УДК 517.9

І. О. Луковський (Ін-т математики НАН України, Київ)

ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ ОБМЕЖЕНОГО ОБ'ЄМУ РІДИНИ ЗІ ЗМІННИМИ МЕЖАМИ

We study nonlinear boundary-value problems of the hydrodynamic type formulated for the domains whose boundaries are unknown in advance. The investigations are based on the variational formulations of these problems with the help of specially introduced integral functionals with variable domains of integration. It is shown that the required solutions of the boundary-value problems are, in a certain sense, equivalent to finding stationary points of the analyzed functionals. These are pairs formed by the families of domains and the functions defined in these domains. On an example of the problem of space motion of a vessel with elastic walls partially filled with an ideal incompressible liquid, we propose a method for the construction in the analytic form both of the required solutions and of the boundaries of the domains (deformed walls and the shape of the perturbed free surface of the liquid).

Исследуются нелинейные краевые задачи гидродинамического типа, сформулированные для областей с наперед неизвестными границами. В основе исследований находятся вариационные формулировки этих задач на базе специально введенных в рассмотрение интегральных функционалов с переменной областью интегрирования. Показано, что искомые решения краевых задач эквивалентны в некотором смысле нахождению стационарных точек рассматриваемых функционалов. Ими являются пары, состоящие из семейств областей и определенных в них функций. На примере задачи о пространственном движении резервуара с упругими стенками, частично заполненного идеальной несжимаемой жидкостью, предложен метод построения в аналитическом виде как искомых решений, так и границ областей (деформируемых стенок и формы возмущенной свободной поверхности жидкости).

1. Вступ. Серед широкого класу нелінійних проблем математичної фізики особливе місце займає проблема створення методів розв'язування нелінійних крайових задач, в яких поряд із знаходженням шуканих розв'язків необхідно встановити і область їх визначення. Основні труднощі при цьому в багатьох випадках полягають в тому, щоб задовольнити граничні умови задачі, в які шукана функція входить нелінійно, а визначення наперед невідомих меж областей складає головну сутність задачі.

Однією з перших серед усіх задач із невідомою (вільною) межею була задача про визначення фігур рівноваги рідини, що обертається. З часів Ньютона нею займалися багато видатних математиків, серед яких Маклорен (1742 р.), Якобі (1834 р.), Маттісен (1859 р.), Ляпунов (1884 р.), Пуанкаре (1885 р.), Стєклов (1909 р.), Ліхтенштейн (1918 р.) і багато інших.

На сучасному етапі до таких задач зводяться, наприклад, такі практичні проблеми, як визначення силової взаємодії рухомої цистерни і рідини, що її частково заповнює, дослідження на міцність ємностей з екологічно небезпечними рідинами в сейсмічних районах, дослідження об'єктів аерокосмічної і морської техніки, які містять на борту значні маси рідинних вантажів, та інше.

Клас задач із невідомими межами виявився змістовним із математичної точки зору і вже давно привернув до себе увагу багатьох дослідників. Стимулом до цих досліджень були традиційні питання, пов'язані з проблемою розв'язності і пошуком аналітичного апарату для побудови розв'язків нелінійних крайових задач [1].

Досить швидко з'ясувалося, що побудова точних або більш-менш строго математично обґрунтованих розв'язків, як і прагнення глобально охопити всю сукупність розв'язків (через нелінійність математичних моделей єдиність їх розв'язків є швидше винятком, ніж правилом), відносяться до надзвичайно складних математичних проблем.

Разом з тим в останній період намітився значний прогрес у побудові наближених методів дослідження нелінійних крайових задач з вільними межами, в основі яких лежать варіаційні принципи механіки, теорія збурень і чисельне моделювання.

Особливо ефективним у цьому відношенні виявився варіаційний принцип типу Бейтмена–Люка, сформульований у нелінійних задачах теорії плоских поверхневих хвиль в ідеальній рідині нескінченної глибини [2]. Узагальнення цього варіаційного принципу на випадок руху обмеженого об'єму рідини з вільною поверхнею було запропоновано в работах [3, 4]. На цій основі створено ряд прямих методів розв'язування нелінійних крайових задач для областей зі змінними межами, еквівалентних у певному сенсі їх варіаційним формулюванням (див., наприклад, [5–9]).

Найбільш важливим моментом при цьому є те, що всі граничні умови нелінійних задач, включаючи і невідомі межі, є природними граничними умовами в розглядуваних варіаційних проблемах, що дає змогу цими прямими методами знаходити в аналітичному вигляді одночасно наближений розв'язок задачі і змінні межі області.

Саме пара, яка складається із деякої допустимої області і знайденої в ній гармонічної функції, є розв'язком відповідної нелінійної крайової задачі тоді і тільки тоді, коли ця пара є стаціонарною точкою інтегрального функціонала зі змінною областю інтегрування розглядуваної варіаційної задачі. Це один із найважливіших результатів, привнесений характером змінності області інтегрування в теорію варіаційного числення „в цілому", поряд із тим фактом, що динамічна умова на вільній межі області (інтеграл Лагранжа–Коші) є природною для розглядуваної варіаційної проблеми.

Питання про методи відшукання екстремальних точок функціоналів зі змінними областями інтегрування вивчені не достатньо. Особливо це відноситься до задач, сформульованих для тривимірних областей з особливими властивостями фіксованих частин межі. Наведене нижче стосується проблем відшукання в аналітичному вигляді стаціонарних точок інтегральних функціоналів зі змінною областю інтегрування насамперед для нелінійних задач, що становлять практичний інтерес.

2. Нелінійна крайова задача теорії руху рідини в резервуарі з пружними стінками, що здійснює заданий просторовий рух. Нехай резервуар, частково заповнений ідеальною нестисливою рідиною, здійснює поступальний і обертальний рух із заданою поступальною швидкістю $\boldsymbol{v}_0$ і миттєвою кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}(t)$. Позначимо через $Q(t)$ об'єм рідини, обмежений вільною поверхнею $\Sigma(t)$ і пружною стінкою резервуара $S(t)$. Будемо розглядати абсолютну систему координат $O'x'y'z'$ і систему координат $Oxyz$, незмінно зв'язану з резервуаром. Початок рухомої системи координат $Oxyz$ виберемо на незбуреній вільній поверхні Σ_0, а вісь Ox спрямуємо у напрямку, протилежному напрямку вектора прискорення сил тяжіння $\boldsymbol{g}$.

Переміщення, що здійснюється частинками стінок резервуара в результаті їх пружних деформацій, будемо позначати вектором $\boldsymbol{u}(x,y,z,t)$, де t — час, а x, y, z — координати, що визначають положення даної частинки резервуара при недеформованому його стані.

Пружні переміщення $\boldsymbol{u}(x,y,z,t)$ — це відносні переміщення частинок стінок резервуара в рухомій системі координат x, y, z.

Тут ми будемо вважати вектор пружних переміщень $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$ відомою функцією поряд із векторами поступального руху $\boldsymbol{v}_0(t)$ і обертального $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Розглядаючи рух резервуара з рідиною в потенціальному силовому полі, потенціал сил тяжіння записуємо у вигляді

$$U = -\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r}', \tag{2.1}$$

до того ж

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'_0 + \boldsymbol{r}, \tag{2.2}$$

де $\boldsymbol{r}'$ — радіус-вектор точки системи тіло-рідина відносно початку O' абсолютної системи координат, $\boldsymbol{r}'_0$ — радіус-вектор точки O відносно нерухомої точки O', $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор будь-якої точки системи відносно точки O, $\boldsymbol{g}$ — вектор прискорення сил тяжіння.

За своїм змістом розглядувана задача відноситься до першої задачі динаміки системи тіло-рідина і полягає у визначенні руху рідини, викликаного рухом резервуара і його пружними стінками, а також сил взаємодії між резервуаром і рідиною.

З математичної точки зору центральним питанням тут є питання про знаходження поля швидкостей частинок рідини і форми збуреної вільної поверхні зі значними її відхиленнями від рівноважного стану.

Далі будемо припускати, що в початковий момент часу рідина знаходиться або в стані спокою, або в стані безвихрового руху. Для ідеальної нестисливої рідини це означає, що в полі сил земного тяжіння подальший її рух буде безвихровий на основі відомої теореми Лагранжа. Вектор швидкостей частинок рідини при цьому в нерухомій системі координат x', y', z' задовольняє умову

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0. \tag{2.3}$$

Із (2.3) випливає існування скалярної функції Φ, для якої в зайнятій рідиною області Q справджується рівність

$$\boldsymbol{v}_a = \operatorname{grad} \Phi. \tag{2.4}$$

Із умови нестисливості рідини $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$, у відповідності з (2.3) і (2.4), для визначення функції Φ, яку будемо шукати як функцію координат x, y, z і часу t, одержимо рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{2.5}$$

Позначаючи через $\boldsymbol{r}\{x(t), y(t), z(t)\}$ радіус-вектор частинки рідини відносно резервуара (тобто системи координат $Oxyz$), а через $\overset{*}{\boldsymbol{r}}\{\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\}$ її відносну швидкість, на основі теореми про розподіл швидкостей у складному русі механічної системи маємо

$$\boldsymbol{v}_a = \nabla \Phi = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \overset{*}{\boldsymbol{r}}. \tag{2.6}$$

Тут і в подальшому зірочкою позначено вектори, проекції яких на осі зв'язаної з тілом системи координат $Oxyz$ дорівнюють похідним за часом від проекцій на них відповідних векторів [10].

За визначенням величина $\overset{*}{\boldsymbol{r}}$ є вектором швидкості, що зв'язана з частинкою. Для цієї частинки аргументи x, y, z довільної гідродинамічної величини $A(x, y, z, t)$ є функціями часу t, які характеризують рух частинки. На основі правила диференціювання складної функції маємо

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \triangledown A. \tag{2.7}$$

Наприклад, на вільній поверхні рідини, заданої рівнянням

$$\zeta(x, y, z, t) = 0, \tag{2.8}$$

внаслідок того, що $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi$, а вектор $\{\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z\}$ є нормальним до поверхні $\zeta(x, y, z, t)$, на основі (2.8) кінематичну умову на ній можна записати у вигляді

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = -\frac{\zeta_t}{\sqrt{|\triangledown \zeta|^z}} = v_\nu, \tag{2.9}$$

де v_ν — спільна швидкість рідини і вільної поверхні у напрямку зовнішньої нормалі до поверхні.

Нелінійна крайова задача для потенціалу швидкостей $\Phi(x, y, z, t)$, що описує абсолютний рух рідини в рухомій системі координат, формулюється таким чином:

$$\triangledown^2 \Phi = 0, \quad \boldsymbol{r} \in Q(t), \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nu}) + v_\nu, \quad \boldsymbol{r} \in \Sigma(t), \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathrm{r} \times \boldsymbol{\nu}) + \frac{\partial u_\nu}{\partial t}, \quad \boldsymbol{r} \in S(t), \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\triangledown \Phi)^2 - \triangledown \Phi \cdot (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + U = 0, \quad \boldsymbol{r} \in \Sigma(t), \tag{2.13}$$

де $\boldsymbol{\nu}$ — орт зовнішньої нормалі до поверхні області $Q(t)$, $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор точок об'єму рідини $Q(t)$ у зв'язаній системі координат, v_ν — відносна нормальна швидкість частинок вільної поверхні рідини; u_ν — проекція пружного переміщення $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$ на напрям зовнішньої нормалі до поверхні $S(t)$. У випадку резервуара з абсолютно жорсткими стінками $\dfrac{\partial u_\nu}{\partial t} = 0$ [8].

При формулюванні граничних умов крайової задачі (2.10) – (2.12) використано співвідношення (2.6), згідно з яким

$$\operatorname{grad}\Phi \cdot \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\nu} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{v}_r \cdot \boldsymbol{\nu}, \tag{2.14}$$

де $\boldsymbol{v}_r$ — відносна швидкість частинок рідини на пружній стінці резервуара чи на вільній поверхні рідини. Відносна швидкість частинок рідини, що лежать на змочуваній поверхні $S(t)$ резервуара в рухомій системі координат x, y, z, визначається похідною за часом від пружного переміщення цієї частинки $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$, тоді як відносна швидкість $\boldsymbol{v}_r$ частинок вільної поверхні $\Sigma(t)$ визначається з урахуванням формул (2.7), (2.9).

Граничну умову (2.13) одержано з інтеграла Лагранжа – Коші у зв'язаній системі координат

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\triangledown \Phi)^2 - \triangledown \Phi \cdot (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + U + \frac{p}{\rho} = 0, \tag{2.15}$$

де ρ — масова густина рідини, при умові рівності тиску p на вільній поверхні рідини сталій величині p_0, U — потенціал сил тяжіння (2.1).

Зауважимо, що похідна за часом $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$ у (2.15) обчислюється в рухомій системі координат, тобто для точки M, яка незмінно зв'язана з рухомою системою координат і має відносно неї координати $x,\ y,\ z$.

Умова розв'язності крайової задачі (2.10) – (2.13) по відшуканню розв'язку рівняння Лапласа (2.10), нормальна похідна якого набуває на граничній поверхні області $Q(t)$ заданих значень, має вигляд

$$\int\limits_{S(t)+\Sigma(t)} F ds = 0, \tag{2.16}$$

де функція F набуває на $S(t)$ і $\Sigma(t)$ значень у відповідності з (2.11) і (2.12).

3. Варіаційне формулювання деяких нелінійних крайових задач гідродинамічного типу в областях з вільними межами. Нелінійна крайова задача (2.10) – (2.13) щодо визначення потенціалу швидкостей рідини в рухомому резервуарі, частково заповненому ідеальною нестисливою рідиною, відноситься до типових нелінійних крайових задач математичної фізики, сформульованих в областях зі змінними межами. Загальна теорія таких задач і строгі методи їх розв'язування розвинуті недостатньо.

Тут ми розглянемо загальне формулювання варіаційної задачі, еквівалентної в деякому сенсі певному класу нелінійних крайових задач із вільними межами. Ця еквівалентність ґрунтується на тому, що шукані розв'язки є стаціонарними точками деяких функціоналів зі змінною областю інтегрування.

На відміну від випадку, коли область інтегрування є наперед відомою, тут стаціонарні точки визначаються з умови рівності нулю першої варіації функціонала при варіюванні області і заданої на ній функції.

Розглянемо функціонали зі змінною областю інтегрування, які мають вигляд

$$J(\alpha) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{Q(t,\alpha)} F\big(x,y,z,t,\ \Phi(x,y,z,t,\alpha), \Phi_x, \Phi_y, \Phi_z, \Phi_t, \alpha\big)\, dQ\, dt, \tag{3.1}$$

де $Q(t,\alpha)$ — сім'я областей, яка залежить від часу t і деякого параметра α; dQ — елемент об'єму області Q; $x,\ y,\ z$ — декартові координати; $\Phi(x,y,z,t,\alpha)$ — функції, що задаються в змінній області $Q(t,\alpha)$; $\Phi_x,\ \Phi_y,\ \Phi_z,\ \Phi_t$ — частинні похідні від функції Φ. Припустимо, що область Q і функції F та Φ залежать від своїх змінних і параметра α достатньо гладким чином.

На основі відомої формули для варіації функціонала зі змінною областю інтегрування (див., наприклад, [11], розд. IV, § 11) одержимо вираз для першої варіації функціонала (3.1) за параметром α, коли час t не варіюється:

$$\delta J = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Bigg[\int\limits_{Q(t,\alpha)} \left([F]_\phi + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right) \delta\Phi\, dQ + \int\limits_{Q(t,\alpha)} F_{\Phi_t} \delta\Phi_t\, dQ + \int\limits_{\Gamma(t,\alpha)} \big(F_{\Phi_x} \cos(\boldsymbol{\nu}, x) +$$

$$+ F_{\Phi_y} \cos(\boldsymbol{\nu}, y) + F_{\Phi_z} \cos(\boldsymbol{\nu}, z) \big) \delta\Phi\, dS + \int\limits_{\Gamma(t,\alpha)} F(\delta_\alpha \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{\nu})\, dS \Bigg] dt, \tag{3.2}$$

де $[F]_\Phi = F_\Phi - \operatorname{div}(F_{\Phi_x}, F_{\Phi_y}, F_{\Phi_z})$; F_Φ, F_{Φ_x}, F_{Φ_y}, F_{Φ_z} — частинні похідні від функції F за змінними Φ, Φ_x, Φ_y, Φ_z; $\delta_\alpha \boldsymbol{R}$ — варіація радіуса-вектора області Q за параметром α; $\boldsymbol{\nu}$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі $\Gamma(t,\alpha)$ області Q.

Запишемо тепер другий доданок у формулі (3.2) у вигляді

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{Q(t,\alpha)} F_{\Phi_t}\delta\Phi_t\, dQ\, dt = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{Q(t,\alpha)} \left(\left[\frac{\partial}{\partial t}(F_{\Phi_t}\delta\Phi) - \frac{\partial}{\partial t}F_{\Phi_t}\delta\Phi\right] dQ\right) dt$$

і перетворимо його, застосувавши відому формулу для похідної від інтеграла по змінній із часом області $Q(t)$:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{Q(t)} G(x,y,z,t)\, dQ = \int\limits_{Q(t)} \frac{\partial G}{\partial t} dQ + \int\limits_{\Gamma(t)} G v_\nu dS, \tag{3.3}$$

де v_ν — нормальна швидкість межі області $Q(t)$, яку вважаємо позитивною у напрямку зовнішньої нормалі до $\Gamma(t)$. Тоді одержимо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{Q(\alpha,t)} F_{\Phi_t}\delta\Phi_t dQ\, dt =$$

$$= \left(\int\limits_{Q(t,\alpha)} F_{\Phi_t}\delta\Phi dt\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\int\limits_{Q(t,\alpha)} \frac{\partial}{\partial t}F_{\Phi_t}\delta\Phi dQ + \int\limits_{\Gamma(t,\alpha)} F_{\Phi_t} v_\nu \delta\Phi dS\right] dt. \tag{3.4}$$

Підставимо вираз (3.4) в (3.2), зваживши на те, що варіації області $\delta_\alpha \boldsymbol{R}$ і варіації функції $\delta\Phi$ в початковий t_1 і кінцевий t_2 моменти часу дорівнюють нулю.

Перша варіація для функціонала (3.1) остаточно набере вигляду

$$\delta J = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\int\limits_{Q(t,\alpha)} \left([F]_\Phi - \frac{\partial}{\partial t}F_{\Phi_t} + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)\delta\Phi\, dQ + \int\limits_{\Gamma(t,\alpha)} \Big[F_{\Phi_x}\cos(\boldsymbol{\nu},x) + \right.$$

$$\left. + F_{\Phi_y}\cos(\boldsymbol{\nu},y) + F_{\Phi_z}\cos(\boldsymbol{\nu},z) - F_{\Phi_t}v_\nu\Big]\delta\Phi dS + \int\limits_{\Gamma(t,\alpha)} F(\delta_\alpha \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nu})\, dS\right) dt, \tag{3.5}$$

де $(\delta_\alpha \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nu})$ — варіація межі області в напрямку зовнішньої нормалі по параметру α.

Стаціонарною точкою або стаціонарним значенням називатимемо сім'ю областей $Q(t,\alpha)$, які залежать від часу при фіксованому значенні параметра α, і задані в них функції $\Phi(x,y,z,t,\alpha)$ такі, що перша варіація функціонала для них дорівнює нулю при варіюванні цієї сім'ї областей і функцій.

Підставимо в умову стаціонарності $\delta J = 0$ вираз (3.5) для першої варіації. Внаслідок довільності варіації межі області $(\delta\alpha \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nu})$ і варіації функції $\delta\Phi$ із цієї умови одержимо для стаціонарних точок такі рівняння в шуканій області і умови на її межі:

$$F_{\Phi} - \frac{\partial}{\partial x}F_{\Phi_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{\Phi_y} - \frac{\partial}{\partial z}F_{\Phi_z} - \frac{\partial}{\partial t}F_{\Phi_t} = 0, \quad \boldsymbol{r} \in Q(t,\alpha), \tag{3.6}$$

$$F_{\Phi_x}\cos(\boldsymbol{\nu},x) + F_{\Phi_y}\cos(\boldsymbol{\nu},y) + F_{\Phi_z}\cos(\boldsymbol{\nu},z) - F_{\Phi_t}v_\nu = 0, \quad \boldsymbol{r} \in \Gamma(t,\alpha), \tag{3.7}$$

$$F = 0, \quad \boldsymbol{r} \in \Gamma(t,\alpha). \tag{3.8}$$

Крайова задача (3.6) – (3.8) є узагальненням рівнянь Ейлера і природних крайових умов, відомих із класичного варіаційного числення [11].

Подальший розгляд тут ми проведемо для випадку розглянутої в другому пункті задачі про рух ідеальної нестисливої рідини в резервуарі з пружними стінками, що здійснює заданий просторовий рух із лінійною швидкістю $\boldsymbol{v}_0$ і миттєвою кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$. Поверхня $\Gamma(t,\alpha)$ крайової задачі (3.6) – (3.8), у відповідності з крайовою задачею (2.10) – (2.13), — це вільна поверхня рідини $\Sigma(t)$ і пружна стінка резервуара $S(t)$, що здійснює відносні пружні переміщення $\boldsymbol{u}(x,y,z,t)$ в рухомій системі координат $x,\ y,\ z$.

Зауважимо, що функцію $\Phi(x,y,z,t)$ в задачі (2.10) – (2.13) потрібно визначити в деякій наперед невідомій змінній області $Q(t)$, яка також підлягає визначенню. Таким чином, розв'язком задачі (2.10) – (2.13) є пара $[Q(t),\Phi(t)]$, що складається із сім'ї областей $Q(t)$ і визначених в них функцій $\Phi(x,y,z,t)$ таких, щоб виконувались умови (2.10) – (2.13).

Покажемо, що розглядувана нелінійна крайова задача з невідомою областю зводиться до деякої варіаційної задачі для такого функціонала зі змінною областю $Q(t)$:

$$J = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{Q(t)}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\triangledown\Phi)^2 - \triangledown\Phi\cdot(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + U\right]dQ\,dt. \tag{3.9}$$

Цей функціонал визначається на множині пар $\bigl[Q(t),\Phi(x,y,z,t)\bigr]$, першою компонентою яких є сім'я областей $Q(t)$, які змінюються з часом, а другою компонентою — сім'я функцій Φ, що визначаються в тривимірній області $Q(t)$.

Сім'ю областей $Q(t)$ задамо за допомогою достатньо гладких функцій

$$\boldsymbol{R}(x,y,z,t) = \bigl(X(x,y,z,t), Y(x,y,z,t), Z(x,y,z,t)\bigr), \tag{3.10}$$

які перетворюють початкову область $Q_1 = Q(t_1)$ в наступні $Q(t)$, причому $\boldsymbol{R}(x,y,z,t_1) = (x,y,z)$, тобто перетворення (3.10) при $t = t_1$ збігається з тотожним.

Припустимо також, що на змочуваній поверхні пружного резервуара $S(t)$ виконується умова

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\nu}(R) = \frac{\partial u_\nu}{\partial t}, \quad \boldsymbol{r} \in S(t), \tag{3.11}$$

де u_ν — проекція пружного переміщення на напрям зовнішньої нормалі до поверхні $S(t)$.

Для випадку резервуара з абсолютно жорсткими стінками права частина в (3.11) дорівнює нулю.

Позначимо через $\mathfrak{M}$ множину пар $[Q(t),\Phi]$, в яких сім'ї $Q(t)$ задаються відображеннями $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(x,y,z,t)$, для яких виконується умова (3.11). Виділимо із $\mathfrak{M}$ однопараметричну сім'ю пар $\bigl[Q^*(t,\alpha),\Phi^*(x,y,z,t)\bigr]$ таку, що функції $\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{R}^*(x,y,z,t,\alpha)$, які визначають сім'ю $Q^*(t,\alpha)$, будуть гладкими функціями по α. Покладемо

$$\boldsymbol{R}^*(x,y,z,t,0) = \boldsymbol{R}(x,y,z,t), \qquad \Phi^*(x,y,z,t,0) = \Phi(x,y,z,t).$$

Має місце така теорема.

Теорема 3.1. *Стаціонарні точки* $[Q(t), \Phi]$ *функціонала* (3.9) *на многовиді* $\mathfrak{M}$ *є розв'язками крайової задачі* (3.6) – (3.8).

Функціонал (3.9) є функціоналом типу (3.1).

Використовуючи однопараметричну сім'ю взаємно однозначних і неперервно диференційовних перетворень $\boldsymbol{R}^*(x, y, z, t, \alpha)$, які задовольняють умову (3.11) по t і α, і виділяючи сім'ю пар $\left[Q^*(t,\alpha), \Phi^*(x,y,z,t,\alpha)\right]$ із $\mathfrak{M}$, в яких $Q^*(t,\alpha)$ визначаються за допомогою $\boldsymbol{R}^*$, одержуємо із (3.5) вираз для варіації функціонала (3.9) на многовиді $\mathfrak{M}$:

$$\delta I = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Biggl[- \int\limits_{Q(t)} \triangle\Phi\delta\Phi dQ + \int\limits_{\Sigma(t)} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} - \boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nu}) - v_\nu\right)\delta\Phi\, dS +$$
$$+ \int\limits_{S(t)} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} - \boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nu}) - \frac{\partial u_\nu}{\partial t}\right)\delta\Phi\, dS +$$
$$+ \int\limits_{\Sigma(t)} \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\bigtriangledown\Phi)^2 - \bigtriangledown\Phi\cdot(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + U\right](\delta_\alpha \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nu})\, dS\Biggr] dt. \tag{3.12}$$

Із виразу (3.12) для першої варіації функціонала (3.9) на многовиді $\mathfrak{M}$ внаслідок довільності варіації функції $\delta\Phi$ і варіації вільної поверхні $(\delta_\alpha \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nu})$ випливає, що для стаціонарної точки $[Q(t),\Phi]$ виконуються всі умови крайової задачі (2.10) – (2.13).

Згідно з теоремою 3.1 розв'язок крайової задачі (2.10) – (2.13) зводиться до варіаційної проблеми відшукання стаціонарних точок функціонала (3.9) на многовиді $\mathfrak{M}$.

Такого роду еквівалентність у нелінійних задачах динаміки твердих тіл із порожнинами, частково заповненими рідиною, раніше було встановлено у випадку порожнин з абсолютно жорсткими стінками. Це вдалося зробити в розрізі викладеного вище на основі так званого варіаційного принципу Бейтмена – Люка як у випадку нерухомого контейнера, так і у випадку просторового руху абсолютно жорсткого резервуара, частково заповненого рідиною (див., наприклад, [8, 9, 12]).

Велика перевага варіаційних підходів у цьому класі задач пов'язана з тим, що вони, з одного боку, є досить гнучкими з точки зору створення загальних нелінійних математичних моделей, а з іншого — відкривають широкі можливості для застосування прямих методів математичної фізики при побудові в аналітичному вигляді розв'язків суміжних крайових задач, що виникають у нелінійній теорії.

4. Наближений метод визначення руху рідини в резервуарі з пружними стінками, що здійснює заданий просторовий рух. Практична цінність теорії, викладеної в попередньому пункті, полягає у відшуканні на її основі ефективних алгоритмів побудови стаціонарних точок $[Q(t),\Phi]$ функціоналів типу (3.1), що є, як зазначалося у вступі, найбільш складною проблемою розв'язання варіаційних задач для інтегральних функціоналів зі змінною областю інтегрування у просторовій постановці. Наближені методи такого типу прийнято відносити до прямих методів математичної фізики.

Це питання розглянемо тут на основі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського, в якому роль функції Лагранжа відіграє вираз

$$L = \int\limits_{Q(t)} p\, dQ = -\rho \int\limits_{Q(t)} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\bigtriangledown\Phi)^2 - \bigtriangledown\Phi \cdot (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + U \right] dQ. \tag{4.1}$$

Припустимо, що рівняння збуреної вільної поверхні рідини $\zeta(x, y, z, t) = 0$ в системі координат з початком O на незбуреній вільній поверхні Σ_0 можна записати у вигляді

$$\zeta(x, y, z, t) = x - f(y, z, t) = 0. \tag{4.2}$$

Тоді у зв'язаній системі координат відносна нормальна швидкість частинок вільної поверхні $\Sigma(t)$ рідини визначається рівнянням

$$v_\nu = \frac{f_t}{\sqrt{1 + f_y^2 + f_z^2}}. \tag{4.3}$$

У відповідності з варіаційним принципом Гамільтона – Остроградського для дійсних рухів, які є хвильовими рухами рідини з вільною поверхнею в рухомому резервуарі, інтеграл

$$W = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\, dt \tag{4.4}$$

набуває стаціонарного значення, тобто

$$\delta W = \delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0. \tag{4.5}$$

При цьому покладають, що дійсні рухи і всі рухи порівняння починаються одночасно в момент часу t_1 і закінчуються також одночасно в момент t_2.

Початкове і кінцеве положення системи мають бути одними і тими ж для дійсних рухів і рухів порівняння.

Варіаційна задача, до якої приводить принцип Гамільтона – Остроградського, формулюється так: із усіх функцій $\Phi(x, y, z, t)$ і $f(y, z, t)$, неперервних разом із похідними першого порядку за просторовими змінними і часом t, знайти такі, які доставляють інтегралу W стаціонарне значення. Дійсні рухи тут визначаються функціями $\Phi(x, y, z, t)$ і $f(y, z, t)$, а рухи порівняння — функціями $\Phi + \delta\Phi$ і $f + \delta f$, до того ж

$$\begin{gathered} \delta\Phi(x, y, z, t_1) = 0, \qquad \delta\Phi(x, y, z, t_2) = 0, \\ \delta f(y, z, t_1) = 0, \qquad \delta f(y, z, t_2) = 0. \end{gathered} \tag{4.6}$$

При обчисленні першої варіації функціонала W вважатимемо, що для рухів порівняння функції $\Phi(x, y, z, t, \alpha)$ і $f(y, z, t, \alpha)$ довільним чином залежать від параметра α (α достатньо близьке до нуля), а при $\alpha = 0$ маємо дійсний рух $\Phi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z, t, 0)$, $f(y, z, t) = f(y, z, t, 0)$.

Переходячи до обчислення першої варіації (4.5), перетворюємо вираз (4.1) з урахуванням (2.1), (2.2):

$$\rho \int\limits_{Q(t)} U dQ = -\int\limits_{Q(t)} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r'} dQ = m_1 \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r}'_{1C}, \tag{4.7}$$

де $\boldsymbol{r}'_{1C}$ і $\boldsymbol{r}_{1C}$ — радіуси-вектори центра мас об'єму рідини $Q(t)$ відносно точок O' і O, m_1 — маса рідини. Виходячи із (4.1) і (4.7), знаходимо

$$L = -\rho \int\limits_{Q(t)} \left[\Phi_t + \frac{1}{2}(\bigtriangledown\Phi)^2 - \bigtriangledown\Phi \cdot (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\right] dQ + m_1 \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r}'_{1C}. \tag{4.8}$$

Беручи до уваги, що область інтегрування залежить від часу і параметра α, для першої варіації δW одержуємо загальний вираз

$$\delta W = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \left\{ \int\limits_{\Sigma_0} \left[\Phi_t + \frac{1}{2}(\bigtriangledown\Phi)^2 - \bigtriangledown\Phi \cdot (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\right]_{x=f} \delta f dS + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{Q(t)} [\bigtriangledown\Phi \cdot \bigtriangledown(\delta\Phi) + \delta\Phi_t - \bigtriangledown(\delta\Phi) \cdot (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})] dQ \right\} dt +$$

$$+ m_1 \int\limits_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{g} \cdot \delta \boldsymbol{r}'_{1C} dt = 0, \tag{4.9}$$

де

$$\delta\Phi = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \cdot \alpha, \qquad \delta f = \left.\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \cdot \alpha.$$

Інтеграли

$$\int\limits_{Q(t)} \bigtriangledown\Phi \cdot \bigtriangledown(\delta\Phi)\, dQ, \quad \int\limits_{Q(t)} \boldsymbol{v}_0 \cdot \bigtriangledown(\delta\Phi)\, dQ, \quad \int\limits_{Q(t)} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \bigtriangledown(\delta\Phi)\, dQ$$

перетворимо, застосувавши теорему Гріна:

$$\int\limits_{Q(t)} \bigtriangledown\Theta \cdot \nabla\psi dQ = \int\limits_{S(t)+\Sigma(t)} \psi \frac{\partial \Theta}{\partial \nu} dS - \int\limits_{Q(t)} \psi \bigtriangledown^2 \Theta dQ. \tag{4.10}$$

Прийнявши $\bigtriangledown\Theta = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}(\omega_2 z - \omega_3 y) + \boldsymbol{i}_2(\omega_3 x - \omega_1 z) + \boldsymbol{i}_3(\omega_1 y - \omega_2 x)$ і помітивши, що $\boldsymbol{v}_0 = \bigtriangledown(\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{r})$, одержимо

$$\int\limits_{Q(t)} \bigtriangledown\Phi \cdot \bigtriangledown(\delta\Phi)\, dQ = \int\limits_{S(t)+\Sigma(t)} \delta\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} dS - \int\limits_{Q(t)} \delta\Phi \bigtriangledown^2 \Phi\, dQ,$$

$$\int\limits_{Q(t)} \boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla(\delta\Phi)\, dQ = \int\limits_{Q(t)} \bigtriangledown(\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{r}) \cdot \bigtriangledown(\delta\Phi)\, dQ = \int\limits_{S(t)+\Sigma(t)} \delta\Phi \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\nu} dS, \tag{4.11}$$

$$\int\limits_{Q(t)} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \bigtriangledown(\delta\Phi)\, dQ = \int\limits_{S(t)+\Sigma(t)} \delta\Phi (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{\nu} dS.$$

Оскільки час не варіюється, то

$$\int\limits_{Q(t)} \delta\Phi_t \, dQ = \int\limits_{Q(t)} \frac{\partial}{\partial t}(\delta\Phi)\, dQ \tag{4.12}$$

(тут диференціювання за часом проводиться в рухомій системі координат). Застосовуючи до виразу (4.12) формулу (3.3), знаходимо

$$\int\limits_{Q(t)} \frac{\partial}{\partial t}(\delta\Phi)\, dQ = \frac{d}{dt}\int\limits_{Q(t)} (\delta\Phi)\, dQ - \int\limits_{\Sigma(t)} \delta\Phi v_\nu \, ds - \int\limits_{S(t)} \delta\Phi \frac{\partial u_\nu}{dt}\, dS. \tag{4.13}$$

Останній вираз в (4.9) перетворимо з урахуванням формули для віртуального (можливого) переміщення довільної точки M_i розглядуваної механічної системи

$$\delta \boldsymbol{r}_i' = \delta \boldsymbol{r}_0' + \delta\theta \times \boldsymbol{r_i} + \delta_1 \boldsymbol{r_i}, \tag{4.14}$$

де $\delta \boldsymbol{r}_0'$ — віртуальне переміщення полюса O рухомої системи координат $Oxyz$; $\delta\boldsymbol{\theta}$ — вектор нескінченно малого повороту резервуара відносно точки O, δ_1 означає варіацію при фіксованих ортах зв'язаної системи $\boldsymbol{i}_s$. Виходячи із виразу для радіуса-вектора центра мас обмеженого об'єму рідини відносно точки O

$$m_1 \boldsymbol{r}_{1C} = \rho \int\limits_{Q(t)} \boldsymbol{r}\, dQ, \tag{4.15}$$

після нескладних перетворень з урахуванням (4.7), (4.14) одержуємо

$$m_1 \delta_1 \boldsymbol{r}_{1C} = \rho \int\limits_{\Sigma_0} (\boldsymbol{i}_1 f + \boldsymbol{i}_2 y + \boldsymbol{i}_3 z)\delta f \, dS = \rho \int\limits_{\Sigma_0} \boldsymbol{r}|_{x=f} \delta f \, dS. \tag{4.16}$$

При обчисленні варіації $\delta_1 \boldsymbol{r}_{1C}$ було взято до уваги, що змочувана поверхня резервуара здійснює наперед задані переміщення $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$. Таким чином, останній доданок, що фігурує в (4.9), набирає вигляду

$$m_1 \int\limits_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{g} \cdot \delta \boldsymbol{r}_{1C}' dt =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[m_1 \boldsymbol{g} \cdot \delta \boldsymbol{r}_0' + (m_1 \boldsymbol{r}_{1C} \times \boldsymbol{g}) \cdot \delta\boldsymbol{\theta} + \rho \int\limits_{\Sigma_0} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r}|_{x=f} \delta f dS \right] dt. \tag{4.17}$$

Оскільки рух резервуара вважається відомим, то $\delta \boldsymbol{r}_0'$ і $\delta\boldsymbol{\theta}$ дорівнюють нулю, а отже, із (4.17) отримуємо

$$m_1 \int\limits_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{g} \cdot \delta \boldsymbol{r}_C' dt = \rho \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Sigma_0} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r}|_{x=f}\, \delta f \, dS \, dt. \tag{4.18}$$

У підсумку для першої варіації інтеграла (4.4) з урахуванням (4.11), (4.13), (4.18) із (4.9) одержуємо

$$\delta W = \rho \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{\Sigma_0} \left[\Phi_t + \frac{1}{2}(\bigtriangledown\Phi)^2 - \bigtriangledown\Phi(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} - \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}) \right]_{x=f} \delta f dS + \right.$$
$$+ \int_{S(t)} \left[\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} - \boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{\nu} - (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{\partial u_\nu}{\partial t} \right] \delta\Phi dS +$$
$$+ \int_{\Sigma_0} \left(\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} - \boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{\nu} - (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\nu} - v_\nu \right] \delta\Phi \right)_{x=f} dS -$$
$$\left. - \int_{Q(t)} \nabla^2\Phi\delta\Phi dQ + \frac{d}{dt}\int_{Q(t)} \delta\Phi dQ \right\} dt = 0. \tag{4.19}$$

Останній доданок в цьому рівнянні дорівнює нулю у відповідності з умовами (4.6). Внаслідок незалежності варіацій δf і $\delta\Phi$ із (4.19) випливає крайова задача (2.10) – (2.13). Зауважимо, що нелінійні крайові умови задачі (2.10) – (2.13) випливають безпосередньо з умови екстремуму функціонала (4.4), тобто є природними крайовими умовами. Саме ця обставина є визначальною при використанні функціонала (4.4) або варіаційного рівняння (4.19) при побудові ефективних наближених методів розв'язування крайової задачі (2.10) – (2.13).

Зупинимося на одному із варіантів прямого методу розв'язування розглядуваної крайової задачі, припустивши, що швидкість поступального руху $\boldsymbol{v}_0(t)$ і миттєва кутова швидкість $\boldsymbol{\omega}(t)$ є відомими функціями часу. Кінематичні умови крайової задачі дозволяють записати потенціал швидкостей $\Phi(x,y,z,t)$ у вигляді

$$\Phi(x,y,z,t) = \boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Omega} + \varphi, \tag{4.20}$$

де $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ і $\boldsymbol{\Omega}(x,y,z)$ — гармонічні вектори, тобто вектори, проекції яких $V_1,\ V_2,\ V_3$ і $\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3$ на осі $Oxyz$ є гармонічними функціями, що задовольняють крайові умови

$$\left.\frac{\partial V_1}{\partial\nu}\right|_{S(t)+\Sigma(t)} = \nu_1, \qquad \left.\frac{\partial V_2}{\partial\nu}\right|_{S(t)+\Sigma(t)} = \nu_2, \qquad \left.\frac{\partial V_3}{\partial\nu}\right|_{S(t)+\Sigma(t)} = \nu_3, \tag{4.21}$$

$$\left.\frac{\partial\Omega_1}{\partial\nu}\right|_{S(t)+\Sigma(t)} = y\nu_3 - z\nu_2, \qquad \left.\frac{\partial\Omega_2}{\partial\nu}\right|_{S(t)+\Sigma(t)} = z\nu_1 - x\nu_3,$$
$$\left.\frac{\partial\Omega_3}{\partial\nu}\right|_{S(t)+\Sigma(t)} = x\nu_2 - y\nu_1. \tag{4.22}$$

Тут $\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3$ — проекції орта $\boldsymbol{\nu}$ на осі системи $Oxyz$. Гармонічна функція $\varphi(x,y,z,t)$, яка входить у вираз (4.20), задовольняє крайові умови

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|_{\Sigma_0} = \frac{1}{N}\frac{\partial f}{\partial t}, \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|_{S_0} = \frac{\partial u_\nu}{\partial t}, \qquad N = \sqrt{1 + f_y^2 + f_z^2} \tag{4.23}$$

і описує хвильові рухи рідини в нерухомому резервуарі.

Потенціал $\varphi(x,y,z,t)$ доцільно записати у вигляді

$$\varphi(x,y,z,t)=\varphi_1(x,y,z,t)+\varphi_2(x,y,z,t), \tag{4.24}$$

де φ_1 і φ_2 — розв'язки крайових задач

$$\nabla^2\varphi_1=0,\qquad \boldsymbol{r}\in Q(t),\qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial\nu}\bigg|_{\Sigma_0}=\frac{1}{N}\frac{\partial f}{\partial t},\qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial\nu}\bigg|_{S_0}=0, \tag{4.25}$$

$$\nabla^2\varphi_2=0,\qquad \boldsymbol{r}\in Q(t),\qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial\nu}\bigg|_{\Sigma_0}=0,\qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial\nu}\bigg|_{S_0}=\frac{\partial u_\nu}{\partial t}. \tag{4.26}$$

При цьому крайова задача (4.25) описує хвильові рухи рідини в резервуарі з недеформованими стінками.

Потенціал швидкостей рідини $\varphi_2(x,y,z,t)$ виникає за рахунок пружних коливань стінок резервуара, обумовлених пружними переміщеннями $\boldsymbol{u}(x,y,z,t)$. Ці переміщення тут трактуються на основі лінійних рівнянь теорії пружності, при побудові яких розглядається дія поверхневих сил на недеформовану поверхню пружного тіла S_0.

Розв'язки крайових задач (4.21), (4.22), (4.25), (4.26) повинні задовольняти умови розв'язності задач Неймана для рівнянь Лапласа, а в деяких випадках — і інші додаткові умови, які не суперечать умові збереження об'єму нестисливої ідеальної рідини.

Розв'язки крайових задач (4.21) з точністю до довільної функції часу мають вигляд

$$V_1=x,\qquad V_2=y,\qquad V_3=z, \tag{4.27}$$

так що $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{r}$. Оскільки ν_i на межі області $Q(t)$ залежать від часу, функція $\boldsymbol{V}$ також залежить від часу; час входить у $\boldsymbol{V}$ через просторові змінні. Це саме стосується і гармонічного вектора $\boldsymbol{\Omega}$.

Розв'язки крайових задач (4.22) єдині при умові

$$\int\limits_{S(t)+\Sigma(t)}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\nu}dS=0,$$

в чому можна пересвідчитись, застосувавши формулу Гаусса – Остроградського для перетворення поверхневого інтеграла в об'ємний:

$$\int\limits_{S(t)+\Sigma(t)}F\nu_1\,dS=\int\limits_{Q(t)}\frac{\partial F}{\partial x}\,dQ,\qquad \int\limits_{S(t)+\Sigma(t)}F\nu_2\,dS=\int\limits_{Q(t)}\frac{\partial F}{\partial y}\,dQ,$$
$$\int\limits_{S(t)+\Sigma(t)}F\nu_3\,dS=\int\limits_{Q(t)}\frac{\partial F}{\partial z}\,dQ. \tag{4.28}$$

Тут F — неперервна функція разом із частинними похідними в області $Q(t)$ і на її межі.

Наприклад, для функції Ω_1 маємо

$$\int\limits_{S(t)+\Sigma(t)}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\nu}\,dS=\int\limits_{S(t)+\Sigma(t)}(y\nu_3-z\nu_2)\,dS=\int\limits_{Q(t)}\left(\frac{\partial y}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)dQ\equiv 0. \tag{4.29}$$

При розв'язуванні крайової задачі (4.25) будемо вимагати, щоб функція $f(y, z, t)$, яка описує форму вільної поверхні і також підлягає визначенню, задовольняла умову

$$\int\limits_{\Sigma(t)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}\, dS = \int\limits_{\Sigma(t)} \frac{f_t}{N}\, dS = 0. \tag{4.30}$$

Для складової потенціалу швидкостей рідини $\varphi_2(x, y, z, t)$, яка викликана пружними переміщеннями стінок резервуара в лінійній інтерпретації проблеми, внаслідок мализни переміщень будемо вимагати виконання умови розв'язності крайової задачі Неймана (4.26) у вигляді

$$\int\limits_{S_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \nu}\, dS = \int\limits_{S_0} \frac{\partial u_\nu}{\partial t}\, dS = 0. \tag{4.31}$$

Із зображення потенціалу швидкостей рідини у вигляді (4.20) для вектора абсолютної швидкості частинок рідини з урахуванням (4.24) знаходимо

$$\boldsymbol{v}_a = \nabla \Phi = \boldsymbol{v}_0 + \nabla(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \nabla \varphi_1 + \nabla \varphi_2. \tag{4.32}$$

Порівнюючи цей вираз із формулою (2.6) розподілу швидкостей у складному русі механічної системи, маємо

$$\overset{*}{\boldsymbol{r}} = \nabla(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \nabla \varphi_1 + \nabla \varphi_2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}). \tag{4.33}$$

Таким чином, у випадку заданого руху резервуара з пружними стінками рух рідини можна вважати відомим, якщо знайдено розв'язки крайових задач Неймана для складових потенціалу швидкостей Ω_i, φ_1 і φ_2.

Наближений розв'язок нелінійної крайової задачі (2.10)–(2.13) будемо шукати у формі (4.20), виходячи з еквівалентної їй варіаційної проблеми, тобто із проблеми знаходження екстремальних значень функціонала (4.4). Для цього функцію $f(y, z, t)$ запишемо у вигляді розвинення

$$f(y, z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) f_i(y, z), \tag{4.34}$$

де $f_i(y, z)$ — повна ортогональна разом зі сталою система функцій, задана на незбуреній вільній поверхні рідини Σ_0, а $\beta_i(t)$ — узагальнені коефіцієнти Фур'є, які залежать від часу, як від параметра, і відіграють у подальшому роль узагальнених координат, що характеризують відхилення вільної поверхні від положення рівноваги:

$$\beta_i(t) = \int\limits_{\Sigma_0} f(y, z, t) f_i(y, z)\, dS. \tag{4.35}$$

В аналогічному вигляді запишемо також і вектор пружного переміщення стінок резервуара $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$:

$$\boldsymbol{u}(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{q}_k(t) \varphi_k^*(x, y, z), \tag{4.36}$$

де $\varphi_k^*(x,y,z)$ — повна система функцій, задана на недеформованій поверхні резервуара S_0 і породжена введеною раніше автором задачею на власні значення з параметром у граничній умові [13, 14]:

$$\nabla^2\varphi^* = 0, \quad \boldsymbol{r} \in Q,$$
$$\left.\frac{\partial\varphi^*}{\partial\nu}\right|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\varphi^*}{\partial\nu}\right|_{S_0} = \kappa^*\varphi^*. \tag{4.37}$$

Крайова задача на власні значення (4.37) поряд з аналогічною задачею

$$\nabla^2\varphi = 0, \quad \boldsymbol{r} \in Q,$$
$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|_{\Sigma_0} = \kappa\varphi, \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|_{S_0} = 0, \tag{4.38}$$

яка природно виникає в задачі про гравітаційні хвилі в обмеженому об'ємі рідини з вільною поверхнею, відноситься до базових задач лінійної і нелінійної теорії модальних методів.

Варіаційним методом встановлено дискретність спектра та повноту систем власних функцій задач (4.37), (4.38) у роботах [14, 15]. Широке застосування варіаційний метод знайшов також і при створенні наближених методів розв'язування цих спектральних задач.

Вважаючи, що розв'язки спектральних задач (4.37) і (4.38) відомі, складові потенціалу швидкостей $\varphi_1(x,y,z,t)$ і $\varphi_2(x,y,z,t)$ можна конструктивно записати у вигляді

$$\varphi_1(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(t)\varphi_n(x,y,z),$$
$$\varphi_2(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t)\varphi_k^*(x,y,z),$$

де $\varphi_n(x,y,z)$ і $\varphi_k^*(x,y,z)$ — системи гармонічних функцій, що задовольняють на незбурених поверхнях S_0 і Σ_0 граничні умови $\left.\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial\nu}\right|_{S_0} = 0$ і $\left.\dfrac{\partial\varphi_k^*}{\partial\nu}\right|_{\Sigma_0} = 0$, а $R_n(t)$ і $Q_k(t)$ — параметри, які характеризують зміну потенціалів φ_1 і φ_2 за часом.

Введення до розгляду узагальнених координат $\boldsymbol{q}_k(t)$ за принципом

$$\boldsymbol{q}_k(t) = \int\limits_{S_0} \boldsymbol{u}(x,y,z,t) f_k^*(x,y,z)\,dS,$$

де $f_k^* = \kappa^*\varphi^*(x,y,z)$, $\boldsymbol{r} \in S_0$, дозволяє описати рух розглядуваної деформівної механічної системи на мові нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, виходячи із варіаційного рівняння (4.19) або безпосередньо із (4.5), попередньо надавши функції Лагранжа вигляду функції від узагальнених координат $\beta_i(t)$ і $\boldsymbol{q}_k(t)$. Врахування пружності стінок резервуара істотно ускладнює методи дослідження задач динаміки резервуарів, заповнених рідиною, в порівнянні з дослідженням аналогічної задачі у випадку абсолютно жорстких стінок резервуара [8]. Розмірність математичних моделей у розглядуваному випадку значно збільшується через наявність додаткових ступенів вільності. Змінність у часі положення центра мас системи обумовлена тепер узагальненими координатами $\beta_i(t)$, пов'язаними з нелінійними гравітаційними хвилями на вільній поверхні рідини, і узагальненими координатами $\boldsymbol{q}_k(t)$, які характеризують пружні деформації корпусу резервуара.

Це дає змогу формулювати та розв'язувати більш широке коло задач аналітичної механіки. Зокрема, відкривається перспектива в нелінійній постановці більш ґрунтовно розглянути другу задачу динаміки оболонок, частково заповнених рідиною.

Постановка цієї задачі передбачає визначення як руху пружної оболонки, так і руху рідини в середині оболонки, а також сил взаємодії між оболонкою і рідиною за заданими зовнішніми прикладеними до оболонки силами.

Дослідження коливань пружної оболонки, частково заповненої рідиною, можна проводити без додаткових обмежень на мализну коливань вільної поверхні рідини, які часто виключають із поля зору ряд важливих фізичних процесів [16, 17].

Література

1. *Данилюк И. И.* Об интегральных функционалах с переменной областью интегрирования // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1972. – **118**. – 112 с.
2. *Luke J. G.* A variational principle for a fluid with a free surface // J. Fluid Mech. – 1967. – **27**. – P. 395 – 397.
3. *Луковский И. А.* Вариационный метод в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью // Колебания упругих конструкций с жидкостью. – М.: Волна, 1976. – С. 260 – 265.
4. *Miles J. W.* Nonlinear surface waves in closed basins // J. Fluid Mech. – 1976. – **75**, Pt. 3. – P. 419 – 448.
5. *Луковский И. А.* Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. – Киев: Наук. думка, 1990. – 296 с.
6. *Луковский И. А., Тимоха А. Н.* Вариационные методы в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 399 с.
7. *Faltinsen O. M., Timokha A. N.* Sloshing. – Cambridge Univ. Press, 2009. – 557 p.
8. *Луковский И. А.* Математические модели нелинейной динамики тел с жидкостью. – Киев: Наук. думка, 2010. – 407 с.
9. *Lukovsky I. A.* Nonlinear dynamics. Mathematical models for rigid bodies with a liquid. – De Gruyter, 2015. – 393 p.
10. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
11. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. – М.; Л.: Гостехиздат, 1951. – Т. 1. – 476 с.
12. *Луковский И. А., Комаренко А. Н.* Вариационная формулировка некоторых нелинейных краевых задач математической физики в областях со свободными границами // Асимптотические методы математической физики: Сб. науч. тр. – Киев: Наук. думка, 1988. – С. 144 – 150.
13. *Луковский И. А.* Применение метода разложения по собственным функциям к решению краевых задач теории возмущенного движения твердого тела с жидкостью // Труды 1-й республ. мат. конф. молодых исследов. – Киев: Наук. думка, 1965.
14. *Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. – Киев: Наук. думка, 1969. – 250 с.
15. *Комаренко А. Н., Луковский И. А., Фещенко С. Ф.* К задаче о собственных значениях с параметром в краевых условиях // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 6. – С. 22 – 30.
16. *Брусиловский А. Д., Шмаков В. П., Яблуков В. А.* Метод расчета собственных и вынужденных колебаний упругих оболочек вращения, заполненных идеальной несжимаемой жидкостью // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 3. – С. 99 – 110.
17. *Троценко В. А., Троценко Ю. В.* Неосесимметричные колебания оболочки вращения, частично заполненной жидкостью // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 3. – С. 394 – 412.

Одержано 07.11.17