УДК 517.95

Г. А. Леонов (Санкт-Петербург. гос. ун-т, Россия)

ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА В ГЛОБАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

We present an overview of development of the direct Lyapunov method in the global analysis of chaotic systems and describe three directions in which the Lyapunov functions are applied: in the methods of localization of global attractors, where the estimates of dissipativity in a sense of Levinson are obtained, in the problems of existence of homoclinic trajectories, and in the estimation of the dimension of attractors. The efficiency of construction of Lyapunov-type functions is demonstrated. In particular, the Lyapunov dimension formula is proved for the attractors of the Lorentz system.

Наведено огляд розвитку прямого методу Ляпунова у глобальному аналізі хаотичних систем. Описано три напрямки, в яких застосовуються функції Ляпунова: методи локалізації глобальних атракторів, де отримано оцінки дисипативності по Левінсону; задачі існування гомоклінічних траєкторій та оцінки розмірності атракторів. Продемонстровано ефективність побудови функції ляпуновського типу. Зокрема, встановлено формулу ляпуновської розмірності для атракторів системи Лоренца.

1. Введение. В 1892 году А. М. Ляпунов создал новый метод анализа локальной устойчивости состояний равновесия дифференциальных уравнений [1], который в дальнейшем был назван методом функций Ляпунова.

В двадцатом веке метод функций Ляпунова развивался и применялся для различных математических моделей в науке и технике [2 – 14]. В 1963 году Е. Лоренц опубликовал знаменитую статью [15], в которой впервые обнаружил хаотический аттрактор в конечномерных динамических системах. И уже в этой работе он применил метод функций Ляпунова для локализации глобального аттрактора.

Опишем здесь обобщение этого результата в современной трактовке.

2. Функции Ляпунова для оценок диссипативности по Левинсону систем лоренцевского типа. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x), \\ \dot{y} &= rx - dy - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \tag{1}$$

где σ, b — положительные числа, d — некоторое число, $r > d$. Для системы Лоренца $d = 1$, для систем Лу и Чена $d < 0$ [16, 17].

Лемма 1 [18]. *Если* $2\sigma \geq b$, *то для любого решения системы* (1) *имеет место неравенство*

$$\liminf_{t\to+\infty} \left[z(t) - \frac{x^2(t)}{2\sigma} \right] \geq 0. \tag{2}$$

Для доказательства леммы достаточно заметить, что для функции

$$V(x,z) = z - \frac{x^2}{2\sigma}$$

* Поддержана грантом НШ-2858.2018.1.

выполнено соотношение

$$\dot{V}(x(t), z(t)) = -bV(x(t), y(t)) + \left(1 - \frac{b}{2\sigma}\right) x^2(t).$$

Поэтому

$$V(x(t), z(t)) \geq e^{-bt} V(x(0), z(0)).$$

Отсюда следует оценка (2).

Напомним, что система (1) диссипативна по Левинсону, если существует число R такое, что для любых $x(0),\ y(0),\ z(0)$ выполнено соотношение

$$\limsup_{t \to +\infty} \left(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)\right) \leq R.$$

Теорема 1. *Если* $2\sigma \geq b,\ b + 2d > 0$, *то система* (1) *диссипативна по Левинсону.*

Доказательство основано на построении функции Ляпунова

$$V(x, y, z) = y^2 + z^2 + Ax^2 - Bxy + Cz,$$

где $A,\ B,\ C$ — некоторые параметры. Параметр C выбирается так, что

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t), z(t)) = -2\left(bz^2(t) + dy^2(t) + A\sigma x^2(t)\right) -$$

$$-B\left(\sigma y^2(t) + rx^2(t) - x^2(t)z(t)\right) - bCz(t).$$

Другими словами, C такое, что в правой части этого соотношения нет членов $Dx(t)y(t)$. Далее используя лемму, легко получить существование таких $A > 0,\ B > 0,\ Q > 0,\ P > 0$, что для любого решения (1) при достаточно больших t выполнено соотношение

$$\dot{V}(x(t), y(t), z(t)) \leq -PV(x(t), y(t), z(t)) + Q.$$

Отсюда следует неравенство

$$\limsup_{t \to +\infty} V(x(t), y(t), z(t)) \leq \frac{Q}{P}.$$

Последнее доказывает теорему.

Для случая $2\sigma \leq b$ преобразуем систему (1) следующим образом. Заменой

$$\eta = \sigma(y - x), \quad \xi = z - \frac{x^2}{b}$$

систему (1) приведем к форме

$$\dot{x} = \eta,$$

$$\dot{\eta} = -(\sigma + d)\eta + \sigma\xi x + \sigma(r - d)x - \frac{\sigma}{b}x^3,$$

$$\dot{\xi} = -b\xi - \frac{2\sigma - b}{b\sigma}\, x\eta.$$

Далее заменой

$$t \to \frac{t}{\sqrt{\sigma(r-d)}}, \qquad x \to \sqrt{b(r-d)}x,$$

$$\eta \to \sqrt{b\sigma}(r-d)\vartheta, \qquad \xi \to (r-d)u$$

эту систему приведем к следующему виду:

$$\dot{x} = \vartheta,$$
$$\dot{\vartheta} = -\lambda\vartheta - xu + x - x^3, \tag{3}$$
$$\dot{u} = -\alpha u - \beta x\vartheta,$$

где

$$\lambda = \frac{\sigma + d}{\sqrt{\sigma(r-d)}}, \qquad \alpha = \frac{b}{\sqrt{\sigma(r-d)}}, \qquad \beta = \frac{2\sigma - b}{\sigma}.$$

Перечислим системы, которые сводятся к (1) и, следовательно, к системе (3):
система Лоренца [15]: $d = 1,\ r > 0$,
система Чена [17]: $d = -c,\ c > \sigma/2,\ r = c - \sigma$,
система Лу [16]: $d = -c,\ c > 0,\ r = 0$,
система Тигана [19, 20] и Янга [21]: $d = 0$.

Система Шимицу – Мориока [22]

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\lambda y + x - xz, \quad \dot{z} = -\alpha\left(x - z^2\right)$$

также приводится к системе (3) заменой $\vartheta = y,\ u = z - x^2$. Здесь $\beta = 2$.

Введем в рассмотрение функцию Ляпунова

$$V(x, \vartheta, u) = \vartheta^2 - \frac{u^2}{\beta} - x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

Производная функции V на решениях системы (3) имеет вид

$$\frac{dV(x(t), \vartheta(t), u(t))}{dt} = 2\left(-\lambda\vartheta^2(t) + \frac{\alpha}{\beta}u^2(t)\right). \tag{4}$$

Используя стандартные рассуждения из современной теории устойчивости, легко видеть, что из (3) вытекает следующий результат.

Теорема 2. *Если* $\lambda < 0,\ \beta > 0$, *то любая траектория системы* (3), *не принадлежащая устойчивым многообразиям седел* $x = \vartheta = u = 0,\ x = \pm 1,\ \vartheta = u = 0$, *стремится к бесконечности при* $t \to +\infty$. *Если* $\lambda > 0,\ \beta < 0$, *то любая траектория системы* (3) *при* $t \to +\infty$ *стремится к некоторому состоянию равновесия.*

Заметим, что эти условия для системы (1) примут вид $\sigma + d < 0,\ 2\sigma > b,\ \sigma + d > 0,\ 2\sigma < b$.

Легко видеть, что при $\beta = 0$

$$\limsup_{t \to +\infty} u(t) = 0.$$

Отсюда следует, что при $\lambda > 0$ (т. е. при $\sigma + d > 0,\ 2\sigma = b$) все траектории при $t \to +\infty$ стремятся к состояниям равновесия.

Таким образом, из теорем 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

***Следствие* 1.** *Пусть* $2\sigma > b$. *Если* $b+2d > 0$, *то система* (1) *диссипативна по Левинсону; если* $\sigma + d < 0$, *то система* (1) *не является диссипативной по Левинсону.*

Введем оператор сдвига $F^t(x_0)$ по траекториям системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad x \in R^n, \quad f \in C^1(R^n), \tag{5}$$

$$F^t(x_0) = x(t, x_0), \qquad x_0 \in R^n, \quad t > 0, \quad x(0, x_0) = x_0.$$

Предположим, что решения системы (5) определены при всех $t \in [0, +\infty)$.

Известно, что если для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\operatorname{div} f(x) < -\varepsilon \quad \forall x \in R^n, \tag{6}$$

то для любого множества $K \subset R^n$ с конечным n-мерным объемом $V(K)$ имеет место соотношение

$$\lim_{t \to +\infty} V\big(F^t(K)\big) = 0. \tag{7}$$

Часто системы (5) со свойством (7) называют системами со сжатием объемов.

Для системы (1) свойство (6) выполнено, если

$$\sigma + b + d > 0.$$

Таким образом, при $2\sigma > b$,

$$-\sigma > d > -\sigma - b$$

система (1) является системой со сжатием объемов, а почти все ее решения стремятся при $t \to +\infty$ к бесконечности.

Отсюда и из теорем 1 и 2 следует, что если $2\sigma > b$, то диссипативность по Левинсону имеет место при $d > -b/2$ и этого свойства нет при $d < -\sigma$.

Заметим, что диссипативность по Левинсону при $d \geq 0$ была доказана в [23]. Условие $d > -b/2$ для системы Чена при $2\sigma > b$ получено в [24]. Условие $d < -\sigma$, $2\sigma > b$ приведено в [25].

Что происходит в промежутке $d \in [-\sigma, -b/2]$?

Актуальность этого вопроса заключается в том, что в этом диапазоне находятся параметры систем Чена и Лу, для которых были обнаружены странные аттракторы [17, 16]. В настоящее время граница, разделяющая диссипативность по Левинсону и ее отсутствие, определяется только в результате численных экспериментов [25].

Для бифуркационной теории оказывается важным распространение теоремы 2 на случай $\lambda = 0$.

3. Функции Ляпунова для доказательства существования гомоклинических траекторий.

Теорема 3. *Пусть* $\lambda = 0$, $\beta > 0$. *Тогда сепаратриса, выходящая из седла* $x = v = u = 0$:

$$\lim_{t \to -\infty} x(t) = \lim_{t \to -\infty} \vartheta(t) = \lim_{t \to -\infty} u(t) = 0,$$

стремится к бесконечности при $t \to +\infty$.

Доказательство. Предположим противное. В этом случае рассматриваемая сепаратриса имеет ω-предельную точку $x_0,\ \vartheta_0,\ u_0$. Стандартными рассуждениями из (4) получим, что кусок траектории $\tilde{x}(t),\ \tilde{\vartheta}(t),\ \tilde{u}(t),\ t\in[0,T]$, с начальными данными $\tilde{x}(0)=x_0,\ \tilde{\vartheta}(0)=\vartheta_0,\ \tilde{u}(0)=u_0$ также состоит из ω-предельных точек и удовлетворяет соотношению $\tilde{u}(t)=0\ \forall\, t\in[0,T]$. Но тогда из третьего уравнения системы (3) получим равенство $\tilde{\vartheta}(t)\tilde{x}(t)=0\ \forall t\in[0,T]$. Отсюда следует соотношение

$$\left(\tilde{x}^2(t)\right)^{\bullet}=2\tilde{x}(t)\tilde{\vartheta}(t)=0\quad \forall t\in[0,T].$$

Поэтому $\tilde{x}(t)=\mathrm{const},\ \tilde{\vartheta}(t)=0,\ \tilde{u}(t)=0\ \forall t\in[0,T]$. Легко видеть, что тогда $\tilde{x}(t),\ \tilde{\vartheta}(t),\ \tilde{u}(t)$ является состоянием равновесия.

Из (4) и соотношения $V(0)=0>-1/2=V(\pm1,0,0)$ следует, что $\tilde{x}(t)=\tilde{\vartheta}(t)=\tilde{u}(t)\equiv0$.

В этом случае траектория $x(t),\ \vartheta(t),\ u(t)$ является гомоклинической и $V(x(t),\vartheta(t),u(t))\equiv$ $\equiv0$. Но тогда из (4) следует, что $u(t)\equiv0$. Повторяя рассуждения, проведенные для $\tilde{x}(t),\ \tilde{\vartheta}(t),$ $\tilde{u}(t)$, получаем, что $x(t)=\vartheta(t)=u(t)\equiv0$. Последнее противоречит предположению о том, что $x(t),\ \vartheta(t),\ u(t)$ — сепаратриса седла $x=\vartheta=u=0$.

Таким образом, сепаратриса $x(t),\ \vartheta(t),\ u(t)$ не имеет ω-предельных точек и, следовательно, стремится к бесконечности при $t\to+\infty$.

Сформулируем теперь общий метод доказательства существования гомоклинических траекторий для систем вида

$$\frac{dX}{dt}=f(X,q),\qquad X\in R^n,\quad q\in R^m, \tag{8}$$

где $f(X,q)$ — гладкая вектор-функция, $R^n=\{X\}$ — фазовое пространство системы (8), $R^m=$ $=\{q\}$ — пространство параметров системы (8).

Пусть $\gamma(s),\ s\in[0,1]$, — гладкий путь в пространстве параметров $\{q\}$.

Сформулируем проблему Трикоми [26–31] для системы (8) и для пути $\gamma(s)$.

Проблема Трикоми. Существует ли точка $q_0\in\{q(s),\ s\in[0,1]\}$ такая, что система (8) с $q=q_0$ имеет гомоклиническую траекторию?

Напомним, что траектория $X(t)$ системы (8) называется гомоклинической, если выполнены соотношения

$$\lim_{t\to-\infty}X(t)=\lim_{t\to+\infty}X(t)=X_0.$$

Рассмотрим систему (8) с $q=\gamma(s)$ и введем следующие обозначения: $X(t,s)^+$ — сепаратриса седла $X_0:\ \lim_{t\to-\infty}X(t,s)^+=X_0,\ X(s)^+$ — точка первого пересечения сепаратрисой $X(t,s)^+$ замкнутого множества Ω:

$$X(t,s)^+\ \overline{\in}\ \Omega\quad \forall\, t\in(-\infty,T),$$

$$X(T,s)=X(s)^+\in\Omega.$$

Если такой точки пересечения не существует, то примем, что $X(s)^+=\varnothing$. Здесь $\varnothing$ — пустое множество.

Теорема 4 (принцип рыбака) [26–31]. *Предположим, что для пути $\gamma(s)$ существует ограниченное многообразие Ω размерности $n-1$ с кусочно-гладким краем $\partial\Omega$, имеющее следующие свойства:*

1) *для любого $X\in\Omega\backslash\partial\Omega$ и $s\in[0,1]$ вектор $f(X,\gamma(s))$ трансверсален к многообразию Ω,*

2) *для любого* $s \in [0,1]$ *выполнено равенство* $f(X_0, \gamma(s)) = 0$ *и* $X_0 \in \partial\Omega$ – *седловая точка системы* (8),

3) *имеет место включение* $X(0)^+ \in \Omega \backslash \partial\Omega$,

4) *выполнено соотношение* $X(1)^+ = \varnothing$,

5) *для любого* $s \in [0,1]$ *и* $Y \in \partial\Omega \backslash X_0$ *существует окрестность*

$$U(Y,\delta) = \{X \| X - Y| < \delta\}$$

такая, что $X(s) \overline{\in} U(Y,\delta)$.

Тогда существует число $s_0 \in [0,1]$ *такое, что* $X(t,s_0)$ — *гомоклиническая траектория седла* X_0.

Рассмотрим систему (3) с $\lambda \geq 0,\ \beta > 0$. Предположим, что

$$\alpha\left(\sqrt{\lambda^2+4}+\lambda\right) > 2(\beta-2). \tag{9}$$

Лемма 2. *Пусть выполнено неравенство* (9) *и сепаратриса* $x(t)^+,\ \vartheta(t)^+,\ u(t)^+$ *седла* $x = \vartheta = u = 0$ *удовлетворяет соотношению*

$$x(t)^+ > 0 \quad \forall t \in (-\infty, \tau]. \tag{10}$$

Тогда существует такое число R (*не зависящее от* τ), *что*

$$x(t)^+ \leq R, \qquad \left|\vartheta(t)^+\right| \leq R, \qquad |u(t)^+| \leq R. \tag{11}$$

Доказательство. Из неравенства (9) следует, что существует число $L > 0$, для которого выполнены неравенства

$$L > \left(\sqrt{\lambda^2+4}-\lambda\right)/2, \tag{12}$$

$$\frac{\beta L}{\alpha + 2L} < 1. \tag{13}$$

Введем обозначение $K = \beta L/(\alpha + 2L)$ и рассмотрим множество

$$\Phi = \left\{x \in [0, x_0],\ \vartheta \leq \min\left(Lx, \sqrt{\vartheta_0^2 + x^2 - \frac{1-K}{2}\,x^4}\right),\ u \geq -Kx^2\right\}.$$

Здесь ϑ_0 — некоторое положительное число (например, 1), x_0 — положительный корень уравнения

$$\vartheta_0^2 + x^2 - \frac{1-K}{2}\,x^4 = 0. \tag{14}$$

Из соотношений (12), $K > 0$ и $\vartheta \leq Lx$ в некоторой малой окрестности $x = \vartheta = 0$ следует, что на некотором интервале $(-\infty, \tau_1)$, $\tau_1 < \tau$, сепаратриса $x(t)^+,\ \vartheta(t)^+,\ u(t)^+$ принадлежит множеству Φ. Для того чтобы доказать, что эта сепаратриса принадлежит Φ на $(-\infty, \tau]$, рассмотрим границы $\Phi \cap \{x > 0\}$ и покажем, что они трансверсальны. Эти границы — следующие поверхности или части поверхностей:

$$\partial_1\Phi = \left\{\vartheta = Lx, u \geq -Kx^2\right\},$$

$$\partial_2\Phi = \left\{\vartheta^2 = \vartheta_0^2 + x^2 - (1-K)x^4/2, \vartheta > 0, u \geq -Kx^2\right\},$$

$$\partial_3\Phi = \left\{\vartheta \leq Lx,\ u = -Kx^2\right\}.$$

Рассмотрим решение системы $x(t),\ \vartheta(t),\ u(t)$, которое в точке t находится на $\partial_1\Phi$. В этом случае из (13) получаем соотношение

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -\lambda + (1 - x^2 - u)/L \leq -\lambda + \frac{1-(1-K)x^2}{L} < -\lambda + \frac{1}{L}.$$

Отсюда и из (12) следует, что

$$\frac{d}{dx}\,(\vartheta - Lx) < 0.$$

Таким образом, поверхность $\partial_1\Phi$ трансверсальна, и если $x(t),\ \vartheta(t),\ u(t)$ находится на $\partial_1\Phi$, то для этого решения существует число $\varepsilon(t)$ такое, что $\vartheta(\tau) - Lx(\tau) < 0\ \forall\tau \in (t, t+\varepsilon(t))$.

Рассмотрим теперь решение $x(t), \vartheta(t), u(t)$, которое в точке t находится на $\partial_2\Phi$.

Рассмотрим функцию

$$V(x,\vartheta) = \vartheta^2 - x^2 + (1-K)x^4/2.$$

Легко видеть, что

$$\frac{d}{dt}\,V(x(t),\vartheta(t)) = -2\lambda\vartheta^2(t) - 2\vartheta(t)x(t)\left[u(t) + Kx^2(t)\right] < 0.$$

Отсюда следует, что поверхность $\partial_2\Phi$ трансверсальна, и если $x(t), \vartheta(t), u(t)$ находится на $\partial_2\Phi$, то для этого решения существует число $\varepsilon(t)$ такое, что $V(x(\tau),\vartheta(\tau)) < 0\ \forall\tau \in (t, t+\varepsilon(t))$.

Рассмотрим теперь решение, которое в точке t находится на $\partial_3\Phi$. В этом случае

$$\left(u + Kx^2\right)^\bullet = -\alpha u - \beta x\vartheta + 2Kx\vartheta =$$

$$= (\alpha Kx + (2K-\beta)\vartheta)x = \frac{\alpha\beta}{\alpha + 2L}\,(Lx - \vartheta)x > 0.$$

Отсюда следует, что поверхность $\partial_3\Phi$ трансверсальна, и если $x(t),\ \vartheta(t),\ u(t)$ находится на $\partial_3\Phi$, то для этого решения существует число $\varepsilon(t)$ такое, что $u(\tau) + Kx^2(\tau) > 0\ \forall\tau \in (t, t+\varepsilon(t))$.

Из доказанных здесь соотношений и очевидного неравенства $\dot{x}(t) < 0$ при $x(t) = x_0$, $\vartheta(t) <$ < 0 следует, что $x(t)^+,\ \vartheta(t)^+,\ u(t)^+$ принадлежит Φ на $(-\infty, \tau]$. Отсюда следует утверждение леммы.

Заметим, что из третьего уравнения системы (3) имеем соотношение

$$\left(u + \frac{\beta}{2}\,x^2\right)^\bullet + \alpha\left(u + \frac{\beta}{2}\,x^2\right) = \frac{\alpha\beta}{2}\,x^2.$$

Поэтому если $x(t)^+ \in (0, x_0)\ \forall t \in (-\infty, \tau)$, то

$$u(t)^+ + \frac{\beta}{2}\left(x(t)^+\right)^2 \leq \frac{\beta}{2}x_0^2 \quad \forall t \in (-\infty, \tau).$$

Поэтому имеет место оценка

$$u(t)^+ \leq \frac{\beta}{2}x_0^2 \quad \forall t \in (-\infty, \tau). \tag{15}$$

Лемма 3. *Пусть выполнено условие* (9) *и*

$$\lambda^2 > 4\left[\left(1+\frac{\beta}{2}\right)x_0^2 - 1\right], \tag{16}$$

где x_0 *— положительный корень уравнения* (14). *Тогда* $x(t)^+ > 0\ \forall t \in (-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Здесь выполнены условия леммы 2. Поэтому если $x(t)^+ > 0\ \forall t \in (-\infty, \tau)$, то выполнено соотношение (15).

Если $x(\tau)^+ = 0$, то для любого положительного числа P существует $T < \tau$ такое, что

$$\vartheta(T)^+ = -Px(T)^+, \qquad \vartheta(t)^+ > -Px(t)^+ \quad \forall t \in (-\infty, T). \tag{17}$$

Для соотношения $\vartheta(T) = -Px(T)$ из (15) имеем

$$\frac{d\vartheta}{dx} > -\lambda + \frac{D}{P}, \qquad D = \left(1+\frac{\beta}{2}\right)x_0^2 - 1.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\frac{d}{dx}(\vartheta + Px) > P - \lambda + \frac{D}{P} = 0 \tag{18}$$

при $P = \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4D}\right)/2$. Здесь мы используем условие (16).

Из (18) следует, что

$$\left(\vartheta(T)^+\right)^\bullet + P\left(x(T)^+\right)^\bullet > 0.$$

Это неравенство противоречит (17). Полученное противоречие доказывает неравенство $x(t)^+ > 0\ \forall t \in (-\infty, +\infty)$.

Принцип рыбака и леммы 2, 3 позволяют сформулировать для системы (3) следующий результат.

Рассмотрим гладкий путь $\alpha(s),\ \lambda(s),\ \beta(s),\ s \in [0,1)$, в пространстве параметров системы (3).

Теорема 5. *Пусть*

$$\lambda(0) = 0, \qquad \lim_{s\to 1}\lambda(s) = +\infty,$$

$$\limsup_{s\to 1}\alpha(s) < +\infty, \qquad \limsup_{s\to 1}\beta(s) < +\infty$$

и выполнено неравенство

$$\alpha(s)(\sqrt{\lambda(s)^2+4} + \lambda(s)) > 2(\beta(s)+2) \quad \forall s \in [0,1]. \tag{19}$$

Тогда существует $s_0 \in (0,1)$ *такое, что система* (3) *с* $\alpha(s_0),\ \beta(s_0),\ \lambda(s_0)$ *имеет гомоклиническую траекторию.*

Приведем схему доказательства теоремы, использовав принцип рыбака (теорема 4), теорему 3 и леммы 2, 3.

В качестве Ω рассмотрим множество

$$\Omega = \{x = 0, \vartheta \le 0, \vartheta^2 + u^2 \le R\},$$

где R — достаточно большое число. Условия 1 и 2 теоремы 4 выполнены для любых $s \in [0, 1)$.

Из теоремы 3 и леммы 2 следует, что при $s = 0$ выполнено условие 3 теоремы 4, а из лемм 2 и 3 — что при $s = s_1$, достаточно близких к 1, выполнено условие 4 теоремы 4.

Система (3) имеет решение

$$x(t) = \vartheta(t) \equiv 0, \qquad u(t) = u(0)\exp(-\alpha t).$$

Отсюда следует выполнение условия 5 теоремы 4. (Подробнее об этом эффекте см. [26 – 31].)

Таким образом, для пути с $s \in [0, s_1]$ выполнены все условия теоремы 4 и, следовательно, существует s_0, для которого имеет место утверждение теоремы 5.

Заметим, что особый интерес представляет путь

$$\lambda(s) = \frac{s}{\sqrt{1-s}}, \qquad \alpha(s) = \delta\sqrt{1-s},$$

$$\beta(s) \equiv \beta \in (0, 2+\delta), \qquad 0 < \delta \leq 1.$$

Для этого пути выполнены все условия теоремы 5 и, следовательно, существует $s_0 \in (0, 1)$ такое, что при $s = s_0$ система (3) имеет гомоклиническую траекторию. При этом седловая величина будет нулевой при $\delta = 1$ и положительной при $\delta < 1$.

При $\delta = 1$ и $\beta \in (0, 2)$ теорема 5 была доказана в [32, 33], и этот результат повторен в [34]. При $\delta \leq 1$ и $\beta \in (0, 2)$ в [35] численными методами показано, что при гомоклинических бифуркациях могут появляться лишь предельные циклы. При β, близкой к $2 + \delta$, может наблюдаться гомоклиническая бифуркация слияния странных аттракторов [35].

4. Функции Ляпунова в теории размерности аттракторов. Размерность является одной из основных числовых характеристик аттракторов.

Первые оценки размерности аттракторов были получены в работах [36 – 38].

Новым важным шагом в этом направлении была верхняя оценка Дуади – Оэстерли [39] хаусдорфовой размерности аттракторов.

Здесь, используя специальное разложение линейного оператора, приведем новое доказательство, которое делает оценку Дуади – Оэстерли „почти очевидной". Предложенный здесь метод оценивания хаусдорфовой меры может быть использован и для исследования других типов размерностных характеристик.

Рассмотрим компакт $K \subset R^n$ и числа $d \geq 0$, $\varepsilon > 0$ и определим хаусдорфову меру и хаусдорфову размерность компакта K.

Введем в рассмотрение все покрытия K кубами C_i со сторонами $2\delta_i \leq 2\varepsilon$ и величину

$$\mu_H(K, d, \varepsilon) = \inf \sum_i \delta_i^d,$$

где инфимум берется по всем ε-покрытиям K. Очевидно, что $\mu_H(K, d, \varepsilon)$ возрастает с уменьшением ε. Следовательно, существует предел

$$\mu_H(K, d) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_H(K, d, \varepsilon).$$

Определение 1. *Величина $\mu_H(K, \varepsilon)$ называется хаусдорфовой мерой компакта K.*

Определение 2. *Величина*

$$\dim_H K = \inf \big\{ d \mid \mu_H(K,d) = 0 \big\}$$

называется хаусдорфовой размерностью компакта K.

Заметим, что покрытие кубами можно заменить покрытиями шарами радиусов $r_i \le \varepsilon$. При этом размерности $\dim_H K$ совпадают.

Сформулируем теперь результат о разложении произвольного линейного оператора.

Лемма 4 [40]. *Для линейного в* R^n *оператора* A *существуют симметричный неотрицательный оператор* S *и ортогональный оператор* Q *такие, что*

$$A = SQ.$$

Лемма 5 [40]. *Оператор* S *имеет в* R^n *ортонормальную систему собственных векторов* e_j, $j = 1, \ldots, n$, *с вещественными собственными числами, которые совпадают с сингулярными величинами* α_j, $\alpha_1 \ge \ldots \ge \alpha_n$, *оператора* A.

Леммы 4 и 5 позволяют ввести следующее важное определение.

Определение 3. *Куб* C *называется ориентированным по отношению к оператору* A, *если стороны куба* QC *параллельны или ортогональны собственным векторам* e_j, $j = 1, \ldots, n$.

Перейдем теперь к очень простому доказательству теоремы Дуади – Оэстерли.

Для этого рассмотрим непрерывно дифференцируемое отображение $F(x)\colon R^n \to R^m$,

$$F(x+h) - F(x) = (T_x F)h + o(h). \tag{20}$$

Предположим, что $\alpha_1(T_xF) \ge \ldots \ge \alpha_n(T_xF)$ — сингулярные значения матрицы T_xF, и обозначим

$$\omega_d(T_xF) = \alpha_1(T_xF) \ldots \alpha_k(T_xF)\alpha_{k+1}(T_xF)^s, \quad d = k + s.$$

Теорема 6 [39]. *Пусть* $F(K) = K$ *и*

$$\sup_K \omega_d(T_xF) < 1. \tag{21}$$

Тогда $\dim_H K \le d$.

Доказательство. Из условия (21) следует существование числа $\nu < 1$ такого, что

$$\sup_K \omega_d(T_xF) < \nu. \tag{22}$$

Введем обозначения

$$\beta = \sup_K \big(\alpha_1(T_xF)\big), \qquad \gamma = \sup_K \big(\alpha_{k+1}(T_xF)\big).$$

Очевидно, что $\gamma^d \le \nu$.

Известно [41], что для любого натурального p выполняются неравенства

$$\begin{gathered} \sup_K \omega_d(T_xF^p) < \nu^p, \\ \sup_K \alpha_1(T_xF^p) \le \beta^p, \qquad \sup_K \alpha_{k+1}(T_xF^p) \le \nu^{p/d}. \end{gathered} \tag{23}$$

Выберем p достаточно большим так, чтобы

$$4\sqrt{n}\nu^{p/d} \le 1, \quad 4^{k+2}n^{d/2}\nu^p < 1.$$

Рассмотрим теперь произвольное ε-покрытие кубами со сторонами $2\delta_i$ $(\delta_i \le \varepsilon)$ и центрами в точках x_i компакта K. Не умаляя общности можно принять, что это покрытие является конечным.

Выберем здесь ε настолько малым, чтобы в $\beta^p\varepsilon$-окрестности любой точки $x \in K$ была равномерно выполнена процедура линеаризации (20): $|o(h)| \le \mu|h|$, где $\mu = \mu(\varepsilon)$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu(\varepsilon) = 0. \tag{24}$$

Рассмотрим теперь для каждого куба C_i с центром в x_i и со стороной $2\delta_i$ из ε-покрытия K ориентированный по отношению к оператору $T_{x_i}F^p$ куб $\tilde{C}_i$ с центром в x_i и со стороной $4\sqrt{n}\delta_i$.

Очевидно, что $T_{x_i}F^p\tilde{C}_i$ — параллелепипед со сторонами $4\sqrt{n}\delta_i\alpha_j(T_{x_i}F^p)$, $j = 1, \ldots, n$, и

$$2T_{x_i}F^pC_i \subset T_{x_i}F^p\tilde{C}_i.$$

Отсюда и из (24) получаем

$$F^p(C_i) \subset F^p(x_i) + T_{x_i}F^p\tilde{C}_i. \tag{25}$$

Покроем полученный здесь параллелепипед кубами со сторонами $4\sqrt{n}\delta_i\alpha_{k+1}(T_{x_i}F^p)$. Число таких кубов меньше или равно

$$\left(\frac{\alpha_1(T_{x_i}F^p)}{\alpha_{k+1}(T_{x_i}F^p)} + 1\right) \cdots \left(\frac{\alpha_k(T_{x_i}F^p)}{\alpha_{k+1}(T_{x_i}F^p)} + 1\right). \tag{26}$$

Отсюда следует, что

$$\mu_H(T_{x_i}F^p\tilde{C}_i, d, \varepsilon) \le 4^k n^{d/2}\omega_d(T_{x_i}F^p)\delta_i^d \le \delta_i^d/16.$$

Поэтому

$$\mu_H(K, d, \varepsilon) = \mu_H(F^pK, d, \varepsilon) < \frac{1}{8}\,\mu_H(K, d, \varepsilon).$$

Очевидно, что в этом случае $\mu_H(K, d, \varepsilon) = 0$. Поэтому $\mu_H(K, d) = 0$. Из этого равенства следует утверждение теоремы.

Таким образом, подробное изложение доказательства теоремы занимает менее двух страниц. При этом можно сказать, что эта теорема является почти очевидным следствием лемм 4, 5 и соотношений (25), (26).

Этот подход может быть применен и к различным обобщениям. Например, вместо $FK = K$ можно требовать $FK \supset K$ или вместо хаусдорфовой рассматривать фрактальную размерность [41].

В настоящее время описано много характеристик аттракторов размерностного типа [41]. Здесь введем размерность Хаусдорфа – Лебега, объединяющую идеи Хаусдорфа и Лебега, высказанные ими при создании меры Хаусдорфа и меры Лебега.

Рассмотрим все покрытия компакта K кубами C_i со сторонами $2\delta_i \le 2\varepsilon$. Также, как в теории меры Лебега, внутренности этих кубов C_i и C_j не пересекаются при $i \ne j$, а их границы ∂C_i и ∂C_j, которые принадлежат $\partial C_i \cap \partial C_j$, содержатся только либо в C_i, либо в C_j.

Введем

$$\mu_{HL}(K, d, \varepsilon) = \inf \sum_i \delta_i^d,$$

где инфимум берется по всем ε-покрытиям: $\delta_i \le \varepsilon$.

Очевидно, что $\mu_{HL}(K, d, \varepsilon)$ возрастает при уменьшении ε. Поэтому существует предел

$$\mu_{HL}(K, d) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_{HL}(K, d, \varepsilon).$$

Определение 4. *Величина $\mu_{HL}(K, d)$ называется мерой Хаусдорфа – Лебега компакта K.*

Определение 5. *Величина*

$$\dim_{HL} K = \inf\{d | \mu_{HL}(K, d) = 0\}$$

называется размерностью Хаусдорфа – Лебега компакта K.

Очевидно, что

$$\dim_H K \le \dim_{HL} K. \tag{27}$$

Используя схему доказательства теоремы 6, получаем следующий результат.

Теорема 7. *Пусть $F(K) = K$ и выполнено соотношение* (21). *Тогда*

$$\dim_{HL} K \le d. \tag{28}$$

Используя эту схему и методику, развитую в [42], можно получить следующий результат.

Теорема 8. *Пусть $\tilde{K} \supset K$, $F^m(K) \subset \tilde{K}$ $\forall m \ge 1$,*

$$\sup_{\tilde{K}} \omega_d(T_x F) < 1,$$

$$\mu_{HL}(K, d) < \infty.$$

Тогда

$$\lim_{m \to \infty} \mu_{HL}\left(F^m(K), d\right) = 0.$$

Таким образом, верхние оценки размерности и меры Хаусдорфа – Лебега конструктивны и имеют аналоги оценок размерности и меры Хаусдорфа.

Однако внешняя мера Хаусдорфа, по мнению автора, является „слишком внешней”, и поэтому до сих пор нет развитой теории нижнего оценивания хаотических аттракторов. В настоящее время нижние оценки хаусдорфовой размерности аттракторов — это только размерности неустойчивых многообразий седел. Первая попытка развить такую теорию для меры Хаусдорфа – Лебега предпринята в [43].

Введение в оценки размерности сингулярных чисел и величины $\omega_d(T_x F)$ стимулировало введение новой размерностной характеристики — ляпуновской размерности [44 – 46]. Опишем эту размерность.

Рассмотрим отображение $F(x)$, удовлетворяющее соотношению (20).

Определение 6. *Локальной ляпуновской размерностью отображения F в точке $x \in K$ назовем число*

$$\dim_L(F, x) = j + s,$$

где j — наибольшее целое число из $[1, n]$ такое, что

$$\alpha_1(T_x F) \dots \alpha_j(T_x F) \geq 1,$$

и число $s \in [0, 1]$ такое, что

$$\alpha_1(T_x F) \dots \alpha_j(T_x F) \alpha_{j+1}(T_x F)^s = 1.$$

В случае $\alpha_1(T_x F) < 0$ по определению имеем $\dim_L(F, x) = 0$, а в случае

$$\alpha_1(T_x F) \dots \alpha_n(T_x F) \geq 1$$

по определению $\dim_L(F, x) = n$.

Определение 7. *Ляпуновской размерностью отображения F множества K назовем число*

$$\dim_L(F, K) = \sup_K \dim_L(F, x).$$

Определение 8. *Локальной ляпуновской размерностью последовательности отображений F^i в точке $x \in K$ назовем число*

$$\dim_L x = \limsup_{i \to \infty} \dim_L(F^i, x).$$

Определение 9. *Ляпуновской размерностью последовательности отображений F^i множества K назовем число*

$$\dim_L K = \sup_K \dim_L x.$$

Для отображений F^t, зависящих от параметра $t \in R^1$, можно ввести следующие аналоги определений 8 и 9.

Определение 10. *Локальной ляпуновской размерностью отображения F^t в точке $x \in K$ назовем число*

$$\dim_L x = \limsup_{i \to +\infty} \dim_L(F^t, x).$$

Определение 11. *Ляпуновской размерностью отображения F^t множества K назовем число*

$$\dim_L K = \sup_K \dim_L x.$$

Из теорем 6 и 7 следует, что если $F^i K = K$ или $F^t K = K$, то для компакта K имеют место оценки

$$\dim_H K \leq \dim_{HL} K \leq \dim_L K. \tag{29}$$

Здесь в оценки ляпуновской размерности будут введены функции Ляпунова и с их помощью получены точные формулы ляпуновской размерности для аттракторов системы Лоренца и других хаотических систем.

Рассмотрим систему

$$\frac{dX}{dt} = f(X), \qquad t \in R^1, \quad X \in R^n, \tag{30}$$

где $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция. Пусть F^t — оператор сдвига по траекториям системы (30):

$$F^t(X_0) = X(t, X_0).$$

Пусть для компакта K выполнено соотошение $F^t K = K \ \forall t \in R^1$.

Обозначим через $J(X)$ матрицу Якоби вектор-функции $f(X)$:

$$J(X) = \frac{\partial f(X)}{\partial X}$$

и введем невырожденную матрицу $S: \ \det S \neq 0$.

Обозначим через $\lambda_1(X,S) \geq \ldots \geq \lambda_n(X,S)$ собственные значения матрицы

$$\frac{1}{2}\left[SJ(X)S^{-1} + (SJ(X)S^{-1})^*\right].$$

Здесь $*$ — операция транспонирования.

Теорема 9. *Предположим, что для целого числа $j \in [1,n]$ и числа $s \in [0,1]$ существуют непрерывно дифференцируемая функция $\vartheta(x)$ и невырожденная матрица S такие, что выполнено неравенство*

$$\sup_K \Big[\lambda_1(X,S) + \ldots + \lambda_j(X,S) + s\lambda_{j+1}(X,S) + \dot{\vartheta}(X)\Big] < 0. \tag{31}$$

Тогда

$$\dim_L K \leq j + s. \tag{32}$$

Теорема 10. *Предположим, что* (30) *диссипативна по Левинсону и существуют непрерывно дифференцируемая функция $\vartheta(X)$ и невырожденная матрица S такие, что выполнено неравенство*

$$\lambda_1(X,S) + \lambda_2(X,S) + \dot{\vartheta}(X) < 0 \quad \forall X \in R^n. \tag{33}$$

Тогда любое решение системы (30) *стремится при $t \to +\infty$ к стационарному множеству.*

В теоремах 9 и 10

$$\dot{\vartheta}(X) = \big(\mathrm{grad}\vartheta(X)\big)^* f(X).$$

Подробные доказательства теорем 9 и 10 см. в [47].

Применим теперь теоремы 9 и 10 к системе (1) с $d \geq 0$, построив специальные функции ляпуновского типа $\vartheta(X)$. Для этого сформулируем „почти очевидную” лемму, которая следует из леммы 1.

Лемма 6. *Пусть $2\sigma \geq b,\ C > 0,\ D > 4C\sigma$. Тогда на аттракторе системы* (1) *выполнено неравенство*

$$-Cx^4 + Dx^2 z \leq (2D - 4C\sigma)\sigma z^2. \tag{34}$$

Из теоремы 2 следует, что, если $2\sigma < b$, то любое решение системы (1) стремится при $t \to +\infty$ к некоторому состоянию равновесия. Поэтому здесь будем предполагать, что $2\sigma \geq b$.

Теорема 11. *Предположим, что при* $r \geq d$

$$r\sigma + (\sigma - b)(b - d) > 0 \tag{35}$$

и существуют такие неотрицательные α *и* β, *что*

$$\alpha \geq \frac{1}{8b} + \left(\frac{2\sigma}{b} + 1\right)\beta,$$

$$\alpha d \geq \frac{1}{8} + (d - \sigma)\beta, \tag{36}$$

$$(r - d)(2\alpha - 4\beta) + \frac{(b - d + \sigma)^2}{4\sigma^2} - \frac{r\sigma + (\sigma - b)(b - d)}{b\sigma} \leq 0.$$

Если

$$r < (b + d)\left(\frac{b}{\sigma} + 1\right), \tag{37}$$

то любое решение системы (1) *стремится при* $t \to +\infty$ *к некоторому состоянию равновесия.*

Если

$$r \geq (b + d)\left(\frac{b}{\sigma} + 1\right), \tag{38}$$

то

$$\dim_L K = 3 - \frac{2(\sigma + b + d)}{\sigma + d + \sqrt{(\sigma - d)^2 + 4r\sigma}}. \tag{39}$$

Доказательство. Для матрицы Якоби J правой части системы (1) имеет место равенство

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -d & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}.$$

Для матрицы

$$S = \begin{pmatrix} -a^{-1} & 0 & 0 \\ -(b - d)/\sigma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$a = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma r + (\sigma - b)(b - d)}},$$

выполнено соотношение

$$SJS^{-1} = \begin{pmatrix} -\sigma - d + b & -\sigma/a & 0 \\ -\dfrac{\sigma}{a} + az & -b & -x \\ -a\left(y + \dfrac{b - d}{\sigma}x\right) & x & -b \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином матрицы

$$\frac{1}{2}\left(SJS^{-1} + \left(SJS^{-1}\right)^*\right)$$

имеет вид

$$(\lambda+b)\left(\lambda^2 + (\sigma+d)\lambda + b(\sigma+d-b) - \left(\frac{\sigma}{a} - \frac{az}{2}\right)^2 - \left(\frac{a(b-d)}{2\sigma}\,x + \frac{a}{2}\,y\right)^2\right).$$

Корни этого полинома имеют вид

$$\lambda_2 = -b,$$

$$\lambda_{1,3} = -\frac{\sigma+d}{2} \pm \frac{1}{2}\left[(\sigma+d-2b)^2 + \left(\frac{2\sigma}{a} - az\right)^2 + a^2\left(y + \frac{b-d}{\sigma}\,x\right)^2\right]^{1/2}.$$

Очевидно, что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$.

Рассмотрим соотношения

$$2(\lambda_1+\lambda_2+s\lambda_3) = -(\sigma+d+2b) - s(\sigma+d)+$$

$$+(1-s)\left[(\sigma+d-2b)^2 + \frac{4\sigma^2}{a^2} - 4\sigma z + a^2z^2 + a^2\left(y + \frac{b-d}{\sigma}x\right)^2\right]^{1/2} =$$

$$= -(\sigma+d+2b) - s(\sigma+d)+$$

$$+(1-s)\left[(\sigma-d)^2 + 4\sigma r - 4\sigma z + a^2z^2 + a^2\left(y + \frac{b-d}{\sigma}\,x\right)^2\right]^{1/2} \leq$$

$$\leq -(\sigma+d+2b) - s(\sigma+d) + (1-s)\left[(\sigma-d)^2 + 4\sigma r\right]^{1/2} +$$

$$+\frac{2(1-s)}{[(\sigma-d)^2+4\sigma r]^{1/2}}\left[-\sigma z + \frac{a^2z^2}{4} + \frac{a^2}{4}\left(y + \frac{b-d}{\sigma}x\right)^2\right].$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\vartheta(x,y,z) = \frac{(1-s)V(x,y,z)}{\left[(\sigma-d)^2 + 4\sigma r\right]^{1/2}},$$

$$V(x,y,z) = \gamma_1(y^2+z^2) + \gamma_2x^2 + \gamma_3\left(\frac{x^4}{4\sigma^2} - \frac{x^2z}{\sigma} - y^2 - 2xy\right) - b^{-1}\sigma z,$$

где $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$ — параметры, которые будут выбраны так, что

$$\lambda_1 + \lambda_2 + s\lambda_3 + \dot{\vartheta} < 0 \quad \forall x, y, z \geq x^2/2\sigma. \tag{40}$$

Из лемм 1 и 6 следует, что при всех $z \geq x^2/2\sigma$ выполнены соотношения

$$\dot V = \left[-\frac{x^4}{\sigma} + \left(4+\frac{b}{\sigma}\right)x^2z + 2(\sigma - r + d)xy - 2(\sigma - d)y^2 - 2rx^2\right]\gamma_3 +$$

$$+\gamma_1\left(2rxy - 2dy^2 - 2bz^2\right) + \gamma_2\left(2\sigma xy - 2\sigma x^2\right) + \sigma z - b^{-1}\sigma xy \le$$

$$\le \left[(4\sigma + 2b)z^2 + 2(\sigma - r + d)xy - 2(\sigma - d)y^2 - 2rx^2\right]\gamma_3 +$$

$$+\gamma_1\left(2rxy - 2dy^2 - 2bz^2\right) + \gamma_2\left(2\sigma xy - 2\sigma x^2\right) + \sigma z - b^{-1}\sigma xy.$$

Если

$$\gamma_1 \ge \frac{a^2}{8b} + \gamma_3\left(\frac{2\sigma}{b} + 1\right), \tag{41}$$

то

$$-\sigma z + \frac{a^2z^2}{4} + \frac{a^2}{4}\left(y + \frac{b-d}{\sigma}x^2\right) + \dot V \le$$

$$\le B_1x^2 + B_2xy + B_3y^2 \quad \forall x, y, z \ge \frac{x^2}{2\sigma}.$$

Здесь

$$B_1 = -2\gamma_2\sigma + \frac{a^2(b-d)^2}{4\sigma^2} - 2\gamma_3 r,$$

$$B_2 = 2\left(r\gamma_1 + \frac{a^2(b-d)}{4\sigma} - \frac{\sigma}{2b} + \sigma\gamma_2 + (\sigma + d - r)\gamma_3\right),$$

$$B_3 = -2\gamma_1 d + \frac{a^2}{4} - 2(\sigma - d)\gamma_3.$$

Для выполнения неравенства

$$B_1x^2 + B_2xy + B_3y^2 \le 0 \quad \forall x, y$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$B_1 \le 0, \quad B_3 \le 0, \quad 4B_1B_3 - B_2^2 \ge 0.$$

Эти неравенства выполнены, если

$$d\gamma_1 \ge \frac{a^2}{8} - \gamma_3(\sigma - d), \tag{42}$$

$$(C_1 - 2\gamma_2\sigma)B_3 - (\gamma_2\sigma + C_2)^2 \ge 0. \tag{43}$$

Здесь

$$C_1 = \frac{a^2(b-d^2)}{4\sigma^2} - 2\gamma_3 r, \quad C_2 = r\gamma_1 + \frac{a^2(b-d)}{4\sigma} - \frac{\sigma}{2b} + (\sigma + d - r)\gamma_3.$$

Неравенство (43) выполнено при некотором γ_2, если

$$B_3^2 + C_1 B_3 + 2C_2 B_3 \geq 0.$$

Из условия $B_3 \leq 0$ следует, что это неравенство выполнено, если

$$2(r-d)(\gamma_1 - 2\gamma_3) + \frac{a^2(b-d+\sigma)^2}{4\sigma^2} - \frac{\sigma}{b} \leq 0. \tag{44}$$

Выполним подстановку $\gamma_1 = \alpha a^2$, $\gamma_3 = \beta a^2$. В этом случае неравенства (41), (42), (44) совпадают с условиями (36).

Таким образом, если выполнены условия (36), то имеет место неравенство

$$\lambda_1 + \lambda_2 + s\lambda_3 + \dot{\vartheta} \leq (\sigma + d + 2b) - s(\sigma + d) +$$

$$+(1-s)\left[(\sigma-d)^2 + 4\sigma r\right]^{1/2} \quad \forall x, y, z \geq x^2/2\sigma. \tag{45}$$

Из (45) с $s = 0$ по теореме 10 следует, что при выполнении условия (37) любое решение системы (1) стремится при $t \to +\infty$ к некоторому состоянию равновесия.

Из (45) по теореме 9 следует, что при выполнении (38) $\dim_L K < 2 + s$, где

$$s > s_0 = \frac{\sqrt{4\sigma r + (\sigma-d)^2} - (\sigma + d + 2b)}{\sqrt{4\sigma r + (\sigma - d)} + (\sigma + d)}.$$

Устремляя s к s_0, получаем оценку

$$\dim_L K \leq 3 - \frac{2(\sigma + b + d)}{\sigma + d + \sqrt{(\sigma-d)^2 + 4\sigma r}}.$$

Но легко видеть, что

$$\dim_L 0 = 3 - \frac{2(\sigma + b + d)}{\sigma + d + \sqrt{(\sigma-d)^2 + 4\sigma r}}.$$

Поэтому имеет место равенство (39).

Теорема 11 доказана.

Из теоремы 11 вытекают следующие результаты.

Теорема 12. *Пусть* $b \geq d$, $r\sigma + (\sigma - b)(b - d) > 0$ *и*

$$\frac{(2r-d)\sigma(8\sigma d + b\sigma + b^2 - bd)}{b(b+d)} > -3\sigma^2 + 6\sigma(b-d) + (b-d)^2. \tag{46}$$

Тогда имеет место утверждение теоремы 11.

Теорема 13. *Пусть* $b \leq d$, $r\sigma + (\sigma - b)(b - d) > 0$ *и*

$$\frac{3(r-d)\sigma^2}{b} > -3\sigma^2 + 6\sigma(b-d) + (b-d)^2. \tag{47}$$

Тогда имеет место утверждение теоремы 11.

Теорема 12 следует из теоремы 11 при

$$\alpha = \frac{3\sigma + b - d}{8\sigma(b + 2d)}, \qquad \beta = \frac{b - d}{8\sigma + 2d},$$

а теорема 13 — при $\alpha = 1/8b,\ \beta = 0$.

Далее будем предполагать, что $d = 1$.

Введем обозначение

$$Q = \frac{1}{2}\Big(SJS^{-1} + \big(SJS^{-1}\big)^*\Big).$$

Легко видеть, что для системы (1) и

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{r/\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

неравенство

$$Q + \lambda I > 0, \qquad \lambda = \frac{\sigma + b + 1}{1 - s}, \tag{48}$$

влечет за собой (31) с $\vartheta(X) \equiv 0$. Также очевидно, что (48) выполнено, если

$$\det \begin{pmatrix} -\sigma + \lambda & \sqrt{r\sigma} - \dfrac{z}{2}\sqrt{\sigma/r} & \dfrac{y}{2}\sqrt{\sigma/r} \\ \sqrt{r\sigma} - \dfrac{z}{2}\sqrt{\sigma/r} & -1 + \lambda & 0 \\ \dfrac{y}{2}\sqrt{\sigma/r} & 0 & -b + \lambda \end{pmatrix} > 0. \tag{49}$$

Неравенство (49) выполнено, если

$$\frac{r}{\sigma}\big[(\lambda - \sigma)(\lambda - 1) - r\sigma\big] - \frac{z^2}{4} - \frac{\lambda - 1}{4(\lambda - b)}\, y^2 + rz > 0. \tag{50}$$

Известно [18], что для системы (1)

$$\limsup_{t \to +\infty} \big[(z(t) - r)^2 + y(t)^2\big] \le \ell^2 r^2,$$

$$\ell = 1 \quad \text{при} \quad b < 2, \qquad \ell = \frac{b}{2\sqrt{b - 1}} \quad \text{при} \quad b \ge 2,$$

где $y(t),\ z(t)$ — решение системы (1).

Отсюда и из (50) следует, что (31) имеет место, если

$$\sigma + 2 + (2b - 1)s - b \ge 0, \tag{51}$$

$$r < \frac{2(\lambda - \sigma)(\lambda - 1)}{\sigma(\ell^2 + 1)}. \tag{52}$$

Напомним, что здесь $\sigma \ge b/2$ и $b \le 4$. Поэтому выполнено (51).

Возьмем любое $s > s_1$, где

$$s_1 = 1 - \frac{2(\sigma + b + 1)}{\sigma + 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}.$$

Легко видеть, что при $b \leq 2$ (тогда $\ell = 1$) (52) выполнено при любом $s > s_1$ и при $s = s_1$ (52) превращается в равенство.

Таким образом, здесь (31) выполнено при любом $s > s_1$. Переходя к пределу при $s \to s_1$, получаем оценку

$$\dim_L K \leq 2 + s_1.$$

Из этой оценки вытекает следующий результат.

Теорема 14. *Если* $b \leq 2$, *то имеет место утверждение теоремы* 11.

Положим в (51) $s = 0,\ b \leq 4$. В этом случае можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 15. *Если* $b \leq 4$ *и*

$$r \leq r_0 = \frac{2(\sigma + b)(b + 1)}{\sigma(1 + \ell^2)},$$

то любое решение системы (1) *стремится при* $t \to +\infty$ *к некоторому состоянию равновесия.*

Условия теоремы 12 выполнены при $b \in [2, 4],\ \sigma \geq b/2,\ r \geq r_0$.

Поэтому из теорем 12 и 15 вытекает следующий результат.

Теорема 16. *Если* $b \in [2, 4]$, *то имеет место утверждение теоремы* 11.

Из теорем 14 и 16 получаем следующий окончательный результат для системы Лоренца.

Теорема 17. *Пусть* $d = 1,\ b \in [0, 4]$. *Если*

$$\frac{2(\sigma + b + 1)}{\sigma + 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma r}} > 1,$$

то любое решение системы (1) *стремится при* $t \to +\infty$ *к некоторому состоянию равновесия.*

Если

$$\frac{2(\sigma + b + 1)}{\sigma + 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma r}} \leq 1,$$

то

$$\dim_L K = 3 - \frac{2(\sigma + b + 1)}{\sigma + 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma r}}.$$

У этого результата длинная история. Лишь для одного специального параметра $b = 2$ эта формула была получена в [48]. В работе [45] были установлены оценки $\dim_L K$ для системы (1) с $d = 1$. Для $b = 8/3,\ \sigma = 10,\ r = 28$ эти оценки имеют вид

$$2{,}401 \leq \dim_L K \leq 2{,}409.$$

В [49] численными методами была установлена приближенная оценка $\dim_L K \approx 2{,}401\ldots$.

В дальнейшем были получены оценки, в которых конструировались функции Ляпунова [46, 47, 50 – 54].

В настоящей статье получен окончательный результат и продемонстрированы современные возможности метода функций Ляпунова. При этом показано, что этот метод можно развить до такого уровня, что с его помощью возможно получить формулы ляпуновской размерности для всего пространства параметров системы Лоренца. Для других систем такие формулы получены в [29, 41, 42, 46, 47, 51, 52, 54 – 57].

Литература

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения: Собрание сочинений. – М; Л.: Гостехиздат, 1950. – 472 с. (Англ. перевод: *Lyapunov A. M.* General problem of the stability of motion. – CRC Press, 1992. – 270 p.)
2. *La Salle J., Lefschetz S.* Stability by Lyapunov's direct method with applications. – New York: Acad. Press, 1961. – 168 p.
3. *Hahn W.* Theorie und Anwendungen der direkten Methodes von Lyapunov. – Berlin: Springer, 1959. – 142 S.
4. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
5. *Четаев Н. Т.* Устойчивость движения. – М.: Гостехиздат, 1956. – 204 с.
6. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
7. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
8. *Yoshizawa T.* Lyapunov's function and boundedness of solutions // Funkc. Ekvacioj. – 1959. – **2**. – P. 95 – 142.
9. *Rouche N., Habets P., Laloy M.* Stability theory by Lyapunov's direct method // Appl. Math. Sci. – New York: Springer, 1977. – Vol. 22. — 301 p.
10. *Cesari L.* Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1959. – 274 p.
11. *Lefschetz S.* Stability of nonlinear control systems. – New York: Acad. Press., 1965. – 186 p.
12. *Кунцевич В. М., Лычак М. М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. – М.: Наука, 1977. – 399 с.
13. *Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения // Механика в СССР за 50 лет. – 1968. – **1**. – С. 7 – 66.
14. *Leonov G. A., Ponomarenko D. V., Smirnova V. B.* Frequency-domain methods for nonlinear analysis: theory and applications. – Singapore: World Sci., 1996. – 494 p.
15. *Lorenz E.* Deterministic nonperiodic flow // J. Atmospheric Sci. – 1963. – **20**. – P. 130 – 141.
16. *Lu J., Chen G.* A New chaotic attractor coined // Intern. J. Bifur. and Chaos. – 2002. – **12**, № 3. – P. 652 – 661.
17. *Chen G., Dong X.* From chaos to order: methodologies, perspectives and applications. – Singapore: World Sci., 1998. – 753 p.
18. *Leonov G. A., Bunin A. I., Koksch N.* Attractorlocalisierung des Lorenz system // Z. angew. Math. und Mech. – 1987. – **67**, № 12. – S. 649 – 656.
19. *Tigan G., Opris D.* Analysis of a 3D chaotic system // Chaos, Solutions and Fractals. – 2008. – **36**, № 5. – P. 1315 – 1319.
20. *Tigan G., Constyantinessu D.* Heteroclinic orbits in T and Lu systems // Chaos, Solutions and Fractals. – 2014. – **42**, № 7. – 8 p.
21. *Yang Q., Chen G.* A chaotic system with one saddle and two stable node-foci // Intern. J. Bifur. and Chaos. – 2008. – **18**. – P. 1393 – 1414.
22. *Shimizu T., Morioka N.* On the bifurcation of a symmetric limit cycle to an asymmetric one // Phys. Lett. A. – 1980. – **76**, № 3 – 4. – P. 201 – 204.
23. *Leonov G. A.* Fishing principle for homoclinic and heteroclinic trajectories // Nonlinear Dynam. – 2014. – **78**. – P. 2751 – 2758.
24. *Zhang F., Liao X., Mu C., Zhang G., Chen Y. A.* On global boundeness of the Chen system // Discrete and Contin. Dyn. Syst. Ser. B. – 2017. – **22**, № 4. – P. 1673 – 1681.
25. *Леонов Г. А., Андриевский Б. Р., Мокаев Р. Н.* Асимптотическое поведение решений систем лоренцевского типа. Аналитические результаты и структуры компьютерных ошибок // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2017. – **4**, № 1. – С. 25 – 37.
26. *Leonov G. A.* General existence conditions of homoclinic trajectories in dissipative systems. Lorenz, Shimizu – Morioka, Lu and Chen systems // Phys. Lett. A. – 2012. – **376**, № 45. – P. 3045 – 3050.
27. *Леонов Г. А.* Задача Трикоми для динамической системы Шимицу – Мориока // Докл. РАН. Математика. – 2012. – **447**, № 6. – С. 603 – 606.
28. *Леонов Г. А.* Критерии существования гомоклинических траекторий в системах Лу и Чена // Докл. РАН. Математика. – 2013. – **449**, № 6. – С. 634 – 638.

29. *Леонов Г. А.* СистемыРесслера. Оценки размерности аттракторов и гомоклинические траектории // Докл. РАН. Математика. – 2014. – **456**, № 6. – С. 442 – 444.
30. *Leonov G. A.* Bounds for attractors and the existence of homoclinic orbits in the Lorenz system // J. Appl. Math. and Mech. – 2001. – **65**, № 1. – P. 19 – 32.
31. *Леонов Г. А.* Задача Трикоми о существовании гомоклинических траекторий в диссипативных системах // Прикл. математика и механика. – 2013. – **77**, вып. 3. – С. 410 – 420.
32. *Leonov G. A.* Cascade of bifurcations in Lorenz-like systems: birth of strange attractor, blue sky catastrophe bifurcation and nine homoclinic bifurcations // Dokl. Math. – 2015. – **92**, № 2. – P. 563 – 567.
33. *Leonov G. A.* Necessary and sufficient conditions of the existence of homoclinic trajectories and cascade of bifurcations in Lorenz-like systems: birth of strange attractor and 9 homoclinic bifurcations // Nonlinear Dynam. – 2016. – **84**, № 2. – P. 1055 – 1062.
34. *Ovsyannikov I. I., Turaev D. V.* Analytic proof of the existence of the Lorenz attractor in the extended Lorenz model // Nonlinearity. – 2017. – **30**. – P. 135 – 137.
35. *Leonov G. A., Mokaev R. N.* Homoclinic bifurcations of the merging strange attractors in the Lorenz-like system // Intern. J. Bifur. and Chaos. – 2018.
36. *Ладыженская О. А.* О динамической системе, порожденной уравнениями Навье – Стокса // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – **27**. – С. 91 – 114.
37. *Ильяшенко Ю. С.* Слабо сжимающие системы и аттракторы галеркинских приближений уравнений Навье – Стокса // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, вып. 3. – С. 243 – 244.
38. *Ладыженская О. А.* О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье – Стокса и других уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. – 1987. – **42**, вып. 6. – С. 25 – 60.
39. *Douady A., Oesterle J.* Dimension de Hausdorff des attractors // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. – 1980. – **290**, № 24. – P. 1135 – 1138.
40. *Gantmacher F. R.* The theory of matrices. – New York: AMS Chelsea Publ., 1959. – 660 p.
41. *Boichenko V. A., Leonov G. A., Reitmann V.* Dimension theory for ordinary differential equations. – Wiesbaden: Teubner, 2005. – 441 p.
42. *Boichenko V. A., Leonov G. A.* Lyapunov functions, Lozinskii norms and Hausdorff measure in the qualitative theory of differential equations // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. – 1999. – **193**. – P. 1 – 26.
43. *Leonov G. A.* Hausdorff – Lebesgue dimension of attractors // Intern. J. Bifur. and Chaos. – 2017. – **27**, № 10. – 6 p.
44. *Kaplan J., Yorke J.* Chaotic behavior of multidimensional difference equations // Funct. Different. Equat. and Approxim. Fixed Points / Eds H. Peitgen and H. Walter. – Berlin: Springer, 1979. – P. 204 – 227.
45. *Eden A., Foias C., Temam R.* Local and global Lyapunov exponents // J. Dynam. Different. Equat. – 1991. – **3**, № 1. – P. 133 – 177.
46. *Leonov G. A.* Lyapunov dimension formulas for Henon and Lorenz attractors // St. Petersburg Math. J. – 2002. – **13**. – P. 453 – 464.
47. *Leonov G. A.* Lyapunov functions in the attractors dimension theory // Appl. Math. and Mech. – 2012. – **76**. – P. 129 – 141.
48. *Eden A.* Local estimates for the Hausdorff dimension of an attractor // J. Math. Anal. and Appl. – 1990. – **150**, № 1. – P. 100 – 119.
49. *Doering C., Gibbon J.* On the shape and dimension of the Lorenz attractor // Dyn. and Stability Syst. – 1995. – **10**, № 3. – P. 255 – 268.
50. *Leonov G. A.* Strange attractors and classical stability theory. – St. Petersburg: St. Petersburg Univ. Press, 2008. – 160 p.
51. *Leonov G. A.* Formulas for the Lyapunov dimension of attractors of the generalized Lorenz system // Dokl. Math. – 2013. – **450**, № 1. – P. 13 – 18.
52. *Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Korzhemanova N. A., Kusakin D. V.* Lyapunov dimension formula for the global attractor of the Lorenz system // Communs Nonlinear Sci. and Numer. Simul. – 2016. – **41**. – P. 84 – 103.
53. *Leonov G. A., Pogromsky A. Yu., Starkov D. V.* Dimension formula for the Lorenz attractor // Phys. Lett. A. – 2011. – **375**, № 8. – P. 1179 – 1182.

54. *Leonov G. A.* Lyapunov dimension formulas for Lorenz-like systems // Intern. J. Bifur. and Chaos. – 2016. – **26**. – 7 p.

55. *Леонов Г. А., Полтинникова М. С.* О ляпуновской размерности аттрактора диссипативного отображения Чирикова // Тр. Санкт-Петербург. мат. о-ва. – 2002. – **10**. – С. 186 – 198.

56. *Леонов Г. А., Алексеева Т. А.* Оценки ляпуновской размерности аттракторов обобщенных системРесслера // Вестн. Санкт-Петербург. гос. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2014. – **1(59)**, вып. 4. – С. 544 – 550.

57. *Leonov G. A., Mokaev T. N.* Lyapunov dimension formula for the attractor of the Glukhovsky – Dolzhansky system // Dokl. Math. – 2016. – **93**, № 1. – P. 42 – 45.

Получено 20.11.17