УДК 517.927

В. А. Михайлец (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
О. Б. Пелехата, Н. В. Рева (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ им. И. Сикорского”)

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

We study the uniform limit with respect to a parameter for the solutions of a sequence of general boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations of any order on a finite interval. An essential generalization of the Kiguradze theorem (1987) for these problems is obtained.

Досліджується границя за параметром у рівномірній нормі розв'язків послідовності загальних крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку на скінченному інтервалі. Отримано істотне узагальнення теореми І. Т. Кігурадзе (1987 р.) щодо таких задач.

1. Введение. Предельные теоремы для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений используются во многих задачах современного анализа и его приложений. Становление и развитие этого научного направления связано с фундаментальными результатами известных математиков. Так, И. И. Гихман [1], а позднее М. А. Красносельский и С. Г. Крейн [2], Я. Курцвейль и З. Ворел [3], А. М. Самойленко [4, 5] доказали ряд важных теорем о характере зависимости решений дифференциальных уравнений и систем от параметра. Часть их связана с обоснованием известного принципа усреднения Н. Н. Боголюбова (см., например, [6]) в нелинейной механике и характеризуется единой точкой зрения на линейный и нелинейный случаи. Применительно к линейным задачам Коши эти результаты существенно усилены в работах [8 – 12]. Более сложный случай общих линейных краевых задач исследовал И. Т. Кигурадзе [7]. Эти результаты получили дальнейшее развитие в работах первого из авторов и его учеников [13 – 15]. Целью данной работы является обобщение результатов [7] применительно к линейным системам дифференциальных уравнений произвольного порядка. При этом авторы стремились к поиску конструктивных условий, обеспечивающих равномерную сходимость последовательности решений к решению предельной краевой задачи. Отметим, что подобные результаты имеют содержательные применения в теории одномерных дифференциальных операторов с обобщенными функциями в коэффициентах [16 – 18].

2. Постановка задачи. Рассмотрим на конечном интервале $(a,b)\subset\mathbb{R}$ систему $m\in\mathbb{N}$ линейных дифференциальных уравнений порядка $r\in\mathbb{N}$

$$y^{(r)}(t,0)+A_{r-1}(t,0)y^{(n-1)}(t,0)+\ldots+A_0(t,0)y(t,0)=f(t,0) \qquad (1)$$

с общими неоднородными краевыми условиями

$$B_j(0)y(\cdot,0)=c_j(0),\quad j\in\{1,2,\ldots,r\}=:[r], \qquad (2)$$

где линейные непрерывные операторы

$$B_j(0)\colon C^{(r-1)}\left([a,b];\mathbb{C}^m\right)\to\mathbb{C}^m,\quad j\in[r].$$

Предполагается, что матрицы-функции $A_{j-1}(\cdot,0)$ принадлежат $L\left([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}\right)$, вектор-функция $f(\cdot,0)$ принадлежит $L([a,b];\mathbb{C}^m)$, а векторы $c_j(0)$ принадлежат $\mathbb{C}^m$.

Под решением системы дифференциальных уравнений (1) понимается вектор-функция $y(\cdot, 0) \in W_1^r([a,b];\mathbb{C}^m)$, которая абсолютно непрерывна на отрезке $[a,b]$ вместе со своими производными до порядка $r-1$ и удовлетворяет векторному уравнению (1) почти всюду. Неоднородные краевые условия (2) корректно определены на решениях системы (1) и охватывают все классические виды краевых условий. Краевая задача (1), (2) является фредгольмовой с нулевым индексом. Поэтому для того чтобы задача была однозначно всюду разрешима, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная краевая задача имела только тривиальное решение.

Пусть теперь наряду с задачей (1), (2) задана последовательность неоднородных краевых задач

$$y^{(r)}(t,n) + A_{r-1}(t,n)y^{(r-1)}(t,n) + \ldots + A_0(t,n)y(t,n) = f(t,n) \tag{3}$$

с краевыми условиями

$$B_j(n)y(\cdot,n) = c_j(n), \tag{4}$$

где $j \in [r]$, $n \in \mathbb{N}$, матрицы-функции $A_{j-1}(\cdot,n)$, операторы $B_j(n)$, вектор-функции $f(\cdot,n)$ и векторы $c_j(n)$ удовлетворяют приведенным выше условиям для задачи (1), (2).

Пусть решение однородной задачи (1), (2) однозначно определено. Тогда представляют интерес следующие задачи:

1. При каких условиях на левые части задач (3), (4) ее решения $y(\cdot,n)$ существуют и единственны при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$?

2. Какие дополнительные условия на левые и правые части задач (3), (4) гарантируют, что

$$\left\| y^{(j-1)}(\cdot,0) - y^{(j-1)}(\cdot,n) \right\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty, \quad j \in [r], \tag{5}$$

где $\|\cdot\|_\infty$ — $\sup$-норма на отрезке $[a,b]$?

По-видимому, впервые эти вопросы были исследованы И. Т. Кигурадзе [7] применительно к случаю $r = 1$. При этом предполагалось, что все функции в задачах являются вещественнозначными. Формулировки этих и некоторых последующих результатов приведены в следующем пункте.

3. Формулировки результатов. Всюду далее будем считать, не оговаривая этого особо, что $j \in [r]$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, а все асимптотические соотношения будем рассматривать при $n \to \infty$. Введем некоторые обозначения:

$$R_{A_{j-1}}(\cdot,n) := A_{j-1}(\cdot,0) - A_{j-1}(\cdot,n) \in L([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}),$$

$$F(\cdot,n) := \begin{bmatrix} f_1(\cdot,n) & 0 & \ldots & 0 \\ f_2(\cdot,n) & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(\cdot,n) & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \in L([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}),$$

$$R_F(\cdot,n) := F(\cdot,0) - F(\cdot,n),$$

$$R_F^{\vee}(t,n) := \int\limits_a^t R_F(s,n)ds, \quad R_{A_{j-1}}^{\vee}(t,n) := \int\limits_a^t R_{A_{j-1}}(s,n)ds,$$

$\|\cdot\|_1$ — норма в пространстве Лебега вектор(матриц)-функций на отрезке $[a,b]$.

Для случая $r=1$ в работе [7] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть:*

(0) *однородная краевая задача* (1), (2) *имеет только тривиальное решение;*

(I) $\|R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_{\infty}\to 0;$

(II) $\|R_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_1=O(1);$

(III) $B_j(n)y\to B_j(0)y,\ y(\cdot)\in C^{(r-1)}([a,b];\mathbb{C}^m).$

Тогда для достаточно больших n *задачи* (3), (4) *однозначно всюду разрешимы. Если, кроме того, выполнены условия на правые части задач:*

(IV) $c_j(n)\to c_j(0);$

(V) $\|R^{\vee}_F(\cdot,n)\|_{\infty}\to 0,$

то единственные решения задач (1), (2) *и* (3), (4) *удовлетворяют предельному равенству* (5).

Примеры показывают, что в теореме Кигурадзе все условия являются существенными и ни одно из них нельзя опустить. Однако часть условий можно ослабить. В частности, в работе [13] для случая $r=1$ доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Утверждения теоремы* 1 *останутся правильными, если заменить условие* (II) *на более слабое*

(II)′ $\left\|R_{A_{r-1}}(\cdot,n)R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot,n)\right\|_1\to 0$

и потребовать, чтобы

(VI) $\|F(\cdot,n)\|_1=O(1).$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 3. *В формулировке теоремы* 2 *условие* (VI) *можно заменить условием*

(VI)′ $\|R_{A_{r-1}}(\cdot,n)R^{\vee}_F(\cdot,n)\|_1\to 0.$

Эта теорема обобщает теорему 1 и дополняет теорему 2.

Из неравенств

$$\left\|R_{A_{r-1}}(\cdot,n)R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot,n)\right\|_1\le\|R_{A_{r-1}}(\cdot,n)\|_1\,\|R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_{\infty},$$

$$\left\|R_{A_{r-1}}(\cdot,n)R^{\vee}_F(\cdot,n)\right\|_1\le\|R_{A_{r-1}}(\cdot,n)\|_1\,\|R^{\vee}_F(\cdot,n)\|_{\infty}$$

следует, что условия (II)′ и (VI)′ выполняются, если

$$\|R_{A_{r-1}}(\cdot,n)\|_1\,\|R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_{\infty}\to 0,$$

$$\|R_{A_{r-1}}(\cdot,n)\|_1\,\|R^{\vee}_F(\cdot,n)\|_{\infty}\to 0.$$

Последние условия заведомо выполнены, если $\|A_{r-1}(\cdot,n)\|_1=O(1)$ и выполнены условия (I) и (V) теоремы 1. При этом предположения, что

$$\|A_{j-1}(\cdot,n)\|_1=O(1),\quad j\in[r-1],$$

излишни.

4. Доказательство теоремы 3. Сначала рассмотрим случай $r = 1$. В этом случае краевые задачи (1), (2) и (3), (4) примут вид

$$y'(t,n) + A_0(t,n)y(t,n) = f(t,n), \quad B_1(n)y(\cdot,n) = c_1(n), \tag{6}$$

где соответственно $n = 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Налагаемые на задачи (6) условия теперь можно записать в виде

(I) $\left\|R^{\vee}_{A_0}(\cdot,n)\right\|_{\infty} \to 0;$
(II)$'$ $\left\|R_{A_0}(\cdot,n)R^{\vee}_{A_0}(\cdot,n)\right\|_1 \to 0;$
(III) $B_1(n)y \to B_1(0)y,\ y(\cdot) \in C([a,b];\mathbb{C}^m);$
(IV) $c_1(n) \to c_1(0);$
(V) $\|R^{\vee}_F(\cdot,n)\|_{\infty} \to 0;$
(VI)$'$ $\|R_{A_0}(\cdot,n)R^{\vee}_F(\cdot,n)\|_1 \to 0.$

Однозначная всюду разрешимость задачи (3), (4) следует из теоремы 2. Поэтому достаточно доказать предельное соотношение.

Наряду с исходными неоднородными краевыми задачами (6) относительно вектор-функций $y(\cdot,n)$ рассмотрим еще три векторные полуоднородные последовательности задач:

$$z'(t,n) + A_0(t,n)z(t,n) = 0, \quad B_1(n)z(\cdot,n) = c_1(n), \tag{7}$$

$$x'(t,n) + A_0(t,n)x(t,n) = f(t,n), \quad x(a,n) \equiv 0, \tag{8}$$

$$w'(t,n) + A_0(t,n)w(t,n) = f(t,n), \quad B_1(n)w(\cdot,n) \equiv 0. \tag{9}$$

Как известно, краевая задача (8) (задача Коши) всегда имеет решение и оно единственно. Из первой части теоремы 2 следует, что задачи (7) и (9) для достаточно больших n имеют единственные решения. При $n = 0$ этот факт следует из предположения (0) и фредгольмовости с нулевым индексом рассматриваемых задач. Отсюда следует, что при $n >> 1$

$$y(\cdot,n) = z(\cdot,n) + w(\cdot,n).$$

Поэтому для доказательства теоремы 3 достаточно показать, что при ее условиях

$$\|z(\cdot,0) - z(\cdot,n)\|_{\infty} \to 0, \tag{10}$$

$$\|w(\cdot,0) - w(\cdot,n)\|_{\infty} \to 0. \tag{11}$$

Асимптотическое равенство (10) следует из второй части теоремы 2.

Лемма 1. *Если выполнены предположения* (I), (II)$'$, (VI)$'$, *то*

$$\|x(\cdot,0) - x(\cdot,n)\|_{\infty} \to 0. \tag{12}$$

Доказательство. Определим по заданным матрицам-функциям $A_0(\cdot,n)$ и $F(\cdot,n)$ блочные $(2m \times 2m)$ матрицы-функции

$$A_F(\cdot,n) := \begin{pmatrix} A_0(\cdot,n) & F(\cdot,n) \\ 0_m & 0_m \end{pmatrix}, \quad R_{AF}(\cdot,n) := A_F(\cdot,0) - A_F(\cdot,n),$$

$$R^{\vee}_{AF}(t,n) := \int\limits_a^t R_{AF}(s,n)ds.$$

Рассмотрим теперь матричные задачи Коши

$$S'(t,n) + A_F(t,n)S(t,n) = 0, \quad S(a,n) = I_{2m}. \tag{13}$$

Тогда

$$R_{AF}(\cdot,n)R^{\vee}_{AF}(\cdot,n) = \begin{pmatrix} R_{A_0}(\cdot,n)R^{\vee}_{A_0}(\cdot,n) & R_{A_0}(\cdot,n)R^{\vee}_{F}(\cdot,n) \\ 0_m & 0_m \end{pmatrix},$$

откуда в силу предположений (II)$'$ и (VI)$'$

$$\left\|R_{AF}(\cdot,n)R^{\vee}_{AF}(\cdot,n)\right\|_1 = \left\|R_{A_0}(\cdot,n)R^{\vee}_{A_0}(\cdot,n)\right\|_1 + \left\|R_{A_0}(\cdot,n)R^{\vee}_{F}(\cdot,n)\right\|_1 \to 0,$$

а в силу (I)

$$\left\|R^{\vee}_{AF}(\cdot,n)\right\|_\infty = \left\|R^{\vee}_{A_0}(\cdot,n)\right\|_\infty + \left\|R^{\vee}_{F}(\cdot,n)\right\|_\infty \to 0.$$

Отсюда в соответствии с теоремой Левина [10, 11] следует, что

$$\|S(\cdot,0) - S(\cdot,n)\|_\infty \to 0. \tag{14}$$

Рассмотрим теперь последовательность матричных задач

$$T'(t,n) + A_F(t,n)T(t,n) = 0, \quad T(a,n) = C \in \mathbb{C}^{2m\times 2m}. \tag{15}$$

Решения этих задач можно записать в виде

$$T(\cdot,n) = S(\cdot,n)C.$$

Поэтому

$$\|T(\cdot,0) - T(\cdot,n)\|_\infty = \|\left(S(\cdot,0) - S(\cdot,n)\right)C\|_\infty \le \|S(\cdot,0) - S(\cdot,n)\|_\infty\|C\| \to 0.$$

Определим для решений $x(\cdot,n) = (x_1(\cdot,n), x_2(\cdot,n), \ldots, x_m(\cdot,n))$ краевых задач (8) матрицы-функции

$$X(\cdot,n) := \begin{pmatrix} x_1(\cdot,n) & 0 & \ldots & 0 \\ x_2(\cdot,n) & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m(\cdot,n) & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Векторные краевые задачи (8) равносильны матричным задачам

$$X'(t,n) + A_0(t,n)X(t,n) = F(t,n), \quad X(a,n) \equiv 0. \tag{16}$$

Нетрудно убедиться, что решения задач (15) и (16) связаны между собой равенствами

$$T(\cdot,n) = \begin{pmatrix} X(\cdot,n) & 0_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}, \quad C \equiv \begin{pmatrix} 0_m & 0_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}.$$

Поэтому из доказанного выше соотношения следует, что

$$\|x(\cdot,0) - x(\cdot,n)\|_\infty = \|X(\cdot,0) - X(\cdot,n)\|_\infty = \|T(\cdot,0) - T(\cdot,n)\|_\infty \to 0.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *В условиях теоремы* 3 *выполняется предельное равенство* (11).

Доказательство. Положим

$$v(\cdot, n) := x(\cdot, n) - w(\cdot, n).$$

Тогда вектор-функции $v(\cdot, n)$ являются решениями краевых задач

$$v'(t, n) + A_0(t, n)v(t, n) = 0, \quad B_1(n)v(\cdot, n) = B_1(n)x(\cdot, n) =: \widetilde{c}_1(n).$$

Но

$$\|B_1(0)x(\cdot, 0) - B_1(n)x(\cdot, n)\| \leq \|(B_1(0) - B_1(n))x(\cdot, 0)\| + \|B_1(n)\|\|x(\cdot, 0) - x(\cdot, n)\|_\infty. \quad (17)$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (17) стремится к нулю в силу предположения (III). Из этого же условия в силу принципа равномерной ограниченности для линейных операторов следует также, что $\|B_1(n)\| = O(1)$. Поэтому из соотношения (12) следует, что левая часть неравенства (17) стремится к нулю, т. е. $\widetilde{c}_1(n) \to \widetilde{c}_1(0)$. Но

$$v(\cdot, n) = Y(\cdot, n)\, \overline{c}_1(n),$$

где вектор $\overline{c}_1(n)$ принадлежит $\mathbb{C}^m$ и $Y(\cdot, n)$ — матричное решение задачи Коши

$$Y'(t, n) + A_0(t, n)Y(t, n) = 0, \quad Y(a, n) = I_m,$$

а векторы $\overline{c}_1(n)$ и $\widetilde{c}_1(n)$ связаны между собой равенством

$$[B_1(n)Y(\cdot, n)]\, \overline{c}_1(n) = \widetilde{c}_1(n).$$

Здесь скобки Кигурадзе

$$[B_1(n)\, Y(\cdot, n)] \quad (18)$$

обозначают числовую $(m \times m)$-матрицу, k-й столбец которой совпадает с действием оператора $B_1(n)$ на k-й столбец квадратной матрицы $Y(\cdot, n)$. Из однозначной разрешимости краевых задач (7) при $n >> 1$ следует [13], что матрицы (18) обратимы при достаточно больших n и

$$\overline{c}_1(n) = [B_1(n)\, Y(\cdot, n)]^{-1}\, \widetilde{c}_1(n) \to [B_1(0)\, Y(\cdot, 0)]^{-1}\, \widetilde{c}_1(0) = \overline{c}_1(0).$$

Отсюда следует, что

$$\|v(\cdot, 0) - v(\cdot, n)\|_\infty \to 0. \quad (19)$$

Поэтому соотношение (11) следует из равенств $w(\cdot, n) = x(\cdot, n) - v(\cdot, n)$ и соотношений (12), (19).

Лемма 2 доказана, а вместе с ней доказана и теорема 3 для случая $r = 1$.

Покажем, что случай $r \geq 2$ может быть редуцирован к случаю $r = 1$.

Дифференциальные уравнения (1) и (3) порядка $r \geq 2$ сводятся к системе $m' = rm$ дифференциальных уравнений первого порядка

$$x'(t, n) + \widetilde{A}_0(t, n)x(t, n) = \widetilde{f}(t, n), \quad (20)$$

если положить

$$x(\cdot,n) := \Big(y(\cdot,n), y'(\cdot,n), \ldots, y^{(r-1)}(\cdot,n)\Big), \quad \widetilde{f}(\cdot,n) := (0,\ldots,0,f(\cdot,n)) \in L([a,b];\mathbb{C}^{rm}),$$

а блочную матрицу-функцию $\widetilde{A}_0(\cdot,n)$ определить равенством

$$\widetilde{A}_0(\cdot,n) := \begin{bmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \ldots & 0_m \\ 0_m & 0_m & I_m & \ldots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & \ldots & I_m \\ -A_0(\cdot,n) & -A_1(\cdot,n) & -A_2(\cdot,n) & \ldots & -A_{r-1}(\cdot,n) \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Каждый из операторов $B_j(n)$ в краевых условиях (2), (4) допускает однозначное представление [19]

$$B_j(n)y = \sum_{l=1}^{r-1} \alpha_{j,l}(n) y^{(l-1)}(a) + \int_a^b [d\Phi_j(t,n)]\, y^{(r-1)}(t), \tag{22}$$

где числовые матрицы $\alpha_{j,l}(n)$ принадлежат $\mathbb{C}^{m\times m}$, $(m\times m)$-матрицы-функции $\Phi_j(\cdot,n)$ имеют ограниченную вариацию на $[a,b]$, непрерывны слева на интервале (a,b) и $\Phi_j(a,n)=0_m$, а интеграл в (22) понимается как интеграл Римана – Стильтьеса.

Определим, исходя из формулы (22), r^2 линейных операторов

$$B_{j,l}(n)\colon C^{(r-1)}\left([a,b];\mathbb{C}^m\right) \to \mathbb{C}^m,$$

полагая для $j,l \in [r]$

$$B_{j,l}(n)y := \alpha_{j,l}(n) y^{(l-1)}, \quad l \in [r-1], \tag{23}$$

$$B_{j,r}(n)y := \int_a^b [d\Phi_j(t,n)]\, y^{(r-1)}(t). \tag{24}$$

Определим теперь операторы $\widetilde{B}_1(n)$, положив

$$\widetilde{B}_1(n) := \begin{bmatrix} B_{1,1}(n) & \ldots & B_{1,r}(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r,1}(n) & \ldots & B_{r,r}(n) \end{bmatrix}, \quad \widetilde{c}_1(n) := (c_1(n),\ldots,c_r(n)) \in \mathbb{C}^{rm}. \tag{25}$$

Лемма 3 [19]. *Неоднородные краевые задачи* (1), (2) *и* (3), (4) *эквивалентны неоднородным краевым задачам для системы дифференциальных уравнений* (20) *с краевыми условиями*

$$\widetilde{B}_1(n)y = \widetilde{c}_1(n), \tag{26}$$

которые задаются формулами (23) – (25).

Из результатов работы [19] также вытекает следующее утверждение.

Лемма 4. *Если для краевых задач вида* (1), (2) *и* (3), (4) *выполнены условия теоремы* 3, *то задачи вида* (20) – (26) *также удовлетворяют условиям этой теоремы.*

Утверждения теоремы 3 вытекают из лемм 3, 4 и уже доказанного утверждения теоремы для случая $r=1$.

Литература

1. *Гихман И. И.* По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова // Укр. мат. журн. – 1952. – **4**, № 2. — С. 215 – 219.
2. *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи мат. наук. – 1955. – **10**, вып. 3. – С. 147 – 153.
3. *Курцвейль Я., Ворел З.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Чех. мат. журн. – 1957. – **7**, № 4. – С. 568 – 583.
4. *Самойленко А. М.* Про неперервну залежність розв'язків диференціальних рівнянь від параметра // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1962. – № 10. – С. 1290 – 1293.
5. *Самойленко А. М.* Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Укр. мат. журн. – 1962. – **14**, № 3. – С. 289 – 298.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1958. – 410 с.
7. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Совр. пробл. математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ. — 1987. — **30**. — С. 3 – 103.
8. *Reid W. T.* Some limit theorems for ordinary differential systems // J. Different. Equat. – 1967. – **3**, № 3. – P. 423 – 439.
9. *Opial Z.* Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations // J. Different. Equat. – 1967. – **3**. – P. 571 – 579.
10. *Левин А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ // Докл. АН СССР. – 1967. – **176**, № 4. – С. 774 – 777.
11. *Левин А. Ю.* Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I // Вестн. Ярослав. ун-та. – 1973. – Вып. 5. – С. 105 – 132.
12. *Нгуен Тхе Хоан.* О зависимости от параметра решений линейной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, № 6. – С. 970 – 975.
13. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A., Reva N. V.* Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 1. — P. 77 – 90.
14. *Hnyp Y., Mikhailets V. A., Murach A. A.* Parameter-dependent one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces // Electron. J. Different. Equat. – 2017. – № 81. – P. 1 – 13.
15. *Mikhailets V. A., Murach A. A., Soldatov V.* Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems // Electron. J. Qual. Theory Different. Equat. – 2016. – № 87. – P. 1 – 16.
16. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Resolvent convergence of Sturm – Liouville operators with singular potentials // Math. Notes. – 2010. – **87**, № 2. – P. 287 – 292.
17. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of two-term differential equations with singular coefficients by quasiderivatives // Ukr. Math. J. – 2012. – **63**, № 9. – P. 1361 – 1378.
18. *Goriunov A. S.* Convergence and approximation of the Sturm – Liouville operators with potentials-distributions // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, № 5. – P. 680 – 689.
19. *Mikhailets V. A., Chekhanova G. A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems // J. Math. Sci. – 2015. – **204**, № 3. – P. 333 – 342.

Получено 30.10.17