УДК 517.9

А. В. Дворник (Ін-т математики НАН України, Київ),
О. О. Струк (Терноп. нац. пед. ун-т ім. В. Гнатюка),
В. І. Ткаченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ЛОТКИ – ВОЛЬТЕРРА З ДИФУЗІЄЮ ТА ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

We establish sufficient conditions for the existence and asymptotic stability of positive piecewise continuous almost periodic solutions for the Lotka – Volterra systems of differential equations with diffusion and impulsive action.

Получены условия существования и асимптотической устойчивости строго положительных кусочно-непрерывных почти периодических решений систем дифференциальных уравнений Лотки – Вольтерра с диффузией и импульсным воздействием.

1. Вступ. Розглянемо систему диференціальних рівнянь Лотки – Вольтерра з дифузією

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mu_1 \Delta u(t,x) + u(t,x)\big(a_1(t,x) - b_1(t,x)u(t,x) - c_1(t,x)v(t,x)\big), \tag{1}$$

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \mu_2 \Delta v(t,x) + v(t,x)\big(a_2(t,x) - b_2(t,x)u(t,x) - c_2(t,x)v(t,x)\big), \tag{2}$$

$x \in \Omega,\ t \neq \tau_k$, імпульсною дією вигляду

$$u(\tau_k + 0, x) - u(\tau_k, x) = d_{1k} u(\tau_k, x) + q_{1k}, \tag{3}$$

$$v(\tau_k + 0, x) - v(\tau_k, x) = d_{2k} v(\tau_k, x) + q_{2k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

та крайовими умовами Неймана

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v(t,x)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5}$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з гладкою межею $\partial\Omega$, $\bar\Omega = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial/\partial n$ — похідна вздовж зовнішньої нормалі, $\Delta u = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2 u/\partial x_n^2$. Імпульсна дія відбувається в моменти часу $t = \tau_k$, які рівномірно відділені один від одного.

Система (1) – (5) описує взаємодію двох біологічних видів, які нерівномірно розподілені у просторі та зазнають короткочасного зовнішнього впливу в моменти часу τ_k. Функції $u(t,x)$ та $v(t,x)$ визначають щільність двох біологічних видів у момент часу t і просторовій точці x. Виходячи з біологічної інтерпретації, вважаємо функції невід'ємними. Додатні сталі μ_1 та μ_2 є коефіцієнтами дифузії відповідно першого і другого виду. Логістичні вирази $u(a_1 - b_1 u)$ та $v(a_2 - c_2 v)$ характеризують відтворення першого і другого видів. Члени $c_1 v$ та $b_2 u$ показують гальмівний вплив виду v на вид u і виду u на вид v відповідно. Дослідження імпульсних систем із дифузією, які описують еволюцію біологічних видів, привертає останнім часом велику увагу багатьох авторів (див., наприклад, [1 – 5]).

У цій роботі ми дослідимо умови існування строго додатного кусково-неперервного майже періодичного розв'язку системи (1) – (5). Будемо використовувати концепцію майже періодичних функцій у сенсі робіт [6, 7]. Ці кусково-неперервні функції мають розриви першого роду по t в точках імпульсної дії $t = \tau_k$. Такі майже періодичні розв'язки активно вивчаються для різних класів систем із імпульсною дією (див. [8 – 15]).

Спочатку ми доведемо обмеженість розв'язків системи (1)–(5) і вкажемо умови довготривалого виживання кожного з видів у термінах перманентності — коли кількість індивідів кожного виду стабілізується в деякій обмеженій області, відділеній від нуля. Точніше, система називається перманентною, якщо існують додатні сталі m_0 і M_0 такі, що для кожного розв'язку системи з невід'ємними початковими функціями $u_0(x) \not\equiv 0,\ v_0(x) \not\equiv 0$ існує таке $t_0 = t_0(u_0, v_0)$, що

$$m_0 \le u(t,x) \le M_0, \qquad m_0 \le v(t,x) \le M_0$$

для $x \in \bar{\Omega},\ t \ge t_0$. Далі ми отримаємо умови рівномірної асимптотичної стійкості розв'язків з області перманентності в нормах просторів $L^p(\Omega)$ інтегровних функцій, означених у області Ω, і нормах інтерполяційних просторів X^α, побудованих для оператора Лапласа Δ і крайових умов (5). Використання інтерполяційних просторів X^α дозволяє розглядати розв'язки у сильному і класичному сенсі.

За умови рівномірної асимптотичної стійкості на підставі ідей робіт [16–18] доводиться існування в області перманентності асимптотично стійкого кусково-неперервного майже періодичного розв'язку.

2. Основні означення та попередні результати. Для обмеженої функції $g(t,x)$ позначимо

$$g^L = \inf_{t,x} g(t,x), \qquad g^M = \sup_{t,x} g(t,x).$$

Позначимо через $\|.\|_C$ норму простору $C(\bar{\Omega})$ неперервних функцій на $\bar{\Omega}$.

Нехай $(X, \|.\|_X)$ — банахів простір із нормою $\|.\|_X$, $\mathbb{R}$ та $\mathbb{Z}$ — множини дійсних та цілих чисел відповідно. Позначимо через $\|.\|$ норму в $\mathbb{R}^n$ чи відповідну норму у просторі матриць. Будемо розглядати простір $\mathcal{PC}(J, X)$, $J \subset \mathbb{R}$, усіх обмежених кусково-неперервних функцій $x : J \to X$ таких, що:

i) множина $\{\tau_j \in J : \tau_{j+1} > \tau_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ моментів розривів x не має скінченних граничних точок;

ii) $x(t)$ є неперервною зліва: $x(\tau_j - 0) = x(\tau_j)$ та існує $\lim_{t\to\tau_j+0} x(t) = x(\tau_j + 0)$.

Означення 1. *Ціле число p називається ε-майже періодом послідовності $\{x_k\}$, $x_k \in X$, якщо $\|x_{k+p} - x_k\|_X < \varepsilon$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Послідовність $\{x_k\}$ називається майже періодичною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина її ε-майже періодів.*

Множина $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ відносно щільна, якщо існує додатне число l таке, що кожний відрізок дійсної осі довжини l містить принаймні одне число, яке належить $\mathcal{A}$.

Означення 2. *Строго зростаюча послідовність $\{\tau_k\}$ дійсних чисел має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина ε-майже періодів, спільних для всіх послідовностей $\{\tau_k^j\}$, де $\tau_k^j = \tau_{k+j} - \tau_k$, $j \in \mathbb{Z}$.*

Як показано у [19], послідовність $\{\tau_k\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць тоді і тільки тоді, коли $\tau_k = ak + c_k$, де $\{c_k\}$ — майже періодична послідовність, a — додатне число.

Означення 3. *Функція $\varphi \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}, X)$ називається w-майже періодичною, якщо*:

i) *строго зростаюча послідовність $\{\tau_k\}$ моментів розриву функції $\varphi(t)$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць*;

ii) *для довільного $\varepsilon > 0$ існує додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що якщо точки t' і t'' належать одному інтервалу неперервності і $|t' - t''| < \delta$, то $\left\|\varphi(t') - \varphi(t'')\right\|_X < \varepsilon$;*

iii) *для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина Γ ε-майже періодів таких, що якщо $\tau \in \Gamma$, то $\big\|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)\big\|_X < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, які задовольняють умову $|t - \tau_k| > \varepsilon$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Нагадаємо, що неперервна функція $\psi\colon \mathbb{R} \to X$ майже періодична за Бором, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина Γ ε-майже періодів таких, що якщо $\tau \in \Gamma$, то $\big\|\psi(t+\tau) - \psi(t)\big\|_X < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Означення 4. *Кусково-неперервна функція $\varphi_1(t) \in \mathcal{PC}(J,X)$ знаходиться в ε-околі функції $\varphi_2(t) \in \mathcal{PC}(J,X)$, якщо $\big\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\big\|_X < \varepsilon$ для всіх $t \in J$ таких, що $|t - \tau_i^1| > \varepsilon$, $|t - \tau_i^2| > \varepsilon$ та $|\tau_i^1 - \tau_i^2| < \varepsilon$, $i \in \mathbb{Z}$, де $\{\tau_i^1\}$ та $\{\tau_i^2\}$ — послідовності розривів функцій $\varphi_1(t)$ і $\varphi_2(t)$ відповідно. У цьому випадку будемо писати $\rho(\varphi_1, \varphi_2) < \varepsilon$, $t \in J$.*

Послідовність $\{f_k(t)\}$ функцій $f_k \in \mathcal{PC}(J,X)$, $J \subset \mathbb{R}$, збігається у w-топології до функції $f \in \mathcal{PC}(J,X)$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що $\big\|f_k(t) - f(t)\big\|_X < \varepsilon$ для всіх $k \geq N$, $|t - \tau_i| > \varepsilon$ (τ_i — точки розривів функції f на множині J) і точки розривів функцій $f_k(t)$, які лежать у J, збігаються до точок τ_i рівномірно відносно i.

Наведемо лему з [10], яка є узагальненням леми 7 з [6, с. 288].

Лема 1. *Нехай строго зростаюча послідовність дійсних чисел $\{\tau_j\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, послідовність $\{B_j\}$, $B_j \in X$, є майже періодичною, а функція $\varphi(t)\colon \mathbb{R} \to X$ — w-майже періодичною. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $l = l(\varepsilon) > 0$, що для довільного інтервалу J довжини l існують такі $r \in J$ і ціле $q \in J$, що виконуються нерівності*

$$|\tau_{i+q} - \tau_i - r| < \varepsilon, \qquad \|B_{i+q} - B_i\|_X < \varepsilon, \quad i \in \mathbb{Z},$$

і

$$\big\|\varphi(t+r) - \varphi(t)\big\|_X < \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad |t - \tau_j| > \varepsilon, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

За лемою 22 [7, с. 192] для послідовності $\{\tau_j\}$ з рівномірно майже періодичними послідовностями різниць існує границя

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\mathrm{i}(t, t+T)}{T} = p$$

рівномірно відносно $t \in \mathbb{R}$, де $\mathrm{i}(s,t)$ — число точок τ_k з інтервалу (s,t).

Будемо використовувати також лему про узагальнену нерівність Гроноулла [20, 21].

Лема 2. *Нехай $0 \leq \alpha < 1$, $M_1 \geq 0$, $M_2 > 0$, $0 < Q < \infty$ і локально інтегровна на $0 \leq t \leq Q$ невід'ємна функція $y(t)$ задовольняє на цьому інтервалі нерівність*

$$y(t) \leq M_1 + M_2 \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha} y(s)\, ds.$$

Тоді існує додатна стала $\tilde{C} = \tilde{C}(\alpha, M_2, Q) \in (1, \infty)$ така, що

$$y(t) \leq M_1 \tilde{C}(\alpha, M_2, Q).$$

Будемо розглядати систему (1) – (5) з такими умовами:

$(\mathbf{H_1})$ додатнозначні обмежені функції $a_i(t,x)$, $b_i(t,x)$ та $c_i(t,x)$, $i = 1, 2$, неперервно диференційовні по $t \in \mathbb{R}$ і $x \in \Omega$ та майже періодичні за Бором по t;

$(\mathbf{H_2})$ послідовність дійсних чисел $\{\tau_j\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, і $\Theta \geq \tau_{j+1} - \tau_j \geq \theta > 0$, $j \in \mathbb{Z}$, з деякими сталими Θ та θ;

($\mathbf{H_3}$) виконуються нерівності $d_{ik} > -1,\ q_{ik} \geq 0,\ i = 1, 2,\ k \in \mathbb{Z}$, і послідовності дійсних чисел $\{d_{1k}\},\ \{d_{2k}\},\ \{q_{1k}\},\ \{q_{2k}\}$ майже періодичні.

Позначимо $d = \sup_{ik} d_{ik},\ q = \sup_{ik} q_{ik}$.

Означення 5. *Вектор-функція* $(u(t,x), v(t,x))$ *є класичним розв'язком системи без імпульсів* (1), (2), (5), *якщо вона двічі неперервно диференційовна по* $x \in \Omega$, *неперервно диференційовна по* $x \in \bar{\Omega}$, *неперервно диференційовна по* $t > 0$ *і задовольняє цю систему.*

Вектор-функція $(u, v)\colon\ \Omega \times [t_0, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^2$, *де* $\alpha > 0$, *є розв'язком початкової задачі*

$$u(t_0, x) = u_0(x), \qquad v(t_0, x) = v_0(x) \tag{6}$$

імпульсної системи (1) – (5), *якщо функція* (u, v) *є класичним розв'язком системи без імпульсів* (1), (2), (5) *при* $t \neq \tau_j$, *задовольняє умови* (3), (4) *при* $t = \tau_j$ *і виконується умова* (6).

3. Перманентність і асимптотична стійкість. У подальшому нам буде потрібний такий допоміжний результат [1]. Розглянемо логістичне рівняння без запізнення та з імпульсною дією у фіксовані моменти

$$\dot{z} = z(a - bz), \quad t \neq t_k, \tag{7}$$

$$z(t_k + 0) - z(t_k) = dz(t_k) + q, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

де $z \geq 0$, a і b — додатні сталі, $d > -1$, $q \geq 0$, строго зростаюча послідовність $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ задовольняє умову $t_{k+1} - t_k \geq \theta > 0$.

Лема 3. *Усі розв'язки* $z(t),\ z(0) = z_0 > 0$ *рівняння* (7), (8) *задовольняють оцінки*

$$0 < z(t) \leq \max\{A, A(1 + d) + q\}, \qquad A = \frac{a}{b(1 - e^{-a\theta})}$$

для $t \geq 2\theta$.

Також будемо використовувати теорему порівняння з [22].

Теорема 1. *Нехай* T *і* ν — *додатні числа, а функція* $u(t,x)$ *неперервна на* $[0, T] \times \bar{\Omega}$, *неперервно диференційовна по* $x \in \bar{\Omega}$, *з неперервними похідними* $\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$ *та* $\partial u/\partial t$ *на* $(0, T] \times \Omega$ *і задовольняє нерівності*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + c(t,x)u \geq 0, \quad (t,x) \in (0, T] \times \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \quad (t,x) \in (0, T] \times \partial\Omega,$$

$$u(0, x) \geq 0, \quad x \in \Omega,$$

де функція $c(t,x)$ *обмежена на* $(0, T] \times \Omega$.

Тоді $u(t,x) \geq 0$ *на* $(0, T] \times \bar{\Omega}$. *Крім того,* $u(t,x)$ *строго додатна на* $(0, T] \times \bar{\Omega}$, *якщо* $u(0, x)$ *не рівна тотожно нулю.*

Лема 4. *Для кожного розв'язку системи* (1) – (5) *з невід'ємними початковими функціями* $(u_0(x), v_0(x))$ *існує* $\bar{t} = \bar{t}(u_0, v_0)$ *таке, що*

$$u(t,x) \leq M_0, \qquad v(t,x) \leq M_0, \qquad x \in \bar{\Omega}, \quad t \geq \bar{t},$$

де

$$M_0 = \max\{A, A(1 + d) + q\}, \qquad A = \frac{a^M}{b^L(1 - e^{-a^M\theta})},$$

$a^M = \max\big(a_1^M, a_2^M\big),\ b^L = \min\big(b_1^L, c_2^L\big)$.

Доведення. Нехай $\bar{u}(t, x, u_0)$ — розв'язок рівняння

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \mu_1 \Delta \bar{u} - \bar{u}(a^M - b^L \bar{u}) = 0. \tag{9}$$

Використовуючи нерівність

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u\left(a_1(t,x) - b_1(t,x)u - c_1(t,x)v\right) \geq$$

$$\geq \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u(a_1^M - b_1^L u) \geq \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u(a^M - b^L u),$$

отримуємо

$$0 = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \mu_1 \Delta \bar{u} - \bar{u}(a^M - b^L \bar{u}) \geq \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u(a^M - b^L u).$$

Застосовуючи теорему 1, одержуємо $u(t, x, u_0, v_0) \leq \bar{u}(t, M_u)$, $M_u = \bar{u}(0, M_u)$, де стала M_u така, що $\|u_0(x)\|_C = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u_0(x)| \leq M_u$. За теоремою єдиності розв'язок рівняння (9) з незалежною від x початковою умовою не залежить від x при $t \geq 0$. Тому функція $\bar{u}(t, M_u)$ задовольняє звичайне диференціальне рівняння $d\bar{u}/dt = \bar{u}\big(a^M - b^L \bar{u}\big)$.

З умови (3) отримуємо оцінку для імпульсної дії:

$$\big\|u(\tau_k + 0, x, u_0, v_0)\big\|_C \leq \big\|u(\tau_k, x, u_0, v_0)\big\|_C (1 + d) + q.$$

За лемою 3 всі розв'язки рівняння з імпульсами

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{u}(a^M - b^L \bar{u}), \qquad \bar{u}(\tau_k + 0) - \bar{u}(\tau_k) = d\bar{u}(\tau_k) + q$$

фінально обмежені сталою A або $(d+1)A + q$.

Аналогічно отримуємо оцінку для $v(t, x, u_0, v_0)$.

Лему 4 доведено.

Лема 5. *Нехай виконуються нерівності*

$$a_1^L - c_1^M M_0 + \sigma_1 > 0, \qquad a_2^L - b_2^M M_0 + \sigma_2 > 0, \tag{10}$$

де

$$\sigma_i = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{0 < \tau_j \leq T} \ln(1 + d_{ij}), \quad i = 1, 2.$$

Тоді існує таке $m_0 > 0$, що для кожного розв'язку системи (1) – (5) з невід'ємними початковими функціями $(u_0(x), v_0(x))$, $u_0(x) \not\equiv 0$, $v_0(x) \not\equiv 0$, існує $t_0 = t_0(u_0, v_0)$ таке, що

$$u(t,x) \geq m_0, \qquad v(t,x) \geq m_0, \qquad x \in \bar{\Omega}, \quad t \geq t_0.$$

Доведення. Для обмежених розв'язків $\big\|u(t,.)\big\|_C \leq M_0$, $\big\|v(t,.)\big\|_C \leq M_0$, $t \geq 0$, виконується нерівність

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u\big(a_1(t,x) - b_1(t,x)u - c_1(t,x)v\big) \leq$$

$$\leq \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u\big(a_1^L - b_1^M u - c_1^M M_0\big),$$

тому

$$0 = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \mu_1 \Delta \hat{u} - \hat{u}\big(a_1^L - b_1^M \hat{u} - c_1^M M_0\big) \leq \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u\big(a_1^L - b_1^M u - c_1^M M_0\big).$$

Застосовуючи теорему 1, отримуємо $u(t,x,u_0,v_0) \geq \hat{u}(t,m_u)$, де стала $m_u > 0$ така, що $\|u_0(x)\| \geq m_u, x \in \bar{\Omega}$. Зауважимо, що ми можемо припустити, що $m_u > 0$, оскільки за теоремою 1, якщо $u_0(x) \geq 0$, $u_0(x) \not\equiv 0$, $v_0(x) \geq 0$, $v_0(x) \not\equiv 0$, то $u(t,x,u_0,v_0) > 0$, $v(t,x,u_0,v_0) > 0$ для всіх $x \in \bar{\Omega}$, $t > 0$.

Враховуючи (3) і невід'ємність q_{1k}, розв'язок $u(t,x,u_0,v_0)$ оцінюємо знизу розв'язком логістичного рівняння з імпульсами

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \hat{u}(a_1^L - b_1^M \hat{u} - c_1^M M_0), \qquad \hat{u}(\tau_k + 0) - \hat{u}(\tau_k) = d_{1k}\hat{u}(t_k). \tag{11}$$

Виконуючи у рівнянні (11) заміну змінних $\hat{u} = 1/z$, отримуємо

$$\frac{dz}{dt} = -(a_1^L - c_1^M M_0)z + b_1^M, \qquad z(\tau_k + 0) = (1 + d_{1k})^{-1} z(\tau_k). \tag{12}$$

Фундаментальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$U(t,s) = \prod_{s \leq \tau_j < t} \frac{1}{1 + d_{1j}} e^{-(a_1^L - c_1^M M_0)(t-s)} = \exp\left\{ -(a_1^L - c_1^M M_0)(t-s) - \sum_{s \leq \tau_j < t} \ln(1 + d_{1j}) \right\}.$$

Зазначимо, що для майже періодичної послідовності $\{d_{1j}\}$ та послідовності $\{\tau_j\}$ з рівномірно майже періодичними послідовностями різниць завжди існує границя

$$\sigma_1 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{s \leq \tau_j < s+T} \ln(1 + d_{1j}) = \lim_{T \to \infty} \sum_{s \leq \tau_j < s+T} \frac{\ln(1 + d_{1j})}{\mathfrak{i}(s, s+T)} \lim_{T \to \infty} \frac{\mathfrak{i}(s, s+T)}{T}.$$

При виконанні нерівності (10) для $U(t,s)$ справедливою є оцінка

$$\big|U(t,s)\big| \leq \tilde{K} e^{-\alpha_1 (t-s)}, \quad t \geq s,$$

з деякими додатними сталими $\tilde{K}$ і α_1, а рівняння (12) має єдиний асимптотично стійкий обмежений на осі розв'язок

$$z_0(t) = \int_{-\infty}^{t} U(t-s) b_1^M \, ds \leq \frac{\tilde{K} b_1^M}{\alpha_1}.$$

Кожний інший розв'язок рівняння з додатними початковими значеннями задовольняє оцінку $z(t) \leq 2\tilde{K} b_1^M / \alpha_1$ починаючи з деякого моменту часу, який залежить від розв'язку. Відповідно кожний розв'язок рівняння (11) оцінюється знизу сталою $\alpha_1 / 2\tilde{K} b_1^M$ починаючи з деякого моменту часу.

Оцінки для розв'язків v аналогічні.

Лему 5 доведено.

Лема 6. *Нехай виконується нерівність* $q_0 = \inf_{ij} q_{ij} > 0$. *Тоді існує* $m_0 > 0$ *таке, що для кожного розв'язку системи* (1)–(5) *з невід'ємними початковими функціями* $(u_0(x), v_0(x))$, $u_0(x) \not\equiv 0$, $v_0(x) \not\equiv 0$, *існує* $t_0 = t_0(u_0, v_0)$ *таке, що*

$$u(t,x) \geq m_0, \qquad v(t,x) \geq m_0, \qquad x \in \bar{\Omega}, \quad t \geq t_0.$$

Доведення. Як і у випадку рівняння (11), показуємо, що розв'язки системи (1) – (5) оцінюються знизу розв'язками рівняння

$$\frac{dz}{dt} = z(a^L - b^M z - c^M M_0), \qquad z(\tau_k + 0) - z(\tau_k) = d_0 u(t_k) + q_0, \tag{13}$$

де $a^L = \min\left\{a_1^L, a_2^L\right\}$, $b^M = \max\left\{b_1^M, c_2^M\right\}$, $c^M = \max\left\{c_1^M, b_2^M\right\}$, $d_0 = \inf_{jk} d_{jk}$. Оскільки розв'язки рівняння невід'ємні, а значення розв'язку при $t = \tau_k + 0$ не менше за q_0, то при $a^L < c^M M_0$ на відрізку $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k \geq 1$, розв'язок оцінюється знизу величиною

$$z(t) \geq \frac{(c^M M_0 - a^L) q_0}{q_0 b^M (e^{(c^M M_0 - a^L)(t-\tau_k)} - 1) + (c^M M_0 - a^L) e^{(c^M M_0 - a^L)(t-\tau_k)}}.$$

При $a_1^L = c_1^M M_0$ отримуємо

$$z(t) \geq \frac{q_0}{1 + q_0 b^M (t - \tau_k)}, \quad t \in (\tau_k, \tau_{k+1}].$$

Аналогічно доводимо при $a^L > c^M M_0$.

Лему 6 доведено.

Зауваження **1.** Припустимо, що $d_{ij} = 0$, $i = 1, 2$, $j \in \mathbb{Z}$, і $a_1^L > c_1^M M_0$, $a_2^L > b_2^M M_0$. Лінійне рівняння (12) має додатний асимптотично стійкий сталий розв'язок $z_* = b_1^M/(a_1^L - c_1^M M_0)$. Кожен інший розв'язок рівняння з додатними початковими значеннями задовольняє оцінку $z(t) < 2b_1^M/(a_1^L - c_1^M M_0)$ починаючи з деякого моменту часу, який залежить від розв'язку. Тому розв'язки $\big(u(t, x, u_0, v_0), v(t, x, u_0, v_0)\big)$ з невід'ємними не рівними тотожно нулю початковими функціями задовольняють оцінки

$$u(t, x, u_0, v_0) \geq \frac{a_1^L - c_1^M M_0}{2b_1^M}, \qquad v(t, x, u_0, v_0) \geq \frac{a_2^L - b_2^M M_0}{2c_2^M}, \quad x \in \bar{\Omega},$$

починаючи з деякого моменту часу $t_1 = t_1(u_0, v_0)$.

Теорема 2. *Нехай для системи* (1) – (5) *виконуються такі умови*:

1) *система перманентна*: *існують додатні сталі m_0 і M_0 такі*, *що кожний розв'язок з невід'ємними не рівними тотожно нулю початковими функціями $(u_0(x), v_0(x))$ починаючи з деякого моменту часу $t_0 = t_0(u_0, v_0)$ залишається у множині*

$$E_0 = \big\{(u, v) \colon\ m_0 \leq u \leq M_0,\ m_0 \leq v \leq M_0\big\};$$

2) *має місце нерівність*

$$a^M - (2b^L + c^L) m_0 + c^M M_0 + \sigma > 0, \quad \sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}, \tag{14}$$

де

$$a^M = \max\left\{a_1^M, a_2^M\right\}, \qquad b^L = \min\left\{b_1^L, c_2^L\right\}, \qquad c^L = \min\left\{c_1^L, b_2^L\right\}, \qquad c^M = \max\left\{c_1^M, b_2^M\right\}.$$

Тоді розв'язки системи з початковими функціями зі значеннями у множині E_0 рівномірно асимптотично стійкі.

Доведення. Розглянемо два розв'язки $\big(u_1(t,x), v_1(t,x)\big)$ і $\big(u_2(t,x), v_2(t,x)\big)$, які мають значення у множині E_0, і функцію

$$\mathcal{A}_p(t) = \int\limits_{\Omega} \big((u_1(t,x) - u_2(t,x))^p + (v_1(t,x) - v_2(t,x))^p\big) dx,$$

де p — парне натуральне число. Її похідна має вигляд

$$\frac{d\mathcal{A}_p(t)}{dt} = p \int\limits_{\Omega} (u_1 - u_2)^{p-1} \left(\frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt}\right) dx + p \int\limits_{\Omega} (v_1 - v_2)^{p-1} \left(\frac{dv_1}{dt} - \frac{dv_2}{dt}\right) dx =$$

$$= p\mu_1 \int\limits_{\Omega} (u_1 - u_2)^{p-1} (\Delta u_1 - \Delta u_2)\, dx + p \int\limits_{\Omega} a_1(t,x)(u_1 - u_2)^p\, dx -$$

$$-p \int\limits_{\Omega} \big(b_1(t,x)(u_1 - u_2)^p (u_1 + u_2) + c_1(t,x)(u_1 - u_2)^{p-1}(u_1 v_1 - u_2 v_2)\big)\, dx +$$

$$+p\mu_2 \int\limits_{\Omega} (v_1 - v_2)^{p-1} (\Delta v_1 - \Delta v_2)\, dx + p \int\limits_{\Omega} a_2(t,x)(v_1 - v_2)^p\, dx -$$

$$-p \int\limits_{\Omega} \big(c_2(t,x)(v_1 - v_2)^p (v_1 + v_2) + b_2(t,x)(v_1 - v_2)^{p-1}(u_1 v_1 - u_2 v_2)\big)\, dx.$$

Враховуючи рівність

$$\int\limits_{\Omega} (u_1 - u_2)^{p-1} (\Delta u_1 - \Delta u_2)\, dx = -(p-1) \int\limits_{\Omega} (u_1 - u_2)^{p-2} |\nabla (u_1 - u_2)|^2\, dx,$$

отримуємо оцінку

$$\frac{d\mathcal{A}_p(t)}{dt} \le p \int\limits_{\Omega} \big(a_1^M - (2b_1^L + c_1^L) m_0\big) (u_1 - u_2)^p\, dx +$$

$$+p \int\limits_{\Omega} \big(c_1^M M_0 \big|(u_1 - u_2)^{p-1}(v_1 - v_2)\big| + b_2^M M_0 \big|(u_1 - u_2)(v_1 - v_2)^{p-1}\big|\big)\, dx +$$

$$+p \int\limits_{\Omega} (a_2 - (b_2^L + 2c_2^L) m_0)(v_1 - v_2)^p\, dx \le p\left(a^M - (2b^L + c^L) m_0 + c^M M_0\right) \mathcal{A}_p(t).$$

В останніх оцінках ми скористалися нерівністю $w^{p-1}z + wz^{p-1} \le w^p + z^p$ для невід'ємних w, z і натурального p.

При $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j]$ виконується нерівність

$$\mathcal{A}_p(\tau_j) \le \mathcal{A}_p(\tau_{j-1} + 0) \exp\left\{p\left(a^M - (2b^L + c^L) m_0 + c^M M_0\right)(\tau_j - \tau_{j-1})\right\}.$$

За допомогою формул (3), (4) оцінимо $\mathcal{A}_p(\tau_j + 0)$:

$$\mathcal{A}_p(\tau_j + 0) = \int\limits_{\Omega} (1 + d_{1j})^p \big(u_1(\tau_j, x) - u_2(\tau_j, x)\big)^p\, dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega}(1+d_{2j})^p\big(v_1(\tau_j,x)-v_2(\tau_j,x)\big)^p\,dx \le$$
$$\le \max\big\{(1+d_{1j})^p,(1+d_{2j})^p\big\}\mathcal{A}_p(\tau_j)=K_j^p\mathcal{A}_p(\tau_j).$$

Як наслідок отримуємо

$$\mathcal{A}_p(t)\le \prod_{t_0\le\tau_j<t}K_j^p e^{p(a^M-(2b^L+c^L)m_0+c^MM_0)(t-t_0)}\mathcal{A}_p(t_0). \tag{15}$$

При виконанні нерівності

$$\prod_{t_0\le\tau_j<t}K_j e^{(a^M-(2b^L+c^L)m_0+c^MM_0)(t-t_0)}\le M_1e^{-\beta_1(t-t_0)}$$

з нерівності (15) випливає експоненціальна оцінка з показником $-\beta_1$ в усіх просторах $L^p(\Omega)$ з парними p і як наслідок оцінка в $\sup$-нормі

$$\sup_x\big(|u_1(t,x)-u_2(t,x)|+|v_1(t,x)-v_2(t,x)|\big)\le$$
$$\le M_1e^{-\beta_1(t-t_0)}\sup_x\big(|u_1(t_0,x)-u_2(t_0,x)|+|v_1(t_0,x)-v_2(t_0,x)|\big), \tag{16}$$

що показує рівномірну асимптотичну стійкість розв'язків у просторі $C(\bar{\Omega})$.

4. Абстрактна постановка. Позначимо $w=(u,v)\in L^p(\Omega)\times L^p(\Omega)=X$, де $p>n$ — натуральне число. Норму у просторі $X=L^p(\Omega)\times L^p(\Omega)$ будемо позначати $\|.\|_0$.

Запишемо систему (1)–(5), (6) у вигляді

$$\frac{dw}{dt}+A_1w=F(t,w),\quad t\ne\tau_j, \tag{17}$$
$$w(\tau_j+0)=w(\tau_j)+G_j(w(\tau_j)),\quad j\in\mathbb{Z}, \tag{18}$$
$$w(0)=w_0, \tag{19}$$

де

$$A_1=\begin{pmatrix}-\mu_1\Delta+\beta & 0\\ 0 & -\mu_2\Delta+\beta\end{pmatrix},\quad \beta>0,$$
$$F(t,w)=\begin{pmatrix}u(a_1(t,.)+\beta-b_1(t,.)u-c_1(t,.)v)\\ v(a_2(t,.)+\beta-b_2(t,.)u-c_2(t,.)v)\end{pmatrix},$$
$$G_j(w(\tau_j))=\begin{pmatrix}d_{1j}u(\tau_j,.)+q_{1j}\\ d_{2j}v(\tau_j,.)+q_{2j}\end{pmatrix}=D_jw(\tau_j)+Q_j,$$

β — деяке додатне число, $\beta<\beta_1$. Легко бачити, що $d=\sup_j\|D_j\|$, $q=\sup_j\|Q_j\|$.

Оператор A_1 має область означення

$$D(A_1)=\left\{\xi:\ \xi\in W^{2,p}(\Omega),\ \left.\frac{\partial\xi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0\right\},$$

де $W^{2,p}(\Omega)$ — простір Соболєва функцій з $L_p(\Omega)$, які мають дві узагальнені похідні. Оператор A_1 секторіальний з $\mathrm{Re}\,\xi \geq \beta$ для $\xi \in \sigma(A_1)$, де $\sigma(A_1)$ — спектр оператора A_1. Для оператора A_1 означаються степені $A_1^\alpha, \alpha \geq 0$, та відповідні їм області означення $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$ з нормою $\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|_0$ [21]. Оператор $-A_1$ є генератором аналітичної напівгрупи $e^{-A_1 t}$ і справджується рівність $e^{-A_1 t} A_1^\alpha x = A_1^\alpha e^{-A_1 t} x$, де $x \in X^\alpha$, $t > 0$. Виконуються нерівності [21]

$$\left\|A_1^\alpha e^{-A_1 t}\right\|_0 \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\beta t}, \qquad t > 0, \quad \alpha > 0, \tag{20}$$

$$\left\|(e^{-A_1 t} - I)x\right\|_0 \leq \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} t^\alpha \left\|A_1^\alpha x\right\|_0, \qquad t > 0, \quad \alpha \in (0, 1], \quad x \in X^\alpha, \tag{21}$$

де $C_\alpha > 0$ обмежена при $\alpha \to 0+$. Також виконується нерівність $\|x\|_0 \leq L_0 \|x\|_\alpha$ з деякою сталою $L_0 > 0$ для $x \in X^\alpha$.

Виберемо α так, що $2\alpha - n/p \geq \nu > 0$, $\alpha < 1$. Аналогічно [23] показуємо, що якщо початкова функція задовольняє умову $w_0 \in X^\alpha$, $w_0 \geq 0$, то задача без імпульсів (1)–(2), (5), (6) має єдиний класичний розв'язок $(u(t,x), v(t,x))$, який існує для всіх $t > 0$, якщо $u_0(x) \geq 0$, $v_0(x) \geq 0$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Розв'язок початкової задачі (17)–(19) задовольняє інтегральне рівняння

$$w(t, w_0) = e^{-A_1 t} w_0 + \int_0^t e^{-A_1(t-s)} F(s, w(s))\, ds + \sum_{0<\tau_j<t} e^{-A_1(t-\tau_j)} G_j(w(\tau_j)),$$

тому за означенням норми у просторі X^α

$$\|w(t, w_0)\|_\alpha \leq \|e^{-A_1 t}\|_0 \|w_0\|_\alpha + \int_0^t \left\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-s)} F(s, w(s))\right\|_0 ds +$$
$$+ \sum_{0<\tau_j<t} \left\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-\tau_j)} \big(D_j w(\tau_j) + Q_j\big)\right\|_0.$$

Для $t \in [\tau_k - \theta/2, \tau_k]$ виконується $(t - \tau_j)^{-1} \leq 2/\theta$, $j < k$. З останньої нерівності і (20) отримуємо

$$\left\|w(t, w_0)\right\|_\alpha \leq C_0 e^{-\beta t} \|w_0\|_\alpha + C_\alpha F_0 \int_0^t e^{-\beta(t-s)} (t-s)^{-\alpha}\, ds +$$
$$+ C_\alpha (dM_0 + q)(2/\theta)^\alpha \sum_{0<\tau_j<t} e^{-\beta(t-\tau_j)} \leq \tilde{C}_0, \quad t \in [\tau_k - \theta/2, \tau_k],$$

де $F_0 = \sup_{w \in E_0} \left\|F(s, w)\right\|_0$. Отже, $\left\|w(\tau_j, w_0)\right\|_\alpha \leq \tilde{C}_0$ для всіх натуральних j. З (18) одержуємо $\left\|w(\tau_j + 0, w_0)\right\|_\alpha \leq d\tilde{C}_0 + q$. Звідси випливає, що $\|w(t, w_0)\|_\alpha \leq \tilde{C}_1, t \geq 0$, з деякою додатною сталою $\tilde{C}_1$. З обмеженості множини у просторі X^β випливає її компактність у просторі $X^\alpha, \alpha < \beta$. Тому траєкторії $w(t)$ передкомпактні в X^α, $\alpha > 0$.

Норма різниці двох розв'язків $w(t, w_1)$ і $w(t, w_2)$ задовольняє нерівність

$$\left\|w(t, w_1) - w(t, w_2)\right\|_\alpha \leq \left\|A_1^\alpha e^{-A_1 t}(w_1 - w_2)\right\|_0 +$$

$$+\int_0^t \left\|A_1^{\alpha} e^{-A_1(t-s)}\big(F(s,w(s,w_1))-F(s,w(s,w_2))\big)\right\|_0 ds+$$

$$+\sum_{0<\tau_j<t}\left\|A_1^{\alpha} e^{-A_1(t-\tau_j)} D_j(w(\tau_j,w_1)-w(\tau_j,w_2))\right\|_0 \le$$

$$\le C_0 e^{-\beta t}\left\|w_1-w_2\right\|_{\alpha}+\int_0^t \frac{C_{\alpha} e^{-\beta(t-s)}}{(t-s)^{\alpha}} F_w \left\|w(s,w_1)-w(s,w_2)\right\|_0 ds+$$

$$+\sum_{0<\tau_j<t}\frac{C_{\alpha} e^{-\beta(t-\tau_j)}}{(t-\tau_j)^{\alpha}} d\left\|w(\tau_j,w_1)-w(\tau_j,w_2)\right\|_0 ds, \qquad (22)$$

де $F_w = \sup_{w\in E_0}\|\partial_w F\|$. Використовуючи (16), отримуємо оцінку

$$\left\|w(t,w_1)-w(t,w_2)\right\|_{\alpha} \le C_0 e^{-\beta t}\|w_1-w_2\|_{\alpha}+$$

$$+\int_0^t \frac{C_{\alpha} e^{-\beta(t-s)}}{(t-s)^{\alpha}} F_w M_1 e^{-\beta_1 s}\|w_1-w_2\|_0 ds+$$

$$+C_{\alpha} d(2/\theta)^{\alpha}\sum_{0<\tau_j<t} e^{-\beta(t-\tau_j)} M_1 e^{-\beta_1\tau_j}\|w_1-w_2\|_0 \le$$

$$\le e^{-\beta t}\|w_1-w_2\|_{\alpha}\left(C_0+F_w M_1 L_0\int_0^t \frac{C_{\alpha} e^{-(\beta_1-\beta)s}}{(t-s)^{\alpha}} ds+\frac{C_{\alpha} d M_1 L_0 (2/\theta)^{\alpha}}{1-e^{-\theta(\beta_1-\beta)}}\right) \le$$

$$\le M_2 e^{-\beta t}\|w_1-w_2\|_{\alpha}, \qquad t\in[\tau_k-\theta/2,\tau_k]. \qquad (23)$$

Тому

$$\left\|w(\tau_k,w_1)-w(\tau_k,w_2)\right\|_{\alpha} \le M_2 e^{-\beta\tau_k}\|w_1-w_2\|_{\alpha}$$

і, враховуючи форму імпульсної дії (18), маємо

$$\left\|w(\tau_k+0,w_1)-w(\tau_k+0,w_2)\right\|_{\alpha} \le d M_2 e^{-\beta\tau_k}\|w_1-w_2\|_{\alpha}, \quad k=1,2,\ldots.$$

Розглядаючи $w(\tau_k+0,w_1)-w(\tau_k+0,w_2)$ як початкову точку, аналогічно (23) на інтервалі $t\in[\tau_k+0,\tau_{k+1}-\theta/2]$ отримуємо оцінку

$$\left\|w(t,w_1)-w(t,w_2)\right\|_{\alpha} \le$$

$$\le e^{-\beta(t-\tau_k)}\left(C_0+F_w M_1 L_0\int_{\tau_k}^t \frac{C_{\alpha} e^{-(\beta-\beta_1)s}}{(t-s)^{\alpha}} ds\right)\left\|w(\tau_k+0,w_1)-w(\tau_k+0,w_2)\right\|_{\alpha}. \qquad (24)$$

З нерівностей (23) і (24) отримуємо оцінку для всіх $t\ge 0$:

$$\left\|w(t,w_1)-w(t,w_2)\right\|_{\alpha} \le M_3\, e^{-\beta t}\|w_1-w_2\|_{\alpha} \qquad (25)$$

з деякою додатною сталою $M_3\ge 1$.

5. Майже періодичні розв'язки.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми* 2. *Тоді система має єдиний асимптотично стійкий кусково-неперервний майже періодичний розв'язок зі значеннями у множині* E_0.

Доведення. Розглянемо розв'язок $\xi(t)$ системи (17), (18) зі значеннями у множині E_0. Він рівномірно асимптотично стійкий у просторі X^α. Тому для кожного $\varepsilon > 0$ існують $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ і $T(\varepsilon) > 0$ такі, що для кожного розв'язку $w(t)$ системи (17), (18) з $\|\xi(0) - w(0)\|_\alpha < \delta$ виконується $\|\xi(t) - w(t)\|_\alpha < \varepsilon/2$ для $t \geq 0$ і $\|\xi(t) - x(t)\|_\alpha < \delta_1/2$ для всіх $t \geq T(\varepsilon)$, $\delta_1 = \min(\varepsilon, \delta)$.

Нехай $\{\nu_m\}$ — така довільна послідовність дійсних чисел, що $\nu_{m+1} > \nu_m$, $\nu_m \to \infty$ при $m \to \infty$. Оскільки система майже періодична, існує підпослідовність (яку знову позначимо $\{\nu_m\}$), для якої виконуються такі умови:

a$_1$) існують послідовність цілих чисел $\alpha(m)$ (див. [12]), майже періодичні послідовності $\{\tilde{D}_i\}$, $\{\tilde{P}_i\}$ і послідовність дійсних чисел із рівномірно майже періодичними різницями $\{\tilde{\tau}_i\}$ такі, що $\lim_{m\to\infty}(\tau_{i+\alpha(m)} - \nu_m) = \tilde{\tau}_i$, $\lim_{m\to\infty} D_{i+\alpha(m)} = \tilde{D}_i$, $\lim_{m\to\infty} P_{i+\alpha(m)} = \tilde{P}_i$ рівномірно по $i \in \mathbb{Z}$;

a$_2$) $F(t + \nu_m, w)$ прямує до деякої функції $\tilde{F}(t, w)$ у w-топології рівномірно відносно w з обмеженої області $\|w\|_\alpha \leq K$;

a$_3$) $\xi_0^m = \xi(\nu_m)$ збігається у просторі X^α до деякого елемента ζ_0 (оскільки траєкторія $\xi(t)$ передкомпактна в X^α).

Позначимо $\xi^m(t) = \xi(t + \nu_m)$. Тоді $\xi^m(t)$ є розв'язком системи

$$\frac{dw}{dt} + A_1 w = F(t + \nu_m, w), \tag{26}$$

$$w(\tau_j - \nu_m + 0) = w(\tau_j - \nu_m) + G_j(w(\tau_j - \nu_m)), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{27}$$

і $\xi^m(t)$ рівномірно асимптотично стійкий з тими ж $\delta(\varepsilon)$ і $T(\varepsilon)$, як і $\xi(t)$.

Позначимо $\tau_j - \nu_m = \tau^m_{j-\alpha(m)}$. Нехай $j - \alpha(m) = i$, тоді $j = i + \alpha(m)$ і система (26), (27) набирає вигляду

$$\frac{dw}{dt} + A_1 w = F(t + \nu_m, w), \tag{28}$$

$$w(\tau_i^m + 0) = w(\tau_i^m) + G_{i+\alpha(m)}(w(\tau_i^m)), \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{29}$$

Аналогічно позначимо $\tau_j - \nu_n = \tau^n_{j-\alpha(n)}$. Нехай $j - \alpha(n) = i$, тоді $j = i + \alpha(n)$ і розв'язок $\xi^n(t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{dw}{dt} + A_1 w = F(t + \nu_n, w), \tag{30}$$

$$w(\tau_i^n + 0) = w(\tau_i^n) + G_{i+\alpha(n)}(w(\tau_i^n)), \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{31}$$

З умов a$_1$)–a$_3$) випливає, що для додатного δ_1 існує таке натуральне N_1, що при $m, n \geq N_1$ виконується

$$\left|\tau_i^m - \tau_i^n\right| < \delta_1, \quad \left\|G_{i+\alpha(m)}(w) - G_{i+\alpha(n)}(w)\right\|_\alpha < \delta_1, \quad \rho\big(F(. + \nu_m, w), F(. + \nu_n, w)\big) < \delta_1 \tag{32}$$

рівномірно по $i \in \mathbb{Z}$ та $\|w\|_\alpha \leq K$ з деяким $K > 0$.

Нехай $\eta(t)$ — розв'язок рівняння (28), (29) з початковою умовою $\eta(0) = \xi^n(0) = \xi(\nu_n)$. Існує таке $N > 0$, що $\|\xi^m(0) - \xi^n(0)\|_\alpha < \delta$ при $m, n \geq N$. Тоді з рівномірної асимптотичної стійкості отримуємо $\big\|\eta(t) - \xi^m(t)\big\|_\alpha < \varepsilon/2$ при $t \geq 0$ і $\|\eta(t) - \xi^m(t)\|_\alpha < \delta/2$ при $t \geq T(\varepsilon)$.

Оцінимо $\eta(t) - \xi^n(t)$ на інтервалі $[0, T(\varepsilon)]$. Припустимо для визначеності $\tau_1^m < \tau_1^n$. При виконанні (32) на інтервалі $[0, \tau_1^m]$ різниця $\eta(t) - \xi^n(t)$ задовольняє оцінки

$$\big\|\eta(t) - \xi^n(t)\big\|_\alpha \leq \int\limits_0^t \big\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-s)}\big(F(s+\nu_m, \eta(s)) - F(s+\nu_m, \xi^n(s))\big)\big\|_0\, ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \big\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-s)}\big(F(s+\nu_m, \xi^n(s)) - F(s+\nu_n, \xi^n(s))\big)\big\|_0\, ds \leq$$

$$\leq \int\limits_0^t \frac{F_w L_0 C_\alpha e^{-\beta(t-s)}}{(t-s)^\alpha}\big\|\eta(s) - \xi^n(s)\big\|_\alpha\, ds + \delta_1 \int\limits_0^t \frac{C_\alpha e^{-\beta(t-s)}}{(t-s)^\alpha}\, ds \leq$$

$$\leq F_w L_0 C_\alpha \int\limits_0^t \frac{\big\|\eta(s) - \xi^n(s)\big\|_\alpha}{(t-s)^\alpha}\, ds + \delta_1 \frac{\Theta^{1-\alpha} C_\alpha}{1-\alpha}. \tag{33}$$

За лемою 2 існує така стала $\tilde{C} = \tilde{C}(\alpha, Q, F_w)$, що

$$\big\|\eta(t) - \xi^n(t)\big\|_\alpha \leq \delta_1 \frac{\Theta^{1-\alpha} C_\alpha}{1-\alpha}\tilde{C} = \Lambda_1(\delta_1), \quad t \in [0, \tau_1^m].$$

Оцінимо різницю в точці $t = \tau_1^n + 0:$

$$\big\|\eta(\tau_1^n + 0) - \xi^n(\tau_1^n + 0)\big\|_\alpha \leq \Bigg\| A_1^\alpha e^{-A_1(\tau_1^n - \tau_1^m)}\big(D_1 \eta(\tau_1^m) + Q_1\big) +$$

$$+ \int\limits_{\tau_1^m}^{\tau_1^n} A_1^\alpha e^{-A_1(\tau_1^n - s)} F(s+\nu_m, \eta(s))\, ds - D_1 A_1^\alpha e^{-A_1(\tau_1^n - \tau_1^m)}\xi^n(\tau_1^m) -$$

$$- A_\alpha Q_1 - \int\limits_{\tau_1^m}^{\tau_1^n} D_1 A_1^\alpha e^{-A_1(\tau_1^n - s)} F(s+\nu_n, \xi^n(s))\, ds \Bigg\|_0 \leq$$

$$\leq dC_0 e^{-\beta(\tau_1^n - \tau_1^m)}\big\|\eta(\tau_1^m) - \xi^n(\tau_1^m)\big\|_\alpha +$$

$$+ (1+d)F_0 \int\limits_{\tau_1^m}^{\tau_1^n} \frac{C_\alpha e^{-\beta(\tau_1^n - s)}}{(\tau_1^n - s)^\alpha} ds + \big\|A_1^\alpha(e^{-\beta(\tau_1^n - \tau_1^m)} - I)Q_1\big\|_0 \leq$$

$$\leq dC_0 \Lambda_1(\delta_1) + \frac{(1+d)F_0 C_\alpha}{1-\alpha}\delta_1^{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha_1} C_{1-\alpha_1}\delta_1^{\alpha_1}\|Q_1\|_{\alpha+\alpha_1} = \tilde{\Lambda}_2(\delta_1), \tag{34}$$

де $\tilde{\Lambda}_2(s) \to 0$ при $s \to 0$.

На інтервалі $t \in \big(\tau_1^n, \min\{\tau_2^m, \tau_2^n\}\big]$ різниця задовольняє нерівність

$$\left\|\eta(t)-\xi^n(t)\right\|_\alpha \le \left\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-\tau_1^n)}\big(\eta(\tau_1^n+0)-\xi^n(\tau_1^n+0)\big)\right\|_0+$$
$$+\int\limits_0^t \left\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-s)}\big(F(s+\nu_m,\eta(s))-F(s+\nu_n,\xi^n(s))\big)\right\|_0 ds \le$$
$$\le C_0\tilde\Lambda_2(\delta_1)+F_wL_0C_\alpha\int\limits_0^t \frac{\left\|\eta(s)-\xi^n(s)\right\|_\alpha}{(t-s)^\alpha}ds+\delta_1\frac{\Theta^{1-\alpha}C_\alpha}{1-\alpha}$$

і за лемою 2 оцінку

$$\left\|\eta(t)-\xi^n(t)\right\|_\alpha \le \left(C_0\tilde\Lambda_2(\delta_1)+\delta_1\frac{\Theta^{1-\alpha}C_\alpha}{1-\alpha}\right)\tilde C=\Lambda_2(\delta_1).$$

Аналогічно (34) отримуємо

$$\left\|\eta(\max\{\tau_2^m,\tau_2^n\}+0)-\xi^n(\max\{\tau_2^m,\tau_2^n\}+0)\right\|_\alpha \le$$
$$\le dC_0\Lambda_2(\delta_1)+\frac{(1+d)F_0C_\alpha}{1-\alpha}\delta_1^{1-\alpha}+\frac{1}{\alpha_1}C_{1-\alpha_1}\delta_1^{\alpha_1}\|Q_2\|_{\alpha+\alpha_1}=\tilde\Lambda_3(\delta_1),$$

де $\tilde\Lambda_3(s)\to 0$ при $s\to 0$.

На інтервалі $[0,T(\varepsilon)]$ не більше ніж $T(\varepsilon)/\theta+1$ точок імпульсної дії. Проводячи аналогічне оцінювання, показуємо, що існують такі функції $\Lambda_j(\delta_1)$, що $\Lambda_j(s)\to 0$ при $s\to 0$ і

$$\left\|\eta(t)-\xi^n(t)\right\|_\alpha \le \Lambda_j(\delta_1),\quad t\in\big(\max\left\{\tau_{j-1}^m,\tau_{j-1}^n\right\},\min\left\{\tau_j^m,\tau_j^n\right\}\big],$$

для $j=1,2,\ldots,T(\varepsilon)/\theta+1$. Припускаємо, що $\tau_0^m=\tau_0^n=0$. Виберемо δ_1 так, щоб $\Lambda_j(\delta_1)<\delta/2$ для всіх j.

Отже, існує таке натуральне N_1, що для всіх $m,n\ge N_1$ виконується $\rho(\eta(.),\xi^n(.))<\delta/2$ на інтервалі $[0,T(\varepsilon)]$. Тому $\rho(\xi^m(.),\xi^n(.))<\varepsilon$ при $t\in[0,T(\varepsilon)]$ і $\left\|\xi^m(T(\varepsilon))-\xi^n(T(\varepsilon))\right\|_\alpha<\delta$. Розглядаючи точку $t=T(\varepsilon)$ як початкову і повторюючи наведене вище оцінювання, отримуємо аналогічні нерівності на інтервалі $[T(\varepsilon),2T(\varepsilon)]$ і в точці $t=2T(\varepsilon)$. Повторюючи таку ж процедуру на наступних інтервалах $\big[2T(\varepsilon),3T(\varepsilon)\big]$, $\big[3T(\varepsilon),4T(\varepsilon)\big]$ і т. д., у підсумку одержуємо $\rho(\xi^m(.),\xi^n(.))<\varepsilon$ при $t\ge 0$ і $m,n\ge N_1$.

Ми довели збіжність у w-топології на півосі $t\ge 0$ послідовності функцій $\xi(t+\nu_n)$ зі значеннями у просторі X^α. Позначимо через $p(t)$, $t\ge 0$, граничну функцію. Використовуючи стандартний діагональний метод і вибираючи, якщо необхідно, підпослідовності послідовності $\{\nu_n\}$, продовжуємо функцію $p(t)$ на всю вісь так, що $\xi(t+\nu_n)$ збігається до $p(t)$ у w-топології на компактних інтервалах.

Покажемо, що функція $p(t)$ w-майже періодична. За побудовою функція $p(t)$ має послідовність розривів $\{\tilde\tau_j\}$, яка має рівномірно майже періодичні послідовності різниць. Для кожного $\varepsilon>0$ існує таке $T_1=T_1(\varepsilon)$, що множина

$$\left\{\tau\colon \sup_{t\ge T_1(\varepsilon)}\left\|\xi(t+\tau)-\xi(t)\right\|_\alpha<\varepsilon,\ |t-\tau_k|>\varepsilon\right\} \tag{35}$$

відносно щільна в $\mathbb{R}$. Дійсно, якщо множина (35) не є відносно щільною для деякого $\varepsilon_0>0$, то для довільного $T_1(\varepsilon_0)$ існує послідовність інтервалів $[h_n-l_n,h_n+l_n]$ таких, що

$$\sup_{t\ge T_1(\varepsilon_0),|t-\tau_k|\ge\varepsilon_0}\left\|\xi(t+\tau)-\xi(t)\right\|_\alpha\ge\varepsilon_0$$

для всіх $\tau \in [h_n - l_n, h_n + l_n]$. Виберемо довільне l_1 і $l_n > \max_{m<n} h_m$, тоді $h_n - h_m \in \in [h_n - l_n, h_n + l_n]$, якщо $m < n$. Тому

$$\sup_{t\geq 0, |t+h_m-\tau_k|\geq\varepsilon_0} \big\|\xi(t+h_n) - \xi(t+h_m)\big\|_\alpha = \sup_{t\geq h_m, |t-\tau_k|\geq\varepsilon_0} \big\|\xi(t) - \xi(t+h_n-h_m)\big\|_\alpha \geq \varepsilon_0. \tag{36}$$

За доведеним вище послідовність $\{h_n\}$ має таку підпослідовність $\{h_{n_k}\}$, що послідовність функцій $\{\xi(t+h_{n_k})\}$ збіжна у w-топології на півосі $t \geq 0$. Це суперечить нерівності (36).

Тепер покажемо, що гранична функція $p(t)$ задовольняє нерівність $\big\|p(t+\tau) - p(t)\big\|_\alpha < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, $|t - \tilde{\tau}_k| > \varepsilon$. Вибираючи ν_n з достатньо великим n, отримуємо нерівність $\big\|\xi(t+\nu_n+\tau) - \xi(t+\nu_n)\big\|_\alpha < \varepsilon$ для $t \geq T(\varepsilon) - \nu_n, t+\tau \geq T_1(\varepsilon) - \nu_n$ і $|t+\theta_n - \tilde{\tau}_k| > \varepsilon$. Зафіксуємо t, τ і виберемо достатньо велике n так, що виконуються останні нерівності. Переходячи до границі при $n \to \infty$, отримуємо $\big\|p(t+\tau) - p(t)\big\|_\alpha < \varepsilon$. Ця нерівність виконується для $t \in \mathbb{R}$, $|t - \tilde{\tau}_k| > \varepsilon$ і відносно щільної множини ε-майже періодів τ. Отже, функція $p(t)$ w-майже періодична.

Виберемо таку послідовність дійсних чисел $\{\theta_k\}$, що $\theta_{k+1} > \theta_k$ і $\theta_k \to \infty$, $k \to \infty$, і виконуються умови:

a$'_1$) існує послідовність $\tilde{\alpha}(m)$ така, що $\lim_{m\to\infty}(\tau_{i+\tilde{\alpha}(m)} - \theta_m) = \tau_i$, $\lim_{m\to\infty} D_{i+\tilde{\alpha}(m)} = D_i$, $\lim_{m\to\infty} P_{i+\tilde{\alpha}(m)} = P_i$ рівномірно по $i \in \mathbb{Z}$;

a$'_2$) $F(t+\theta_m, w)$ прямує до $F(t,w)$ у w-топології рівномірно відносно w, $\|w\|_\alpha \leq K$;

a$'_3$) $\xi(\theta_m)$ збігається у просторі X^α до деякого елемента $\tilde{\zeta}_0$.

Позначимо через $p_*(t)$ побудовану за цією послідовністю w-майже періодичну функцію $\mathbb{R} \to X^\alpha$. Доведемо, що вона задовольняє рівняння (17), (18). Функція $p_*(t)$ будується як границя послідовності функцій $\tilde{\xi}(t+\theta_m)$, які задовольняють рівняння

$$\frac{dw}{dt} + A_1 w = F(t+\theta_m, w),$$
$$w(\tau_{i+\tilde{\alpha}(m)} - \theta_m + 0) = w(\tau_{i+\tilde{\alpha}(m)} - \theta_m) + G_{i+\tilde{\alpha}(m)}\big(w(\tau_{i+\tilde{\alpha}(m)} - \theta_m)\big), \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Виберемо відрізок $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$, який не містить точок імпульсів τ_i і точок $\tau_{i+\tilde{\alpha}(m)} - \theta_m$ при досить великих m. На відрізку $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$ розв'язок $\tilde{\xi}(t+\theta_m)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$\tilde{\xi}(t+\theta_m) = e^{-A_1(t-\bar{t}_1)}\tilde{\xi}(\bar{t}_1+\theta_m) + \int_{\bar{t}_1}^{t} e^{-A_1(t-s)} F\big(s+\theta_m, \tilde{\xi}(s+\theta_m)\big)\, ds.$$

Переходячи в останньому рівнянні до границі при $m \to \infty$, отримуємо інтегральне рівняння для $p_*(t)$:

$$p_*(t) = e^{-A_1(t-\bar{t}_1)} p_*(\bar{t}_1) + \int_{\bar{t}_1}^{t} e^{-A_1(t-s)} F(s, p_*(s))\, ds.$$

За лемою 3.3.2 з [21] неперервний розв'язок $(\bar{t}_1, \bar{t}_2) \to X^\alpha$ цього інтегрального рівняння є класичним розв'язком рівняння (17), (18) у банаховому просторі X. Аналогічно [23] показуємо, що якщо α задовольняє нерівності

$$2\alpha - n/p \geq \nu > 0, \quad \alpha < 1, \tag{37}$$

то задача без імпульсів (1), (2) з початковою функцією $w_0 \in X^\alpha, w_0(.) \geq 0$, має єдиний класичний розв'язок $(u(t,x), v(t,x))$, який існує для всіх $t > 0$. Імпульсні умови задовольняються за побудовою. При виконанні нерівностей (37) простір X^α неперервно вкладений у простір C^ν. Отже, розв'язок $p_*(t)$ є w-майже періодичним як функція $\mathbb{R} \to C(\Omega)$.

Теорему 3 доведено.

Література

1. *Akhmet M. U., Beklioglu M., Ergenc T., Tkachenko V. I.* An impulsive ratio-dependent predator-prey system with diffusion // Nonlinear Anal.: Real World Appl. – 2006. – **7**, № 5. – P. 1255 – 1267.
2. *Dvirnyj A. I., Slyn'ko V. I.* Stability in terms of two measures for a class of semilinear impulsive parabolic equations // Sb. Math. – 2013. – **204**, № 4. – P. 485 – 507.
3. *Li C., Guo X., He D.* An impulsive diffusion predator-prey system in three-species with Beddington – DeAngelis response // J. Appl. Math. and Comput. – 2013. – **43**, № 1-2. – P. 235 – 248.
4. *Struk O. O., Tkachenko V. I.* On impulsive Lotka – Volterra systems with diffusion // Ukr. Math. J. – 2002. – **54**, № 4. – P. 629 – 646.
5. *Wang X., Li Z.* Global attractivity and oscillations in a nonlinear impulsive parabolic equation with delay // Kyungpook Math. J. – 2008. – **48**, № 4. – P. 593 – 611.
6. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 310 с.
7. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci. Publ., 1995. – x + 462 p.
8. *Akhmetov M. U., Perestyuk N. A.* Periodic and almost periodic solutions of strongly nonlinear impulse systems // J. Appl. Math. and Mech. – 1992. – **56**, № 6. – P. 829 – 837.
9. *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* Almost periodic solutions for systems with delay and nonfixed times of impulsive actions // Ukr. Math. J. – 2017. – **68**, № 11. – P. 1673 – 1693.
10. *Hakl R., Pinto M., Tkachenko V., Trofimchuk S.* Almost periodic evolution systems with impulse action at state-dependent moments // J. Math. Anal. and Appl. – 2017. – **446**, № 1. – P. 1030 – 1045.
11. *Pinto M., Robledo G.* Existence and stability of almost periodic solutions in impulsive neural network models // Appl. Math. and Comput. – 2010. – **217**, № 8. – P. 4167 – 4177.
12. *Samoilenko A. M., Trofimchuk S. I.* Almost periodic impulsive systems // Different. Equat. – 1993. – **29**, № 4. – P. 684 – 691.
13. *Stamov G. T.* Almost periodic solutions of impulsive differential equations // Lect. Notes Math. – 2012. – **2047**. – xx + 217 p.
14. *Tkachenko V.* Almost periodic solutions of parabolic type equations with impulsive action // Funct. Different. Equat. – 2014. – **21**, № 3-4. – P. 155 – 169.
15. *Tkachenko V.* Almost periodic solutions of evolution differential equations with impulsive action // Math. Modeling and Appl. Nonlinear Dynamics. – New York: Springer, 2016. – P. 161 – 205.
16. *Coppel W. A.* Almost periodic properties of ordinary differential equations // Ann. Mat. Pura ed Appl. Ser. 4. – 1967. – **76**, № 1. – P. 27 – 49.
17. *Yoshizawa T.* Asymptotically almost periodic solutions of an almost periodic system // Funkc. Ekvacioj. – 1969. – **12**, № 1. – P. 23 – 40.
18. *Myslo Y. M., Tkachenko V. I.* Global attractivity in almost periodic single species models // Funct. Different. Equat. – 2011. – **18**, № 3-4. – P. 269 – 278.
19. *Samoilenko A. M., Trofimchuk S. I.* Unbounded functions with almost periodic differences // Ukr. Math. J. – 1991. – **43**, № 10. – P. 1306 – 1309.
20. *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* On the stability of solutions of evolutionary equations with nonfixed times of pulse actions // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, № 4. – P. 425 – 439.
21. *Henry D.* Geometric theory of semilinear parabolic equations // Lect. Notes Math. – 1981. – **840**. – iv + 348 p.
22. *Smith L. H.* Dynamics of competition // Lect. Notes Math. – 1999. – **1714**. – P. 192 – 240.
23. *Alikakos N. D.* An application of the invariance principle to reaction-diffusion equations // J. Different. Equat. – 1979. – **33**, № 2. – P. 201 – 225.

Одержано 01.12.17