УДК 517.968

В. А. Ферук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОДИН ВАРІАНТ ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ ДЛЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ФРЕДГОЛЬМА

We discuss the problem of application of Alpert's multiwavelets to the solution of Fredholm integral equations by the projection-iterative method.

Рассмотрен вопрос применения мультивейвлетового базиса к решению интегральных уравнений типа Фредгольма проекционно-итеративным методом.

Інтегральні рівняння, зокрема рівняння типу Фредгольма, та їх системи є математичними моделями різноманітних процесів у фізиці, хімії, біології, економіці тощо. Одним із основних напрямків теорії таких рівнянь є відшукання умов існування та розробка методів (точних чи наближених) побудови їх розв'язків. Різним аспектам дослідження методів наближеного розв'язування рівнянь типу Фредгольма присвячено публікації багатьох авторів, зокрема роботи Л. В. Канторовича, М. О. Красносельського, Г. М. Вайнікко, Б. Г. Габдулхаєва, С. Г. Міхліна, С. В. Переверзєва, Д. Ф. Трауба, Х. Вожняковського, А. Ю. Лучки, С. Г. Солодкого та багатьох інших. Однак, у зв'язку із широким колом застосувань, у літературі, зокрема іноземній, зберігається інтерес до побудови нових варіантів уже відомих методів: проекційного, колокаційного, ітераційного, методу Ньострема, методу інтерполяції тощо [1 – 11]. Одним із джерел нових ідей для досліджень у цьому напрямку є використання у цих методах різних систем базисних функцій: вейвлетів, поліномів Чебишова, Лежандра, Бернштейна, Хаара та ін. У даній роботі розглянуто питання застосування мультивейвлетового базису [12] до розв'язання інтегральних рівнянь типу Фредгольма методами проекційно-ітеративного типу [13].

Постановка задачі. Розглядається лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$x(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds. \tag{1}$$

Тут $K(t,s)$ — ядро, сумовне з квадратом в області $[a,b]\times[a,b]$, $f \in L_2[a,b]$, $x \in L_2[a,b]$.

Умови існування розв'язку інтегрального рівняння. Одними із перших питань, що виникають при розробці наближених методів розв'язання будь-якої математичної задачі, в тому числі і рівняння (1), є встановлення умов існування її розв'язку та умов, при яких наближення, побудовані за запропонованим методом, будуються однозначно і прямують до точного розв'язку розглядуваної задачі. Умови існування розв'язку рівняння (1) відомі. Наведемо один із таких критеріїв розв'язності [14, 15].

Для цього зведемо рівняння (1) до зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь. Нехай $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ — повна ортонормальна система функцій в $L_2[a,b]$. Введемо у розгляд величини

$$x_i = \int_a^b x(t)\varphi_i(t)\,dt, \qquad f_i = \int_a^b f(t)\varphi_i(t)\,dt, \qquad a_{ij} = \int_a^b\int_a^b K(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)\,dt\,ds. \tag{2}$$

Враховуючи (2), з інтегрального рівняння (1) отримуємо зліченновимірну систему алгебраїчних рівнянь

$$x_i - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j = f_i, \quad i = \overline{1, \infty},$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty. \tag{3}$$

Запишемо систему (3) у векторному вигляді

$$\Lambda z = g, \tag{4}$$

де

$$z = \operatorname{col}\big(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots\big) \in \ell_2, \qquad g = \operatorname{col}\big(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_i,\ \ldots\big) \in \ell_2, \tag{5}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1i} & \ldots \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \ldots & -a_{2i} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \ldots & 1-a_{ii} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Для рівняння (1) справедливим є таке твердження [14, 15].

Теорема 1. *Однорідне рівняння* (1) $(f(t) = 0)$ *має* r*-параметричну сім'ю розв'язків* $x \in \in L_2[a,b]$

$$x(t) = \Phi(t) P_{\Lambda_r} c_r \quad \forall c_r \in R^r. \tag{7}$$

Неоднорідне рівняння (1) *є розв'язним тоді і тільки тоді, коли виконуються* r *лінійно незалежних умов*

$$P_{\Lambda_r^*} g = 0, \tag{8}$$

і має r*-параметричну сім'ю розв'язків* $x \in L_2[a,b]$ *вигляду*

$$x(t) = \Phi(t) P_{\Lambda_r} c_r + \Phi(t) \Lambda^+ g \quad \forall c_r \in R^r. \tag{9}$$

Тут P_{Λ_r} *— матриця, яка складається із повної системи* r *лінійно незалежних стовпчиків матриці-проектора* P_Λ; $P_{\Lambda_r^*}$ *— матриця, яка складається із повної системи* r *лінійно незалежних рядків матриці-проектора* P_{Λ^*}, *де* P_Λ *та* P_{Λ^*} *— проектори на ядро та коядро матриці* Λ; Λ^+ *— псевдообернена* (*за Муром–Пенроузом*) *до матриці* Λ; $\Phi(t) = = \big(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \ldots,\ \varphi_i(t),\ \ldots\big)$.

***Зауваження* 1.** Якщо ядро $K(t,s)$ симетричне та невироджене і система власних функцій оператора

$$(Ky)(t) = \int_a^b K(t,s) y(s)\, ds \tag{10}$$

є відомою, то замість повної ортонормальної в $L_2[a,b]$ системи функцій $\big\{\varphi_i(t)\big\}_{i=1}^{\infty}$ можна взяти систему лінійно незалежних власних функцій оператора (10) [16].

***Зауваження* 2.** Якщо ядро $K(t,s)$ вироджене, то рівняння (1) розглядається у деякому скінченновимірному підпросторі простору $L_2[a,b]$, породженому системою лінійно незалежних власних функцій оператора (10), яка у цьому випадку замінює повну ортонормальну систему функцій $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ [16, 17].

Проекційно-ітеративний метод. Критерій розв'язності, наведений у попередньому пункті, дозволяє зробити висновок про існування та дає загальний вигляд розв'язку рівняння (1). Однак у деяких випадках побудова точного розв'язку рівняння (1) на основі зображення (9) викликає технічні труднощі і постає питання відшукання розв'язку розглядуваного рівняння наближено. Одними із наближених методів розв'язання рівняння (1), за умови існування у нього точного розв'язку, є методи проекційно-ітеративного типу. Розглянемо застосування до рівняння (1) одного із таких методів [13].

Нехай $\{\psi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ — система ортогональних функцій в $L_2[a,b]$. Суть методу щодо рівняння (1) полягає у тому, що послідовні наближення $x_k(t)$ визначаються на основі формул

$$z_k(t) = x_{k-1}(t) + w_k(t), \tag{11}$$

$$x_k(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s) z_k(s)\, ds, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

де поправка $w_k(t)$ шукається у вигляді

$$w_k(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \psi_j(t), \tag{13}$$

невідомі параметри a_j^k в якій визначаються з умов

$$\int_a^b \big(x_k(t) - z_k(t)\big)\psi_i(t)\, dt = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{14}$$

Зазначимо, що якщо поправка $w_k(t) = 0$ і умови (14) відсутні, то метод (11)–(14) вироджується у звичайний метод послідовних наближень, а при $x_0(t) = 0$, $k = 1$ наближення $z_1(t)$ та $x_1(t)$ збігаються з наближеннями, побудованими за проекційним методом та покращеним проекційним методом відповідно [3–6].

Встановимо умови, за яких можна побудувати наближені розв'язки рівняння (1) за проекційно-ітеративним методом (11)–(14). Для цього розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення параметрів a_j^k, яка отримується з формул (11)–(14):

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} a_j^k = b_i^k, \qquad i = \overline{1,n}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

де

$$\delta_{ij} = \int_a^b \left(\psi_j(t) - \int_a^b K(t,s)\psi_j(s)\, ds \right) \psi_i(t)\, dt,$$

$$b_i^k = \int_a^b \left(f(t) - x_{k-1}(t) + \int_a^b K(t,s) x_{k-1}(s) ds \right) \psi_i(t)\, dt.$$

Ввівши позначення

$$a_k = \operatorname{col}\left(a_1^k,\ a_2^k,\ \ldots,\ a_n^k\right), \qquad b_k = \operatorname{col}\left(b_1^k,\ b_2^k,\ \ldots,\ b_n^k\right),$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \ldots & \delta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \ldots & \delta_{nn} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

систему (15) можна записати у векторному вигляді

$$\Delta a_k = b_k. \tag{17}$$

Для того щоб система (17) була розв'язною, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови [14]

$$P_{\Delta_d^*} b_k = 0, \tag{18}$$

що можливо, зокрема, якщо

$$P_{\Delta_d^*} = 0. \tag{19}$$

Якщо виконуються умови (18), то система (17) буде мати розв'язок

$$a_k = P_{\Delta_d} c_d + \Delta^+ b_k \quad \forall c_d \in R^d. \tag{20}$$

Тут P_{Δ_d} — матриця, яка складається із повної системи d лінійно незалежних стовпчиків матриці-проектора P_Δ; $P_{\Delta_d^*}$ — матриця, яка складається із повної системи d лінійно незалежних рядків матриці-проектора P_{Δ^*}, де P_Δ та P_{Δ^*} — проектори на ядро та коядро матриці Δ; Δ^+ — псевдообернена (за Муром – Пенроузом) до матриці Δ.

Для того щоб послідовні наближення $x_k(t)$ за методом (11) – (14) визначались однозначно, припустимо, що

$$P_{\Delta_d} = 0. \tag{21}$$

Тоді $\Delta^+ = \Delta^{-1}$ і система (17) матиме єдиний розв'язок вигляду

$$a_k = \Delta^{-1} b_k.$$

Умови (18), (21) означають, що метод (11) – (14) використовується для класу рівнянь вигляду (1), для яких при довільному $g \in L_2[a,b]$ існує єдиний розв'язок $w \in U[a,b]$ рівняння [13]

$$w(t) - (P_n K) w(t) = (P_n g)(t), \tag{22}$$

де оператор $K : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ має вигляд (10), а оператор $P_n : L_2[a,b] \to U[a,b]$ ортогонального проектування простору $L_2[a,b]$ на його підпростір $U[a,b]$, породжений системою ортогональних функцій $\left\{\psi_i(t)\right\}_{i=1}^n$, — вигляд

$$(P_n y)(t) := \int\limits_a^b P_n(t,s) y(s)\, ds, \tag{23}$$

$$P_n(t,s) = \Psi(t)\Gamma^{-1}\Psi^*(s), \qquad \Gamma = \int\limits_a^b \Psi^*(\xi)\Psi(\xi) d\xi,$$

$$\Psi(t) = \big(\psi_1(t),\ \psi_2(t),\ \ldots,\ \psi_n(t)\big).$$

***Зауваження* 3.** Системи функцій $\big\{\varphi_i(t)\big\}_{i=1}^{\infty}$ та $\big\{\psi_i(t)\big\}_{i=1}^{\infty}$ можуть збігатися. Тоді елементи, що знаходяться на перетині перших n рядків та перших n стовпчиків матриці Λ, збігаються з відповідними елементами матриці Δ.

У [13] за припущення, що система функцій $\{\psi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ є довільною системою лінійно незалежних функцій, встановлено умови збіжності та оцінки похибки методу (11) – (14) для рівняння (1). Також у [13] було досліджено випадки, коли система функцій $\{\psi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ є системою алгебраїчних, тригонометричних поліномів та інтерполяційних сплайнів. У даній роботі розглянуто використання у проекційно-ітеративному методі (11) – (14) мультивейвлетового базису. Наведено порівняння такого варіанту проекційно-ітеративного методу і WG та IWG методів [3 – 6].

Многочлени Лежандра та мультивейвлетовий базис. Нагадаємо деякі відомі факти з теорії ортогональних многочленів. Многочленами Лежандра називаються алгебраїчні многочлени, ортогональні на відрізку $[-1, 1]$, що найменше відхиляються від нуля в розумінні середнього квадратичного [18]. Вони утворюють базис у просторі $L_2[-1, 1]$. Многочлени, отримані із многочленів Лежандра за допомогою афінного перетворення $t \mapsto 2t - 1$, називаються зсунутими многочленами Лежандра і утворюють базис у просторі $L_2[0, 1]$. Наприклад, для $n = 4$ зсунуті многочленами Лежандра мають вигляд

$$p_1(t) = 1, \qquad p_2(t) = \sqrt{3}(2t - 1),$$
$$p_3(t) = \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1), \qquad p_4(t) = \sqrt{7}(20t^3 - 30t^2 + 12t - 1).$$

Нехай $\nu \in \mathbb{N}$, $m = 0, 1, 2, \ldots.$ Визначимо множину S_m^{ν} кусково-поліноміальних функцій, таких, що на інтервалах $(2^{-m}n, 2^{-m}(n+1)) \subset [0, 1]$ вони є поліномами порядку меншого ніж ν для $n = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$ та дорівнюють нулю за межами цих інтервалів. Мультивейвлетовим базисом порядку ν в $L_2[0, 1]$ називається повна ортогональна система функцій на S_m^{ν}, що має вигляд [12]

$$B_{\nu} = \{u_j(t), j = 1, \ldots, \nu\} \cup$$
$$\cup \big\{h_{j,m}^n(t), m = 0, 1, 2, \ldots, n = 0, 1, \ldots, 2^m - 1, j = 1, \ldots, \nu\big\} = \big\{b_j(t)\big\}_{j=1}^{2^m \nu}.$$

Тут $\big\{u_j(t)\big\}_{j=1}^{\nu}$ — ортогональний базис у S_0^{ν}, наприклад система зсунутих многочленів Лежандра $\big\{p_j(t)\big\}_{j=1}^{\nu}$, $h_{j,m}^n(t) = 2^{m/2} h_j(2^m t - n)$, де функції $h_j(t)$ є поліномами порядку меншого ніж ν, що задовольняють умови

$$\int\limits_0^1 h_j(t) t^i dt = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, \nu - 1.$$

Повною ортогональною системою функцій на S_1^2, наприклад, буде система

$$b_1(t) = 1, \qquad b_2(t) = \sqrt{3}(2t-1), \tag{24}$$

$$b_3(t) = \begin{cases} \sqrt{3}(4t-1), & 0 < t < 0{,}5, \\ \sqrt{3}(3-4t), & 0{,}5 < t < 1, \end{cases} \qquad b_4(t) = \begin{cases} 6t-1, & 0 < t < 0{,}5, \\ 6t-5, & 0{,}5 < t < 1. \end{cases} \tag{25}$$

Оцінки швидкості збіжності та похибки наближень проекційно-ітеративного, WG та IWG методів. Одним із важливих питань дослідження методу (11)–(14) є встановлення оцінок швидкості збіжності та похибки наближень, побудованих за цим методом. Щоб отримати такі оцінки у розглядуваному випадку, потрібно використати відповідні результати для методу (11)–(14), коли система функцій $\{\psi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ є довільною системою ортогональних функцій і результати теорій наближення мультивейвлетовим базисом є відомими.

Справедливим є такий результат [13].

Теорема 2. *Якщо виконується умова* (21) *та* $q_i < 1$ *при деякому фіксованому* i, *то при всіх* $n \geq i$ *послідовності* $\{z_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{x_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, *згідно з методом* (11)–(14), *будуються однозначно і справджуються оцінки швидкості збіжності*

$$\|x^*(t) - z_k(t)\| \leq l_n q_n^{k-1} \|v^*(t) - v_0(t)\|, \tag{26}$$

$$\|x^*(t) - x_k(t)\| \leq p_n q_n^{k-1} \|v^*(t) - v_0(t)\| \tag{27}$$

та конструктивні оцінки похибки методу

$$\|x^*(t) - z_k(t)\| \leq l_n (1-q_n)^{-1} \|v_k(t) - v_{k-1}(t)\|, \tag{28}$$

$$\|x^*(t) - x_k(t)\| \leq p_n (1-q_n)^{-1} \|v_k(t) - v_{k-1}(t)\|, \tag{29}$$

де

$$p_n^2 = \int_a^b \int_a^b |M_n(t,s)|^2 \, dt\, ds, \qquad q_n^2 = \int_a^b \int_a^b |L_n(t,s)|^2 \, dt\, ds, \qquad l_n^2 = 1 + p_n^2 - q_n^2, \tag{30}$$

$$v^*(t) - v_0(t) = x^*(t) - x_0(t) - (P_n x^*)(t) + (P_n x_0)(t),$$

$$v_k(t) - v_{k-1}(t) = x_k(t) - x_{k-1}(t) - (P_n x_k)(t) + (P_n x_{k-1})(t).$$

Ядра $M_n(t,s)$, $L_n(t,s)$, що фігурують у рівностях (30), визначаються за допомогою рекурентних співвідношень

$$M_i(t,s) = M_{i-1}(t,s) - \frac{1}{\sigma_i} \int_a^b M_{i-1}(t,\xi)\psi_i(\xi)d\xi \left(\psi_i(s) - \int_a^b \psi_i(\xi) M_{i-1}(\xi,s)d\xi \right), \tag{31}$$

$$\sigma_i = \int_a^b \psi_i^2(\xi)d\xi - \int_a^b \int_a^b \psi_i(\xi) M_{i-1}(\xi,s)d\xi \psi_i(s)\, ds, \quad i = \overline{1,n}, \qquad M_0(t,s) = K(t,s), \tag{32}$$

$$L_i(t,s) = L_{i-1}(t,s) - \frac{1}{\mu_i}\psi_i(t)\psi_i(s) + \frac{1}{\sigma_i} \left(\psi_i(t) - \int_a^b L_{i-1}(t,\xi)\psi_i(\xi)d\xi \right) \times$$

$$\times\left(\psi_i(s)-\int\limits_a^b \psi_i(\xi)M_{i-1}(\xi,s)d\xi\right),$$

$$\mu_i=\int\limits_a^b \psi_i^2(\xi)d\xi,\quad i=\overline{1,n},\qquad L_0(t,s)=K(t,s). \tag{33}$$

Нехай $[a,b]=[0,1]$ і система функцій $\{\psi_i(t)\}_{i=1}^n$ є мультивейвлетовим базисом $\{b_j(t)\}_{j=1}^{2m\nu}$. Звичайно, і у цьому випадку оцінки (26)–(29) є справедливими. Проте їх можна уточнити та навести оцінки швидкості збіжності та похибки методу (11)–(14), що враховують властивості системи $\{b_j(t)\}_{j=1}^{2m\nu}$.

Позначимо через P_m^ν оператор вигляду (23), що ортогонально проектує простір $L_2[0,1]$ на S_m^ν. Відомо, що для будь-якої функції $y\in C^\nu[0,1]$ справедливою є оцінка [12]

$$\big\|(P_m^\nu y)(t)-y(t)\big\|\le 2^{-m\nu}\frac{2}{4^\nu\nu!}\sup_{t\in[0,1]}\big|y^{(\nu)}(t)\big|. \tag{34}$$

Якщо $(x^*-x_0)\in C^\nu[0,1]$, то, згідно з (34), оцінки (26), (27) наберуть вигляду

$$\big\|x^*(t)-z_k(t)\big\|\le 2^{-m\nu}\frac{2l_nq_n^{k-1}}{4^\nu\nu!}\sup_{t\in[0,1]}\big|(x^*(t)-x_0(t))^{(\nu)}\big|, \tag{35}$$

$$\big\|x^*(t)-x_k(t)\big\|\le 2^{-m\nu}\frac{2p_nq_n^{k-1}}{4^\nu\nu!}\sup_{t\in[0,1]}\big|(x^*(t)-x_0(t))^{(\nu)}\big|, \tag{36}$$

а якщо $(x_k-x_{k-1})\in C^\nu[0,1]$ при деякому k, то справджуються оцінки

$$\big\|x^*(t)-z_k(t)\big\|\le 2^{-m\nu}\frac{2l_n}{4^\nu(1-q_n)\nu!}\sup_{t\in[0,1]}\big|(x_k(t)-x_{k-1}(t))^{(\nu)}\big|, \tag{37}$$

$$\big\|x^*(t)-x_k(t)\big\|\le 2^{-m\nu}\frac{2p_n}{4^\nu(1-q_n)\nu!}\sup_{t\in[0,1]}\big|(x_k(t)-x_{k-1}(t))^{(\nu)}\big|. \tag{38}$$

Отже, справедливим є такий результат.

Теорема 3. *Нехай система функцій* $\{\psi_i(t)\}_{i=1}^n$ *у проекційно-ітеративному методі* (11)–(14) *є мультивейвлетовим базисом* $\{b_j(t)\}_{j=1}^{2m\nu}$, *виконується умова* (21) *та* $q_i<1$ *при деякому фіксованому* i. *Тоді при всіх* $n\ge i$ *послідовності* $\{z_k(t)\}_{k=1}^\infty$, $\{x_k(t)\}_{k=1}^\infty$, *згідно з методом* (11)–(14), *будуються однозначно і справджуються оцінки швидкості збіжності* (35), (36) *та конструктивні оцінки похибки* (37), (38).

Якщо $x_0(t)=0$, то наближення $z_1(t)$ та $x_1(t)$, побудовані за методом (11)–(14) із мультивейвлетовим базисом, збігаються з наближеннями $u_n(t)$ та $u'_n(t)$, побудованими за WG та IWG методами відповідно і оцінки (35)–(38) містять у собі, як частинний випадок, оцінки швидкості збіжності та конструктивні оцінки похибки цих методів. Зокрема, з оцінки (35) випливає наведена у [3, 4] оцінка

$$\big\|x^*(t)-u_n(t)\big\|\le 2^{-m\nu}\frac{2l_n}{4^\nu\nu!}\sup_{t\in[0,1]}\big|(x^*(t))^{(\nu)}\big|, \tag{39}$$

а із (36) — наведена у [4, 5] оцінка

$$\left\|x^*(t) - u_n'(t)\right\| \le 2^{-m\nu}\frac{2p_n}{4^\nu \nu!}\sup_{t\in[0,1]}\left|(x^*(t))^{(\nu)}\right|. \tag{40}$$

Також із оцінок (37), (38) випливають конструктивні оцінки похибки WG та IWG методів

$$\left\|x^*(t) - u_n(t)\right\| \le 2^{-m\nu}\frac{2l_n}{4^\nu(1-q_n)\nu!}\sup_{t\in[0,1]}\left|(u_n'(t))^{(\nu)}\right|, \tag{41}$$

$$\left\|x^*(t) - u_n'(t)\right\| \le 2^{-m\nu}\frac{2p_n}{4^\nu(1-q_n)\nu!}\sup_{t\in[0,1]}\left|(u_n'(t))^{(\nu)}\right|, \tag{42}$$

які автору у літературі не зустрічалися.

Отже, порівнюючи оцінки (35)–(38) та (39)–(42), бачимо, що запропонований варіант проекційно-ітеративного методу (11)–(14) із мультивейвлетовим базисом $\{b_j(t)\}_{j=1}^{2m\nu}$ дозволяє будувати наближення $\{z_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{x_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, відхилення яких від точного розв'язку рівняння (1) будуть меншими, ніж відхилення наближень $u_n(t)$ та $u_n'(t)$, побудованих за WG та IWG методами відповідно. Справді, якщо $q_n < 1$, то при $k = 2$ похибка наближення $z_2(t)$, побудованого за методом (11)–(14), буде меншою, ніж похибка наближення $u_n(t)$, побудованого за WG методом, а похибка наближення $x_2(t)$, побудованого за методом (11)–(14), буде меншою, ніж похибки наближень $u_n(t)$ та $u_n'(t)$, побудованих за WG та IWG методами відповідно, і зі збільшенням k похибки наближень $z_k(t)$ та $x_k(t)$ будуть прямувати до нуля.

Приклад. Проілюструємо наведені вище теоретичні викладки на конкретному прикладі [6]

$$x(t) = e^{\frac{1}{3}(6t+1)} - \frac{1}{3}\int_0^1 e^{\frac{1}{3}(6t-5s)}x(s)\,ds. \tag{43}$$

Розглянемо спочатку питання існування розв'язків рівняння (43). Введемо у розгляд функцію

$$\varphi(t) = 2(e^4-1)^{-\frac{1}{2}}e^{2t},$$

що є власною функцією оператора

$$(Ky)(t) = -\frac{1}{3}\int_0^1 e^{\frac{1}{3}(6t-5s)}y(s)\,ds,$$

яка відповідає характеристичному числу $\lambda = \left(1-\sqrt[3]{e}\right)^{-1}$.

Зведемо рівняння (43) до рівняння (4). Використавши позначення (2), (5), (6), отримаємо

$$\Lambda z = g,$$

$$\Lambda = \sqrt[3]{e}, \qquad z = 2(e^4-1)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 x(t)\,e^{2t}\,dt, \qquad g = \frac{1}{2}\sqrt[6]{e^2(e^4-1)^3}.$$

Отже, у розглядуваному випадку

$$\Lambda^{+} = \Lambda^{-1} = \left(\sqrt[3]{e}\right)^{-1}, \qquad P_{\Lambda} = P_{\Lambda^*} = 0$$

і умова (8) виконується. Згідно з теоремою 1, рівняння (43) має єдиний розв'язок

$$x^*(t) = e^{2t}. \tag{44}$$

Застосуємо до рівняння (43) проекційно-ітеративний метод (11) – (14) із мультивейвлетовим базисом на S_1^2, а саме, системою (24), (25), і нехай $x_0(t) = 0$. Спочатку перевіримо виконання достатньої умови збіжності методу, тобто умови $q_i < 1$. Згідно з (33), $L_0(t,s) = K(t,s)$ при $i = 0$ і, згідно з (30), $q_0 \approx 0{,}65629 < 1$. Отже, метод (11) – (14) збігається при всіх $n \geq 1$. Безпосередніми обчисленнями можна переконатися, що у розглядуваному випадку

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1{,}518232 & 0{,}238505 & 0{,}048574 & 0{,}004613 \\ -0{,}162225 & -0{,}502690 & 0{,}015205 & 0{,}001444 \\ 0{,}039264 & -0{,}018071 & -0{,}581031 & -0{,}000350 \\ -0{,}007707 & 0{,}003547 & 0{,}000722 & -0{,}999931 \end{pmatrix},$$

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}628567 & -0{,}296084 & -0{,}060301 & -0{,}003306 \\ 0{,}201389 & -1{,}892586 & -0{,}032695 & -0{,}0017923 \\ -0{,}048743 & 0{,}038855 & -1{,}724138 & 0{,}000434 \\ 0{,}005524 & -0{,}004403 & -0{,}000897 & -1{,}000049 \end{pmatrix}, \tag{45}$$

тобто умова (21) виконується і послідовні наближення $z_k(t),\ x_k(t)$ за методом (11) – (14) визначаються однозначно. У таблиці відображено відхилення наближень $x_k(t),\ k = \overline{0{,}3}$, та $z_1(t)$ від точного розв'язку (44).

t	$\lvert x^*(t) - x_0(t)\rvert$	$\lvert x^*(t) - x_1(t)\rvert$	$\lvert x^*(t) - x_2(t)\rvert$	$\lvert x^*(t) - x_3(t)\rvert$	$\lvert x^*(t) - z_1(t)\rvert$
0,0	1,000000000	0,000279886	0,000001146	0,000000001	0,126628313
0,2	1,491824698	0,000417540	0,000001711	0,000000004	0,057859839
0,4	2,225540928	0,000622896	0,000002553	0,000000010	0,000456458
0,6	3,320116923	0,000929251	0,000003807	0,000000004	0,026842068
0,8	4,953032424	0,001386281	0,000005677	0,000000029	0,178651358
1,0	7,389059099	0,002068089	0,000008465	0,000000017	0,418963389

Обчислимо тепер сталі $p_4,\ q_4$ і l_4 та проілюструємо оцінки (35) – (38). Для цього спочатку знайдемо $p_1,\ q_1$ і l_1. При $i = 1$ $\psi_1(t) = b_1(t) = 1$, і, використовуючи співвідношення (31) – (33), знаходимо ядра $M_1(t,s),\ L_1(t,s)$:

$$M_1(t,s) = -\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}(6t-5s)} + \frac{1}{5\sigma_1}\left(1 - e^{-\frac{5}{3}}\right)e^{2t}\left(1 - \frac{1}{6}\left(1 - e^2\right)e^{-\frac{5s}{3}}\right),$$

$$L_1(t,s) = -\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}(6t-5s)} - 1 + \frac{1}{\sigma_1}\left(1 + \frac{1}{5}\left(1 - e^{-\frac{5}{3}}\right)e^{2t}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\left(1 - e^2\right)e^{-\frac{5s}{3}}\right),$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{10}\left(9 + e^2 + e^{-\frac{5}{3}} - e^{\frac{1}{3}}\right)$$

і, згідно з (30), $p_1 \approx 0{,}184052$, $q_1 \approx 0{,}089867$, $l_1 \approx 1{,}012817$. Продовжуючи обчислення за формулами (30)–(33), отримуємо $p_4 \approx 0{,}011677$, $q_4 \approx 0{,}001435$, $l_4 \approx 1{,}000067$. Оскільки у розглядуваному випадку $\nu = 2$ і $m = 1$, оцінки швидкості збіжності та конструктивні оцінки похибки (35)–(38) набирають вигляду

$$\left\|x^*(t) - z_k(t)\right\| \le 46{,}19 \cdot 14{,}35^{k-1} \cdot 10^{2-4k}, \tag{46}$$

$$\left\|x^*(t) - x_k(t)\right\| \le 53{,}93 \cdot 14{,}35^{k-1} \cdot 10^{-4k}, \tag{47}$$

$$\left\|x^*(t) - z_k(t)\right\| \le 15{,}65 \cdot 10^{-3} \sup_{t\in[0,1]} |x_k''(t) - x_{k-1}''(t)|, \tag{48}$$

$$\left\|x^*(t) - x_k(t)\right\| \le 18{,}28 \cdot 10^{-5} \sup_{t\in[0,1]} |x_k''(t) - x_{k-1}''(t)|. \tag{49}$$

Як було зазначено, $z_1(t) = u_n(t)$ і $x_1(t) = u_n'(t)$, тому, згідно з (46), (47), для наближень, побудованих за WG та IWG методами справджуються оцінки

$$\left\|x^*(t) - u_n(t)\right\| \le 0{,}4619,$$

$$\left\|x^*(t) - u_n'(t)\right\| \le 0{,}0054,$$

а згідно з (48), (49) — оцінки

$$\left\|x^*(t) - u_n(t)\right\| \le 0{,}4627,$$

$$\left\|x^*(t) - u_n'(t)\right\| \le 0{,}0054.$$

У [6] для відшукання наближених розв’язків рівняння (43), використано метод Петрова–Галеркіна. Навіть використавши простори S_5^4 та S_6^2, тобто розв’язавши систему 128-ми алгебраїчних рівнянь, авторам вдалося лише отримати наближений розв’язок $u(t)$, для якого $\left\|x^*(t) - u(t)\right\| \le 109 \cdot 10^{-6}$. Наближення ж $x_2(t)$, побудоване за проекційно-ітеративним методом (11)–(14), згідно з (47), має похибку $\left\|x^*(t) - x_2(t)\right\| \le 7{,}74 \cdot 10^{-6}$, а згідно з (49) — $\left\|x^*(t) - x_2(t)\right\| \le 1{,}51 \cdot 10^{-6}$.

Література

1. *Frank K., Heinrich S., Pereverzev S.* Information complexity of multivariate Fredholm integral equation in Sobolev classes // J. Complexity. – 1996. – **12**, № 4. – P. 17–34.
2. *Atkinson K. E.* The numerical solution of integral equations of the second kind. – Cambridge Univ. Press, 1997. – 552 p.
3. *Chen Z., Micchelli C. A., Xu Y.* The Petrov–Galerkin method for second kind integral equations II: Multiwavelet schemes // Adv. Comput. Math. – 1997. – № 7. – P. 199–233.
4. *Chen Z., Xu Y.* The Petrov–Galerkin and iterated Petrov–Galerkin methods for second-kind integral equations // SIAM J. Numer. Anal. – 1998. – **35**, № 1. – P. 406–434.
5. *Kaneko H., Noren R.D., Novaprateep B.* Wavelet applications to the Petrov–Galerkin method for Hammerstein equations // Appl. Numer. Math. – 2003. – **45**, № 1. – P. 255–273.

6. *Maleknejad K., Karami M.* Using the WPG method for solving integral equations of the second kind // Appl. Math. and Comput. – 2005. – **166**. – P. 123 – 130.
7. *Mosentsova G. V.* Exact order of algorithmic complexity for Fredholm integral equations of the second kind // J. Numer. and Appl. Math. – 2009. – **97**. – P. 103 – 111.
8. *Chen Y., Tang T.* Convergence analysis of the Jacobi spectral-collocation methods for Volterra integral equations with a weakly singular kernel // Math. Comput. – 2010. – **79**, № 269. – P. 147 – 167.
9. *Ghomanjani F., Farahi M. H., Kilicman A.* Bezier curves for solving Fredholm integral equations of the second kind // Math. Probl. Eng. – 2014. – **2014**. – P. 1 – 6.
10. *Occorsio D., Russo M. G.* Nystrom methods for Fredholm integral equations using equispaced points // Filomat. – 2014. – **28**, № 1. – P. 49 – 63.
11. *Allouch C., Sablonniere P.* Iteration methods for Fredholm integral equations of the second kind based on spline quasi-interpolants // Math. and Comput. Simulat. – 2014. – **99**. – P. 19 – 27.
12. *Alpert B. K.* A class of bases in L_2 for the sparse representation of integral operators // SIAM J. Math. Anal. – 1993. – **24**. – P. 246 – 262.
13. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 288 с.
14. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – 2nd ed. – Utrecht, Boston: Walter de Gruyter, 2016. – 314 p.
15. *Бойчук О. А., Козлова Н. О., Ферук В. А.* Слабкозбурені інтегральні рівняння // Нелінійні коливання. – 2016. – **19**, № 2. – С. 151 – 160.
16. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 300 с.
17. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Специальный курс. – М.: Физматгиз, 1961. – 436 с.
18. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 415 с.

Одержано 06.07.17,
після доопрацювання — 24.09.17