об'єкти математичних побудов мають сингулярно неперервну структуру і вимірюються по запасу другою категорією по Беру.

Можна думати, що сингулярність граничних розподілів тісно пов'язана із фрактальною структурою геометричних множин, на яких зосереджені такі розподіли. Нагадаємо, що теорія фракталів почала бурхливо розвиватися відносно недавно, сам термін „фрактал” приписують Бенуа Мандельброту (див. [17, 18]), хоча витоки цієї теорії проглядаються ще з 17-го століття. В її основу покладено ідею самоподібності множини дробової розмірності та відмінність топологічної розмірності таких множин від гаусдорфової. В наш час наука, пов'язана з фракталами, сингулярними мірами та розподілами, зосередженими на фракталах, а також її застосування розвиваються надзвичайно інтенсивно. Відзначимо лише кілька публікацій [19 – 22]. Зокрема, розвинутий у монографіях М. В. Працьовитого [23, 24] метод Q-зображень (та його узагальнення) сприяв значному поштовху в розвитку теорії фрактальних та сингулярних розподілів.

Один із цікавих аспектів спектральних властивостей сингулярних розподілів пов'язаний із теоремами типу Джессена – Вінтнера про чистоту спектрального типу. Зокрема, в публікаціях [25 – 27] доведено теореми про можливість трансформацій типів спектрів у граничних розподілах динамічних систем конфлікту, наприклад чисто сингулярно неперервного в точковий.

У цій роботі ми досліджуємо питання про умови на початкові розподіли динамічних систем конфлікту, які гарантують виникнення чисто точкового спектра в граничних розподілах.

Отриманий нами основний результат стверджує, що головна умова вигляду (1) з теореми типу Джессена – Вінтнера виконується тоді і лише тоді, коли один з опонентів обирає стратегію фіксованого пріоритету, тобто його стартовий розподіл має перевагу над розподілом іншого опонента лише в єдиній локальній області (див. умову (6)).

2. Ітераційні функціональні системи та сингулярні розподіли. Метод ітераційних функціональних систем (ІФС) дає зручний спосіб для побудови та вивчення фракталів та сингулярних розподілів. Нагадаємо деякі з основних фактів з теорії ІФС на $\mathbb{R}^1$ (докладніше див. [20 – 22]).

Нехай $K = \{K_i\}_{i=1}^n$, $2 \leq n < \infty$, позначає сім'ю стискаючих перетворень на $\mathbb{R}^1$,

$$|K_i(x) - K_i(y)| = q_i|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^1, \quad q_i < 1.$$

Припустимо, що звуження K на $\Delta_0 \equiv [0, 1]$ задовольняє такі умови:

(a) $0 < q_i = |\Delta_i| < 1$, $\Delta_i := K_i(\Delta_0) \subset \Delta_0$,

(b) $K_i((0, 1)) \bigcap K_j((0, 1)) = \varnothing$, $i \neq j$,

(c) $K_i(x) < K_j(y)$, $i < j$, $x, y \in \Delta_0$.

Набір стисків K називатимемо повним, якщо додатково виконується умова:

(d) $\Delta_0 = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$, $1 = \sum_{i=1}^n q_i$.

Для кожної ІФС з умовами (a) – (c) існує єдина інваріантна непорожня компактна множина $\Gamma \subset \Delta_0$ така, що

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^n K_i(\Gamma).$$

Множина Γ є замкненою і складається з усіх нерухомих точок для всеможливих комбінацій $K_{i_1} \circ \ldots \circ K_{i_k}$ стискаючих відображень при $k \to \infty$. Зрозуміло, що $\Gamma = \Delta_0$ за умови (d).

З умови (b) випливає виконання так званої умови відкритої множини. Тому інваріантна множина Γ є самоподібною і її розмірність Гаусдорфа $d = \dim_H(\Gamma)$ збігається з самоподібною розмірністю, яка визначається розв'язком рівняння

$$\sum_{i=1}^n q_i^d = 1.$$

Якщо набір стисків K не є повним, умова (d) не виконується і, отже, $\sum_{i=1}^n q_i < 1$. Тоді міра Лебега множини Γ з необхідністю є нульовою:

$$\lambda(\Gamma) \equiv |\Gamma| = 0.$$

Далі в роботі використовуємо позначення

$$\Delta_{i_1 \cdots i_k} := K_{i_1} \circ \cdots \circ K_{i_k}(\Delta_0), \quad i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n.$$

2.1. Сингулярні розподіли, породжені ітераційними функціональними системами. Нехай $(\Omega, \mathcal{B}, \lambda)$ — ймовірнісний простір, де $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{B}$ — борелівська σ-алгебра підмножин з Ω, λ — міра Лебега на Ω.

Для подальших побудов виділяємо найпростіший клас випадкових величин на Ω, яким відповідають кусково-рівномірні розподіли. Увесь клас таких мір μ позначаємо через $\mathcal{M}^{\text{pud}}(\Omega)$.

Якщо маємо фіксовану ІФС з умовами (a) – (d), то кожному стохастичному вектору $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\sum_i p_i = 1$, відповідає така міра $\mu \in \mathcal{M}^{\mathrm{pud}}(\Omega)$, що

$$\mu(\Delta_i) = p_i, \quad \Delta_i := K_i(\Delta_0).$$

Зрозуміло, що відповідна функція розподілу $F_\mu(x) = \mu((-\infty, x))$ має кусково-лінійний графік.

Нехай $P = (\mathbf{p}_k)_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність стохастичних векторів

$$\mathbf{p}_k = (p_{k1}, p_{k2}, \ldots, p_{kn}), \quad p_{ki} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_{ki} = 1 \quad \text{для всіх} \quad k.$$

Позначимо через μ_k імовірнісну міру з $\mathcal{M}^{\mathrm{pud}}(\Omega)$ таку, що

$$\mu_k(\Delta_{i_1 \ldots i_k}) = p_{1i_1} \ldots p_{ki_k}.$$

Згідно з теорією, розвиненою в [23, 24], кожна послідовність P однозначно асоційована з випадковою величиною на $[0, 1]$ із, як правило, сингулярним розподілом. Відповідну ймовірнісну міру позначаємо через μ_∞. За теоремою типу Джессена – Вінтнера (див. [1, 2, 5, 9, 13, 24]) міра μ_∞ є точковою, лише якщо

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_{i_1 \ldots i_k} \mu_\infty(\Delta_{i_1 \ldots i_k}) > 0. \tag{1}$$

2.2. Слабка збіжність розподілів. Нехай $\Phi_k(\varphi)$, $k = 1, 2, \ldots$, позначають лінійні функціонали, асоційовані з мірами μ_k на просторі неперервних функцій:

$$\Phi_k(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) d\mu_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \varphi \in C(\mathbb{R}).$$

Аналогічно визначаємо функціонал $\Phi_\infty(\varphi)$ по мірі μ_∞.

Лема 1. *Послідовність* Φ_k, $k = 1, 2, \ldots$, *збігається до* Φ_∞ *у слабкому сенсі:*

$$\Phi_k(\varphi) \to \Phi_\infty(\varphi), \quad k \to \infty.$$

Доведення. Зафіксуємо функцію φ, яку, без втрати загальності, можна вважати додатною та обмеженою, тобто

$$0 \leq \varphi(x) \leq M, \quad x \in [0, 1].$$

Ідея доведення полягає у тому, що для кожного k значення функціонала $\Phi_k(\varphi)$ можна оцінити зверху та знизу, замінивши функцію $\varphi(x)$ на кожному циліндрі $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$ її мінімальним та максимальним значенням. Введемо позначення

$$\varphi_{i_1 \ldots i_k, m} := \min_{x \in \Delta_{i_1 \ldots i_k}} \varphi(x), \quad \varphi_{i_1 \ldots i_k, M} := \max_{x \in \Delta_{i_1 \ldots i_k}} \varphi(x).$$

Тоді

$$\Phi_{k,m}(\varphi) \leq \Phi_k(\varphi) \leq \Phi_{k,M}(\varphi),$$

де

$$\Phi_{k,\mathrm{ex}}(\varphi) := \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \varphi_{i_1\ldots i_k,\mathrm{ex}} \int\limits_{\Delta_{i_1\ldots i_k}} d\mu_k(x) =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \varphi_{i_1\ldots i_k,\mathrm{ex}}\mu_k(\Delta_{i_1\ldots i_k}) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \varphi_{i_1\ldots i_k,\mathrm{ex}} p_{i_1\ldots i_k},$$

ex позначає m або M та $p_{i_1\ldots i_k} \equiv p_{1i_1}\ldots p_{ki_k}$.

Зрозуміло, що різниця $\Phi_{k,M}(\varphi) - \Phi_{k,m}(\varphi)$ монотонно спадає до нуля при $k \to \infty$:

$$\Phi_{k,M}(\varphi) - \Phi_{k,m}(\varphi) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} (\varphi_{i_1\ldots i_k,M} - \varphi_{i_1\ldots i_k,m}) p_{i_1\ldots i_k} \le d_k \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} p_{i_1\ldots i_k} = d_k \to 0,$$

де послідовність $d_k := \max_{i_1\ldots i_k}\{\varphi_{i_1\ldots i_k,M} - \varphi_{i_1\ldots i_k,m}\}$ очевидно збігається до нуля завдяки неперервності та обмеженості $\varphi(x)$ і тому, що $|\Delta_{i_1\ldots i_k}| \to 0$ при $k \to \infty$. Тому

$$\lim_{k\to\infty} \Phi_{k,m}(\varphi) = \Phi_\infty(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \Phi_{k,M}(\varphi).$$

Зауважимо, що значення $\Phi_\infty(\varphi)$ задається функцією розподілу $F_\infty(x)$ міри μ_∞, асоційованою з матрицею $P = (\mathbf{p}_k)_{k=1}^{\infty} = (p_{ki_k})_{k=1,i_k=1}^{\infty,n}$ (див. [23, 24]). Зокрема, використовуючи формулу (2.3.1) з [24], маємо

$$\Phi_\infty(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} c_{i_1\ldots i_k} \int\limits_{\Delta_{i_1\ldots i_k}} \varphi(x)dx, \quad c_{i_1\ldots i_k} := \frac{p_{i_1\ldots i_k}}{q_{i_1\ldots i_k}},$$

де $q_{i_1\ldots i_k} \equiv q_{i_1}\ldots q_{i_k}$.

Означення. *Послідовність елементів* p_{ki_k}, $k = 1, 2, \ldots$, *з матриці* $P = (p_{ki_k})_{k=1,i_k=1}^{\infty,n}$ *називаємо* **1**-*збіжною* (*позначаємо* $p_{ki_k} \uparrow 1$), *якщо* $\sum_{k=1}^{\infty}(1 - p_{ki_k}) < \infty$, *або, еквівалентно,*

$$\lambda_{i_1\ldots i_k\ldots} := \prod_{k=1}^{\infty} p_{ki_k} > 0.$$

Якщо ж $\sum_{k=1}^{\infty} p_{ki_k} < \infty$, *то таку послідовність називаємо* **0**-*збіжною* (*позначаємо* $p_{ki_k} \downarrow 0$). *Пару послідовностей* p_{ki_k}, p_{kj_k}, $k = 1, 2, \ldots$, *називаємо еквівалентними, якщо* $p_{ki_k} \neq p_{kj_k}$ *лише для скінченної кількості індексів; якщо навпаки,* $p_{ki_k} = p_{kj_k}$ *лише для скінченної кількості індексів, то такі послідовності називаємо диз'юнктними.*

Наступне твердження справджується завдяки стохастичності векторів $\mathbf{p}_k$ матриці P.

Твердження. *Якщо у матриці* P *можна виділити* 1-*збіжну послідовність, то вона буде єдиною з точністю до еквівалентності, всі інші диз'юнктні до неї послідовності є* 0-*збіжними.*

Лема 2. *Припустимо, що послідовність* p_{ki_k}, $k = 1, 2, \ldots$, *є* 1-*збіжною. Тоді послідовність лінійних функціоналів*

$$\Phi_k^{\lceil}(\varphi) := \int\limits_{\Delta_{i_1\ldots i_k}} \varphi(x)d\mu_k(x), \quad \varphi \in C(\mathbb{R}),$$

збігається до функціонала, який з точністю до сталої породжений δ-*функцією Дірака:*

$$\Phi_k^{\lceil}(\varphi) \to \lambda_{\bar{i}_k}\varphi(x_{\bar{i}_k}), \tag{2}$$

де стала $\lambda_{\bar{i}_k} \equiv \lambda_{i_1\ldots i_k\ldots} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{ki_k}$, *а точка* $x_{\bar{i}_k} \equiv x_{i_1\ldots i_k\ldots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{i_1\ldots i_k}$.

Доведення. За побудовою

$$\Phi_k^{\lceil}(\varphi) = c_{i_1\ldots i_k} \int\limits_{\Delta_{i_1\ldots i_k}} \varphi(x)dx, \quad c_{i_1\ldots i_k} = \frac{p_{i_1\ldots i_k}}{q_{i_1\ldots i_k}}.$$

Тому можемо скористатись оцінкою

$$\varphi_{i_1\ldots i_k,m} c_{i_1\ldots i_k}|\Delta_{i_1\ldots i_k}| \leq \Phi_k^{\lceil}(\varphi) \leq \varphi_{i_1\ldots i_k,M} c_{i_1\ldots i_k}|\Delta_{i_1\ldots i_k}|.$$

Еквівалентно,

$$\varphi_{i_1\ldots i_k,m} p_{i_1\ldots i_k} \leq \Phi_k^{\lceil}(\varphi) \leq \varphi_{i_1\ldots i_k,M} p_{i_1\ldots i_k}.$$

Оскільки послідовність відрізків $\Delta_{i_1\ldots i_k}$ стягується до точки $x_{\bar{i}_k}$, а функція φ неперервна, то величини $\varphi_{i_1\ldots i_k,m}, \varphi_{i_1\ldots i_k,M}$ збігаються до значення функції $\varphi(x)$ у цій точці. Тому послідовність $\Phi_k^{\lceil}(\varphi)$ з необхідністю збігається до значення у правій частині (2).

Наступна теорема є безпосереднім наслідком леми 2.

Теорема 1. *Якщо у матриці* $P = (p_{ki_k})_{k=1,i_k=1}^{\infty,n}$ *можна виділити* 1*-збіжну послідовність, то*

$$\Phi_k(\varphi) \to \Phi_\infty(\varphi) = \sum_{\bar{x}\in I} \lambda_{\bar{x}}\varphi(\bar{x}),$$

де I *позначає не більш ніж зліченну множину всіх точок* $\bar{x} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{i_1\ldots i_k}$ *таких, що всі відповідні послідовності* $\{p_{ki_k}\}$ *є* 1*-збіжними та еквівалентними між собою, а всі сталі* $\lambda_{\bar{x}}$ *визначаються добутками відповідних матричних елементів:* $\lambda_{\bar{x}} \equiv \lambda_{\bar{i}_k} = \lambda_{i_1\ldots i_k\ldots} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{ki_k}$.

3. Побудова динамічної системи конфлікту. Під динамічною системою конфлікту ми розуміємо специфічну динамічну систему $\{X, *\}$, задану на просторі $X = \mathcal{M}(\Omega) \times \mathcal{M}(\Omega)$ бінарним некомутативним відображенням $*$, яке відповідає конфліктній взаємодії між опонентами (докладніше див. [2, 3, 10, 13]). Тут $\mathcal{M}(\Omega)$ позначає фіксований клас мір на $\Omega = [0, 1]$. У початковий момент дискретного часу кожному з опонентів співставляється міра з $\mathcal{M}(\Omega)$, яка визначає розподіл пріоритетів цього опонента на Ω. Згідно з теорією, розвиненою в [13], кожна пара мір з $\mathcal{M}(\Omega)$ та відображення $*$ визначають кінцевий результат поділу простору між опонентами. В роботі ми вивчаємо динамічні системи, що моделюють взаємодію лише між парою опонентів, наприклад A та B, яким відповідає в початковий момент пара ймовірнісних мір μ_1, ν_1 на борелевій σ-алгебрі $\mathcal{B}$ підмножин з Ω. Значення $\mu_1(\Delta)$, $\nu_1(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{B}$, мають інтерпретацію ймовірностей присутності опонентів A, B на Δ в початковий момент часу. Завдяки конфліктній взаємодії між A та B ці значення змінюються. Еволюція в часі таких змін задається траєкторією станів динамічної системи

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu_N \\ \nu_N \end{array} \right\} \xrightarrow{*} \left\{ \begin{array}{c} \mu_{N+1} \\ \nu_{N+1} \end{array} \right\}, \quad N = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

де відображення $*$ визначається залежно від конкретного закону конфліктної взаємодії між A та B. Дослідження поведінки властивостей траєкторій, зокрема питання про існування граничних станів $\mu_\infty = \lim_{N\to\infty} \nu_N$, $\nu_\infty = \lim_{N\to\infty} \nu_N$, є типовими задачами теорії.

У цій роботі $\mathcal{M}(\Omega)$ утворюється із кусково рівномірно розподілених та структурноподібних мір на $\Omega = [0,1]$, а перетворення $\circledast$ відповідає взаємодії відштовхування між опонентами (див. далі формули (5)). Нас цікавить питання, коли хоча б одна з граничних мір $\mu_\infty,\ \nu_\infty$ є чисто точковою, тобто зосереджена на не більш ніж зліченній множині точок.

Опишемо детально спосіб побудови траєкторій (3). Нехай задано деяку ІФС з умовами (a) – (d) та пару кусково рівномірно розподілених ймовірнісних мір μ_1, ν_1 на Δ_0, значення яких на відрізках $\Delta_i = K_i(\Delta_0),\ i = 1, \ldots, n$, фіксуються парою різних стохастичних векторів $\mathbf{p}_1 = (p_{1i})$ та $\mathbf{r}_1 = (r_{1i}),\ i = 1, \ldots, n$:

$$0 < \mu_1(\Delta_i) =: p_{1i} \neq \nu_1(\Delta_i) =: r_{1i} < 1. \tag{4}$$

Міри $\mu_{N+1},\ \nu_{N+1},\ N = 1, 2, \ldots$, будуються ітеративно по $\mu_N,\ \nu_N$. Правило побудови відповідає перетворенню $\circledast$, а саме,

$$\mu_N \circledast \nu_N = \mu_{N+1} \quad \nu_N \circledast \mu_N = \nu_{N+1}.$$

Кожна з мір $\mu_N,\ \nu_N$ є рівномірно розподіленою всередині всіх інтервалів $\Delta_{i_1 \ldots i_k},\ k = N$, а значення

$$\mu_N(\Delta_{i_1 \ldots i_k}) = p_{i_1 \ldots i_k}, \quad \nu_N(\Delta_{i_1 \ldots i_k}) = r_{i_1 \cdots i_k},$$

де числа $p_{i_1 \ldots i_k},\ r_{i_1 \ldots i_k}$ є добутками:

$$p_{i_1 \ldots i_k} := p_{1 i_1} \ldots p_{k i_k}, \quad r_{i_1 \ldots i_k} := r_{i_1} \ldots r_{k i_k},$$

множники яких $p_{ki},\ r_{ki},\ i = 1, \ldots, n$, визначаються ітеративно за законом

$$p_{k+1,i} = p_{k,i} \frac{1 - r_{ki}}{1 - \theta_k}, \quad r_{k+1,i} = r_{k,i} \frac{1 - p_{k,i}}{1 - \theta_k}, \quad \theta_k := \sum_{i=1}^{n} p_{ki} r_{ki}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Цей закон моделює взаємодію відштовхування між опонентами A та B, бо завдяки (4) при $k \to \infty$ хоча б одна з координат $p_{ki},\ r_{ki}$ прямує до нуля (див. теорему 2.8.4 в [13]). Зрозуміло, що елементи $p_{ki},\ r_{ki},\ i = 1, \ldots, n$, побудовані за правилом (5), утворюють при фіксованому k пару стохастичних векторів $\mathbf{p}_k,\ \mathbf{r}_k$, а їх послідовності по k формують пару граничних матриць, одну з яких ми позначаємо через P. Наступна теорема містить основний результат про динамічну систему конфлікту з траєкторіями (3).

Теорема 2. *Гранична міра μ_∞, що відповідає матриці P з елементами, побудованими ітеративно за правилом* (5) *по парі мір μ_1, ν_1 з умовою* (4), *є чисто точковою, $\mu_\infty \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$, тоді і лише тоді, коли*

$$\mu_1(\Delta_{i_0}) > \nu_1(\Delta_{i_0}) \tag{6}$$

лише для одного фіксованого індексу $1 \leq i_0 \leq n$.

Доведення в один бік зводимо до використання леми 3 (див. нижче). Дійсно, з (4) та (6) випливає, що

$$\mu_1(\Delta_i) < \nu_1(\Delta_i) \quad \forall i \neq i_0. \tag{7}$$

Тому (1) та (9) еквівалентні. Отже, $\mu_\infty \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$.

Припустимо, що умова (6) не виконується. Це означає існування хоча б пари координат, для яких $\mu_1(\Delta_{i_0}) > \nu_1(\Delta_{i_0})$, $\mu_1(\Delta_{j_0}) > \nu_1(\Delta_{j_0})$, $i_0 \neq j_0$. Тоді завдяки стохастичності векторів $\mathbf{p}_k$ жодна з послідовностей p_{ki_0}, p_{kj_0} не може збігатися до одиниці. Як наслідок, з елементів матриці P неможливо утворити жодної 1-збіжної послідовності, щоб виконувався критерій (1). Це доводить необхідність умови (6).

Лема 3. *Нехай по довільній парі стохастичних векторів* $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{r}_1 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *з попарно різними ненульовими координатами,* $0 < p_{1,i} \neq r_{1,i} < 1$, $i = 1, \ldots, n$, *побудовано траєкторію*

$$\{\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{r}_k\} \xrightarrow{*} \{\boldsymbol{p}_{k+1}, \boldsymbol{r}_{k+1}\}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

де координати стохастичних векторів $\{\boldsymbol{p}_{k+1}, \boldsymbol{r}_{k+1}\}$ *визначаються ітеративно за правилом* (5). *Припустимо, що*

$$p_{1i_0} > r_{1i_0} \tag{8}$$

лише для одиного фіксованого індексу i_0. *Тоді послідовність* p_{ki_0}, $k = 1, 2, \ldots$, *є* 1-*збіжною і, отже,*

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_{ki_0} > 0. \tag{9}$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $n = 2$. З (5) легко бачити, що $p_{21} = r_{22}$, $p_{22} = r_{21}$. Тому без втрати загальності можна покласти $p_{11} = a_1$, $p_{12} = 1 - a_1$, $r_{11} = 1 - a_1$, $r_{12} = a_1$. При всіх $k \geq 1$ координати векторів $\mathbf{p}_k$ та $\mathbf{r}_k$ мають аналогічний зв'язок: $p_{k1} = a_k = r_{k2}$, $p_{k2} = 1 - a_k = r_{k1}$. Нехай $i_0 = 1$. Тоді умова (8) означає, що $a_1 > 1/2$. Тепер потрібно довести, що послідовність $p_{k1} = a_k$ зростає до одиниці, $a_k \to 1$, так швидко, що $\prod_{k=1}^{\infty} a_k > 0$.

Зазначимо, що ітеративне правило (5) у випадку $n = 2$ задається такою парою перетворень на $[0, 1]$:

$$F_1(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-x)^2}, \quad F_2(x) = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 + x^2}$$

з $x = a_1$. Очевидно, що при $a_1 > 1/2$ послідовність

$$a_{k+1} = \frac{a_k^2}{a_k^2 + (1 - a_k)^2}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

зростає до 1. Нагадаємо, що збіжність нескінченного добутку

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k > 0 \tag{11}$$

рівносильна збіжності ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - a_k) < \infty. \tag{12}$$

Щоб довести (12), введемо $L := \lim_{k\to\infty} k \left(\dfrac{1 - a_k}{1 - a_{k+1}} - 1 \right)$. Використовуючи формулу (10), помічаємо, що $L = \lim_{k\to\infty} k a_k \left(\dfrac{2a_k - 1}{1 - a_k} \right)$. Очевидно, що

$$\lim_{k\to\infty} ka_k = \infty \quad \text{та} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{2a_k - 1}{1 - a_k} = \infty,$$

оскільки $a_k \to 1$. Отже, $L = \infty$. Таким чином, за відомою ознакою Раабе ряд (12) є збіжним і, як наслідок, нескінченний добуток (11) також збіжний.

Нехай $n > 2$. З нерівності (8) випливає протилежна нерівність для всіх інших координат векторів $\mathbf{p}_1, \ \mathbf{r}_1$:

$$p_{1i} < r_{1i}, \quad i \neq i_0. \tag{13}$$

Покажемо, що завдяки (13) кожна послідовність $p_{ki}, i \neq i_0, \ k = 1, 2, \ldots,$ є 0-збіжною, тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ki} < \infty. \tag{14}$$

З цією метою зауважимо, що з (5) випливає

$$p_{ki} = p_{k-1,i} c_{ki} = p_{1i} \prod_{l=1}^{k} c_{li}, \quad c_{li} = \frac{1 - r_{li}}{1 - \theta_l}. \tag{15}$$

За теоремою про конфлікт [11, 13] та завдяки (13) усі координати $r_{ki}, \ i \neq i_0$, збігаються до строго додатних значень, а координати $p_{ki}, \ i \neq i_0$, та θ_k збігаються до нуля:

$$r_{k,i} \to r_{\infty,i} > 0, \quad p_{ki} \to 0, \quad \theta_k \to 0, \quad k \to \infty, \quad i \neq i_0.$$

Тому починаючи з деякого k_0 всі c_{ki} стають меншими за одиницю і монотонно спадають. Їх можна оцінити сталою, що не залежить від k:

$$c_{ki} \leq c_i < 1, \qquad c_i := c_{k_0 i}.$$

Припустимо, що $k_0 = 1$. Тоді в (15) добуток замінюємо степенем і одержуємо оцінку

$$p_{ki} < p_{1i} c_i^k.$$

В такому випадку сума ряду (14) скінченна, не перевищує $p_{1i}/(1 - c_i)$, оскільки оцінюється рядом геометричної прогресії. Якщо $k_0 > 1$, то ряд (14) також є збіжним з тієї ж причини, оскільки часткова сума перших $k_0 - 1$ членів цього ряду скінченна. Аналогічні міркування справедливі для всіх $i \neq i_0$. Тому

$$\sum_{i \neq i_0} \sum_{k=k_0}^{\infty} p_{ki} = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p_{ki_0}) < \infty,$$

що еквівалентно (9).

Отже, послідовність $p_{ki_0}, \ k = 1, 2, \ldots,$ є 1-збіжною.

4. Дискусія, інтерпретація. Згідно з теоремою 2, міра μ_∞ зосереджена в зліченній множині точок $\bar{x} \in I = I_\mu$, описаних у теоремі 1. Значення міри μ_∞ у цих точках $\mu_\infty(\bar{x}) = \lambda_{\bar{x}} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{ki_k}$ задаються добутками 1-збіжних послідовностей елементів матриці P. Звичайно, всі такі послідовності еквівалентні між собою і мають лише різні скінченні кількості множників, що відмінні від p_{ki_0}. Зрозуміло, що множина I_μ є щільною на $[0, 1]$. Тому носій міри μ_∞

збігається з $[0, 1]$, хоча істотний носій (за термінологією [4]) складається лише з точок множини I_μ. Ця множина самоподібна і має нульову розмірність, як топологічну, так і гаусдорфову. Сама ж гранична міра μ_∞ є структурноподібною. Це означає, що відношення

$$\frac{\mu_\infty(\Delta_{i_1\ldots i_k})}{\mu_\infty(\Delta_{i_1\ldots i_k-1})} = p_{ki_k}$$

при кожному $k > 1$ є залежними лише від i_k (докладніше див. [13]). Міра ν_∞, яка відповідає опоненту B, очевидно, завжди є чисто сингулярно неперервною (при $n > 2$) і також структурноподібною.

Зазначимо, що випадок існування відрізків стартового паритету, $\mu_1(\Delta_j) = \nu_1(\Delta_j),\ j \neq i_0$, ми не розглядали. Доведення леми 3 та теореми 2 в такому випадку стають не достатніми. Хоча при умові (6) комп'ютерні симуляції демонструють також виникнення точкового спектра у міри μ_∞, але швидкість концентрації кусково-рівномірних розподілів мір μ_k до ненульових точкових значень значно сповільнюється.

Умову (6) ми називаємо стратегією фіксованого пріоритету. Вона означає, що один з опонентів, наприклад A, обирає в початковий момент єдину локальну область переваги (відрізок Δ_{i_0}). В противному разі граничний розподіл з необхідністю стане сингулярно неперервним. З доведення теореми 2 видно, що стратегія пріоритету навіть у двох локальних областях (відрізках $\Delta_{i_0}, \Delta_{j_0}$) приводить до чисто сингулярного розподілу.

Література

1. *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M. et al.* Spectral properties of image measures under infinite conflict interactions // Positivity. – 2006. – **10**. – P. 39 – 49.
2. *Koshmanenko V., Kharchenko N.* Spectral properties of image measures after conflict interactions // Theory Stochast. Process. – 2004. – **10(26)**, № 3 – 4. – P. 73 – 81.
3. *Кошманенко В. Д., Харченко Н. В.* Інваріантні точки динамічної системи конфлікту в просторі кусково рівномірно розподілених мір // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 7. – С. 927 – 938.
4. *Albeverio S., Koshmanenko V., Torbin G.* Fine structure of the singular continuous spectrum // Methods Funct. Anal. and Top. – 2003. – **9**, № 2. – P. 101 – 119.
5. *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M. et al.* On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\tilde{Q}$-symbols // Methods Funct. Anal. and Top. – 2011. – **17**, № 2. – P. 97 – 111.
6. *Torbin G. M.* On multifractal analysis of singular continuous probability measures // Ukr. Math. J. – 2005. – **57**, № 5. – P. 837 – 857.
7. *Torbin G. M.* Fractal properties of the distributions of random variables with independent Q-symbols // Trans. Nat. Ped. Univ. (Phys.-Math. Sci.). – 2002. – **3**. – P. 241 – 252.
8. *Кошманенко В. Д.* Повна міра множини сиингулярно неперервних мір // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 1. – С. 83 – 91.
9. *Bodnarchyk M. V., Koshmanenko V. D., Kharchenko N. V.* Properties of limit states of dynamical conflict system // Nonlinear Oscillations. – 2004. – **7**, № 4. – P. 446 – 461.
10. *Koshmanenko V.* On the conflict theorem for a pair of stochastic vectors // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, № 4. – P. 555 – 560.
11. *Koshmanenko V.* The theorem of conflict for probability measures // Math. Methods Oper. Res. – 2004. – **59**, № 2. – P. 303 – 313.
12. *Albeverio S., Bodnarchyk M., Koshmanenko V.* Dynamics of discrete conflict interactions between non-annihilating opponent // Methods Funct. Anal. and Top. — 2005. – **11**, № 4. – P. 309 – 319.
13. *Koshmanenko V.* Spectral theory for conflict dynamical systems (in Ukrainian). – Kyiv: Naukova Dumka, 2016. – 287 p.
14. *Zamfirescu T.* Most monotone functions are singular // Amer. Math. Monthly. –1981. – **88**. – P. 47 – 49.

15. *del Rio R., Jitomirskaya S., Makarov N. et al.* Operators with singular continuous spectrum are generic // Bull. Amer. Math. Soc. – 1994. – **31**. – P. 208 – 212.
16. *Simon B.* Operators with singular continuous spectrum: I. General operators // Ann. Math. – 1995. – **141**. – P. 131 – 145.
17. *Mandelbrot B.* Fractals: form, chance, and dimension. – San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1977. – 362 p.
18. *Barnsley M. F.* Fractals everywhere. – Boston: Acad. Press, 1988. – 540 p.
19. *Barnsley M. F., Demko S.* Iterated functional system and the global construction of fractals // Proc. Roy. Soc. London A. – 1985. – **399**. – P. 243 – 275.
20. *Falconer K. J.* Fractal geometry. – Chichester: Wiley, 1990. – 288 p.
21. *Hutchinson J. E.* Fractals and selfsimilarity // Indiana Univ. Math. J. – 1981. – **30**. – P. 713 – 747.
22. *Triebel H.* Fractals and spectra related to Fourier analysis and functional spaces. – Basel etc.: Birkhäuser-Verlag, 1997. – 271 p.
23. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.
24. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. — 298 с.
25. *Кошманенко В. Д.* Відновлення спектрального типу граничних розподілів у динамічних системах конфлікту // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 6. – С. 771 – 784.
26. *Karataieva T., Koshmanenko V.* Origination of the singular continuous spectrum in the conflict dynamical systems // Methods Funct. Anal. and Top. – 2009. – **14**, № 1. – P. 309 – 319.
27. *Кошманенко В. Д.* Квазіточкові спектральні міри в теорії динамічних систем конфлікту // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 2. – С. 187 – 199.

Одержано 27.02.18,
після доопрацювання — 01.11.18