УДК 517.98:517.95

Л. В. Фардигола (Фіз.-техн. ін-т низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Харків)

ОПЕРАТОРИ ПЕРЕТВОРЕННЯ В ЗАДАЧАХ КЕРОВАНОСТІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

We study the control system $w_{tt} = \frac{1}{\rho}(kw_x)_x + \gamma w$, $w(0,t) = u(t)$, $x \in (0,l)$, $t \in (0,T)$, in special modified spaces of the Sobolev type. Here, ρ, k, and γ are given functions on $[0,l)$; $u \in L^\infty(0,T)$ is a control, and $T > 0$ is a constant. The functions ρ and k are positive on $[0,l)$ and may tend to zero or to infinity as $x \to l$. The growth of distributions from these spaces is determined by the growth of ρ and k as $x \to l$. Applying the method of transformation operators, we establish necessary and sufficient conditions for the L^∞-controllability and approximate L^∞-controllability at a given time and at a free time.

Досліджено керовану систему $w_{tt} = \frac{1}{\rho}(kw_x)_x + \gamma w$, $w(0,t) = u(t)$, $x \in (0,l)$, $t \in (0,T)$, у спеціальних модифікованих просторах соболєвського типу. Тут ρ, k та γ — задані на $[0,l)$ функції; $u \in L^\infty(0,T)$ — керування, $T > 0$ — стала. Функції ρ та k є додатними на $[0,l)$ та можуть прямувати до нуля або нескінченності при $x \to l$. Зростання роподілів із цих просторів визначено зростанням ρ та k при $x \to l$. За допомогою методу операторів перетворення одержано необхідні та достатні умови L^∞-керованості та наближеної L^∞-керованості за заданий та вільний час.

1. Вступ. Розглянемо хвильове рівняння

$$w_{tt} = \frac{1}{\rho}(kw_x)_x + \gamma w, \qquad x \in (0,l), \quad t \in (0,T), \tag{1.1}$$

з крайовою умовою Діріхле

$$w(0,\cdot) = u \quad \text{на} \quad (0,T) \tag{1.2}$$

і початковими умовами

$$w(\cdot,0) = w_0^0, \qquad w_t(\cdot,0) = w_1^0 \quad \text{на} \quad (0,l). \tag{1.3}$$

Тут $l, T > 0$ — сталі; ρ, k, γ, w_0^0 та w_1^0 — задані функції; $u \in L^\infty(0,T)$ — керування. Будемо вважати, що $\rho, k \in C^1[0,l)$ є додатними на $[0,l)$, $(\rho k) \in C^2[0,l)$, $(\rho k)'(0) = 0$, та

$$\sigma(x) = \int_0^x \sqrt{\rho(\mu)/k(\mu)}\, d\mu \to +\infty \quad \text{при} \quad x \to l. \tag{1.4}$$

Крім того, вважатимемо, що $w(\cdot,t)$ належить простору $L^2_\rho(0,l)$ функцій, квадратично сумовних з вагою ρ на $(0,l)$, $t \in [0,T]$. Це припущення розглядається замість крайової умови в точці $x = l$. Зазначимо, що поведінка $\sigma(x)$ при $x \to l$ суттєво позначається на поведінці розв'язків (1.1). Якщо $\lim_{x\to l}\sigma(x) = +\infty$, то розв'язки керованої системи (1.1), (1.2) відтворюють властивості розв'язків керованої системи

$$z_{tt} = z_{\xi\xi} - q^2 z, \qquad \xi \in (0,+\infty), \tag{1.5}$$

$$z(0,\cdot) = v \quad \text{на} \quad (0,T), \tag{1.6}$$

з деякою сталою $q \in \mathbb{R}$ на півосі $(0,+\infty)$ (див. наслідок 4.2). У цьому випадку розглянуто лише крайову умову в точці $x = 0$ для рівняння (1.5) у соболєвському просторі $H^0(0,+\infty)$ [5]. Якщо $\lim_{x\to l}\sigma(x) = d \in \mathbb{R}$, то розв'язки рівняння (1.1) відтворюють властивості розв'язків рівняння (1.5) з $q = 0$ на сегменті $(0,d)$. У цьому випадку розглянуто крайові умови в точках

$x = 0$ та $x = l$ для рівняння (1.5) (див., наприклад, [8]). За зауваженнями 4.1, 4.2 крайова задача (1.1) – (1.3) є коректною та має єдиний розв'язок. Крім того, вважаємо, що

$$P(k,\rho) - \gamma \in L^\infty(0,l) \bigcap C^1[0,l) \tag{1.7}$$

та існує $q = \mathrm{const} \geq 0$ таке, що

$$\sigma\sqrt{\frac{\rho}{k}}\left(P(k,\rho) - \gamma - q^2\right) \in L^1(0,l), \tag{1.8}$$

де

$$P(k,\rho) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{\rho}}\left(\sqrt{\frac{k}{\rho}}\left(\frac{k'}{k} + \frac{\rho'}{\rho}\right)\right)' + \left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{\rho}}\left(\frac{k'}{k} + \frac{\rho'}{\rho}\right)\right)^2.$$

Керовану систему (1.1) – (1.3) розглянуто в модифікованих просторах Соболєва (див. пункти 2 і 3).

Останнім часом проблеми керованості для хвильового рівняння зі сталими та змінними коефіцієнтами досліджувалися в багатьох роботах (див., наприклад, [1, 3 – 8, 10 – 18, 20 – 27]). Взагалі кажучи, рівняння (1.1) є виродженим гіперболічним рівнянням, тому що ρ і k можуть прямувати до нуля або нескінченності при $x \to l$. Вироджене хвильове рівняння вивчалося у багатьох роботах (див., наприклад, [1, 10, 20, 25]).

У цій статті, застосувавши метод операторів перетворення, запропонований у [7], ми одержимо необхідні та достатні умови для (наближеної) L^∞-керованості системи (1.1), (1.2) за заданий та вільний час.

Зазначимо, що простори Соболєва $H_0^m(0,+\infty)$, $m \in \mathbb{R}$, є природним „оточенням" для розв'язків гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами, зокрема для рівняння (1.5) (див., наприклад, [9]). Очевидно, що зростання розв'язків рівнянь із змінними коефіцієнтами залежить від властивостей цих коефіцієнтів на межі області, в якій це рівняння розглядається. Для вивчення керованої системи (1.1), (1.2) ми застосовуємо композицію $\mathbf{ST}_r$ двох операторів перетворення, які перетворюють розв'язки системи (1.5), (1.6) з q, визначеним умовою (1.8), на розв'язки (1.1), (1.2). Разом з оператором $\mathbf{S}$ ми вводимо спеціальний модифікований простір соболєвського типу $\mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2,2}$, в якому простір $L^2(-l,l)$ замінено на простір $L^2_{\widehat{\rho}}(-l,l)$ з вагою $\widehat{\rho}$, а диференціальний оператор d/dx — на „лінійно деформований" оператор $\sqrt{\widehat{k}/\widehat{\rho}}\Big(d/dx + \big(\widehat{\rho}'/\widehat{\rho} + \widehat{k}'/\widehat{k}\big)/4\Big)$, $\widehat{k}$ та $\widehat{\rho}$ є парними продовженнями k та ρ відповідно (див. пункт 3). Цей оператор $\mathbf{S}$ є ізометричним ізоморфізмом $H^m(\mathbb{R})$ та $\mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2,2}$ (теорема 3.2). Оператор $\mathbf{S}$ зберігає значення функції в нулі, але не зберігає її асимптотику при $x \to l$. Зростання розподілів з $\mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2,2}$, визначається даними ρ та k рівняння (1.1). У пункті 3 вивчено властивості $\mathbf{S}$. Другим із цих двох операторів є оператор $\mathbf{T}_r$, який було досліджено в [6] та вдосконалено в [7, 17]. Оператор $\mathbf{T}_r$ є автоморфізмом $\widetilde{H}^m$, де $\widetilde{H}^m$ — підпростір усіх непарних розподілів в $H^m(\mathbb{R})$, $m = \overline{-2,2}$ (теорема 3.5). Оператор $\mathbf{T}_r$ зберігає асимптотику функцій на нескінченності, але не зберігає їх значення в нулі. Застосування оператора $\mathbf{ST}_r$ та оберненого до нього є ключовим пунктом даної статті. Простори $\mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2,2}$, пов'язані з оператором $\mathbf{S}$, є не лише одним з об'єктів дослідження, а й одним з основних інструментів дослідження керованої системи (1.1), (1.2). Зазначимо, що оператор $\mathbf{S}$ і простір $\mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2,2}$, розглянуті у цій роботі, відрізняються від оператора і просторів, розглянутих у роботі [7], а оператор $\mathbf{T}_r$ є тим самим, що і розглянутий у згаданій роботі. Застосовуючи оператор $\mathbf{ST}_r$, бачимо, що керована система (1.1), (1.2) відтворює властивості керованості системи (1.5), (1.6) з q, визначеним умовою (1.8) (наслідки 4.2, 4.3). Зокрема, ми одержуємо необхідні та достатні умови наближеної L^∞-коректності та L^∞-коректності за заданий та вільний час для (1.1), (1.2). Якщо $q > 0$, то кожний початковий стан системи (1.1), (1.2) є наближено L^∞-керованим за вільний час (теорема 4.5). Але якщо $q = 0$, то початковий стан цієї системи є наближено L^∞-керованим за вільний час тоді і лише тоді, коли його компоненти $\big($тобто $w(x,0)$ і $w_t(x,0)\big)$ є зв'язаними між собою (теорема 4.4). Подібне співвідношення між компонентами є необхідним для L^∞-керованості та наближеної L^∞-керованості за заданий час в обох випадках: $q = 0$ і $q > 0$ (теорема 4.3), а саме, для кожного часу $T > 0$ ми маємо множину допустимих початкових станів, визначених умовами (4.7) та (4.8).

2. Позначення. Наведемо означення просторів, використаних у цій роботі. Нехай Ω — відкрита підмножина $\mathbb{R}$, а $\mathcal{D}(\Omega)$ — простір нескінченно диференційовних функцій із компактним носієм в Ω.

Позначимо через $H^p(\Omega)$, $p = \overline{0,\infty}$, простори Соболєва

$$H^p(\Omega) = \Big\{\varphi \in L^2(\Omega) \mid \forall m = \overline{0,p}\ \varphi^{(m)} \in L^2(\Omega)\Big\}$$

з нормою $\|\varphi\|^p = \left(\sum_{m=0}^p \left(\big\|\varphi^{(m)}\big\|_{L^2(\Omega)}\right)^2\right)^{1/2}$, $\varphi \in H^p(\Omega)$, та розглянемо двоїстий простір $H^{-p}(\Omega) = \big(H^p(\Omega)\big)'$ із сильною нормою $\|f\|^{-p} = \sup\big\{\,|\langle f,\varphi\rangle| \,/\, \|\varphi\|^p \mid \|\varphi\|^p \neq 0\big\}$, де $\langle f,\varphi\rangle$ — значення розподілу $f \in H^{-p}(\Omega)$ на тестовій функції $\varphi \in H^p(\Omega)$. Зокрема, $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$, $\|\cdot\|^0 = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$. Скалярний добуток в $L^2(\Omega)$ ми позначаємо через $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Позначимо $H^s = H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{Z}$. Відомо [9] (глава 1), що

$$\|\varphi\|^s \le \|\varphi\|^{s'}, \qquad s \le s', \quad \varphi \in H^{s'}, \tag{2.1}$$

$H^s \supset H^{s'}$ — неперервне вкладення і $H^{s'}$ є щільним в H^s, $s \le s'$.

Нехай $a \in (0,\infty]$. Розподіл $f \in \mathcal{D}'(-a,a)$ називається *непарним*, якщо

$$\langle f, \varphi(\xi)\rangle = -\langle f, \varphi(-\xi)\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(-a,a).$$

Тут $\langle f,\varphi\rangle$ — значення розподілу $f \in \mathcal{D}'(-a,a)$ на тестовій функції $\varphi \in \mathcal{D}(-a,a)$. Позначимо через $\widetilde{H}^s$ підпростір усіх непарних розподілів в H^s, та нехай $\widetilde{\mathbf{H}}^0 = \widetilde{H}^0 \times \widetilde{H}^{-1}$ з нормою $|||\cdot|||^0$.

Позначимо через $\widehat{\rho}$, $\widehat{k}$ та $\widehat{\gamma}$ парні продовження ρ, k та γ відповідно. Нехай $\eta = \Big(\widehat{k}\widehat{\rho}\Big)^{1/4}$, $\theta = \Big(\widehat{k}/\widehat{\rho}\Big)^{1/4}$ та $\mathcal{D}_{\eta\theta} = \theta^2\left(d/dx + \eta'/\eta\right) = \sqrt{\widehat{k}/\widehat{\rho}}\Big(d/dx + \big(\widehat{\rho}'/\widehat{\rho} + \widehat{k}'/\widehat{k}\big)/4\Big)$. Ми бачимо, що $\eta \in C^2(-l,l)$ і $\theta \in C^1(-l,l)$.

Нехай $a,b \in [-l,l]$, $a < b$, $L^2_{\eta\theta}(a,b) = L^2_{\widehat{\rho}}(a,b)$ є ваговим простором із скалярним добутком

$$\langle\!\langle \varphi_1,\varphi_2\rangle\!\rangle = \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)\frac{\eta^2(x)}{\theta^2(x)}dx = \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)\widehat{\rho}(x)\,dx, \quad \varphi_1,\varphi_2 \in L^2_{\eta\theta}(a,b),$$

і нормою, визначеною цим скалярним добутком.

Далі в цьому пункті ми вважаємо $p = 0, 1, 2$.

Введемо простір

$$\mathbb{H}^p = \left\{\varphi \in L^2_{\text{loc}}(-l,l) \mid \forall m = \overline{0,p}\ \mathcal{D}^m_{\eta\theta}\varphi \in L^2_{\eta\theta}(-l,l)\right\}$$

з нормою $\llbracket\varphi\rrbracket^p = \left(\sum_{m=0}^{p}\left(\left\|\mathcal{D}^m_{\eta\theta}\varphi\right\|_{L^2_{\eta\theta}(-l,l)}\right)^2\right)^{1/2}$, $\varphi \in \mathbb{H}^p$, і двоїстий простір $\mathbb{H}^{-p} = (\mathbb{H}^p)'$ із сильною нормою $\llbracket f\rrbracket^{-p} = \sup\{|\langle\!\langle f,\varphi\rangle\!\rangle| \,/\, \llbracket\varphi\rrbracket^p \mid \llbracket\varphi\rrbracket^p \neq 0\}$, де $\langle\!\langle f,\varphi\rangle\!\rangle$ — значення розподілу $f \in \mathbb{H}^{-p}$ на тестовій функції $\varphi \in \mathbb{H}^p$. Зокрема, $\mathbb{H}^0 = \left(\mathbb{H}^0\right)'$ і

$$\langle\!\langle f,\varphi\rangle\!\rangle = \left\langle \frac{\eta}{\theta}f, \frac{\eta}{\theta}\varphi\right\rangle = \int\limits_{-l}^{l} f(x)\varphi(x)\widehat{\rho}(x)\,dx, \quad f,\varphi \in \mathbb{H}^0.$$

Покладемо $\langle\!\langle \mathcal{D}_{\eta\theta}f,\varphi\rangle\!\rangle = -\langle\!\langle f,\mathcal{D}_{\eta\theta}\varphi\rangle\!\rangle$, $f \in \mathbb{H}^{-p}$, $\varphi \in \mathbb{H}^{p+1}$, $p \neq 2$. Простори $\mathbb{H}^p$ та $\mathbb{H}^{-p}$ досліджено в пункті 3. Зокрема, доведено, що $\mathcal{D}(-l,l) \subset \mathbb{H}^p \subset \mathbb{H}^{-p} \subset \mathcal{D}'(-l,l)$ є щільним неперервним вкладенням (див. теорему 3.4).

Введемо також простір

$$\mathcal{H}^0 = \left\{\varphi \in L^2_{\text{loc}}(0,l) \mid \varphi \in L^2_{\eta\theta}(0,l)\right\},$$

$$\mathcal{H}^p = \left\{\varphi \in \mathcal{H}^{p-1} \mid \mathcal{D}^p_{\eta\theta}\varphi \in \mathcal{H}^0 \wedge \mathcal{D}^{p-1}_{\eta\theta}\varphi(0) \in \mathbb{R} \wedge \varphi(0) = 0\right\}, \qquad p \neq 0,$$

з нормою $\rrbracket\varphi\llbracket^p = \left(\sum_{m=0}^{p}\left(\left\|\mathcal{D}^m_{\eta\theta}\varphi\right\|_{L^2_{\eta\theta}(0,l)}\right)^2\right)^{1/2}$, $\varphi \in \mathbb{H}^p$, і двоїстий простір $\mathcal{H}^{-p} = (\mathcal{H}^p)'$ із сильною нормою $\rrbracket f\llbracket^{-p} = \sup\left\{\, |\langle\!\lbrack f,\varphi\rbrack\!\rangle| \,/\, \rrbracket\varphi\llbracket^p \mid \rrbracket\varphi\llbracket^p \neq 0\right\}$, де $\langle\!\lbrack f,\varphi\rbrack\!\rangle$ — значення розподілу $f \in \mathcal{H}^{-p}$ на тестовій функції $\varphi \in \mathcal{H}^p$. Зокрема, $\mathcal{H}^0 = \left(\mathcal{H}^0\right)'$ і

$$\langle\!\lbrack f,\varphi\rbrack\!\rangle = \left\langle\left[\frac{\eta}{\theta}f, \frac{\eta}{\theta}\varphi\right]\right\rangle = \int\limits_{0}^{l} f(x)\varphi(x)\rho(x)\,dx, \quad f,\varphi \in \mathcal{H}^0.$$

Бачимо, що звуження на $[0,l)$ непарної функції з $\mathbb{H}^p$ належить $\mathcal{H}^p$ і, навпаки, непарне продовження функції з $\mathcal{H}^p$ належить $\mathbb{H}^p$. Отже, звуження на $\mathcal{H}^p$ розподілу з $\mathbb{H}^{-p}$ належить $\mathcal{H}^{-p}$ і навпаки, непарне продовження розподілу з $\mathcal{H}^{-p}$ належить $\mathbb{H}^{-p}$.

Позначимо через $\widetilde{\mathbb{H}}^m$ підпростір усіх непарних розподілів з $\mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2,2}$, та нехай $\mathbb{H\!H}^0 = \widetilde{\mathbb{H}}^0 \times \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}$ з нормою $[\![\cdot]\!]^0$.

Ми розуміємо рівність (1.2) як значення розподілу w в точці $x = 0$ в $\mathcal{D}'(-l,l)$ (див. [2], глава 1, або [6]). Можна стверджувати, що розподіл $f \in \mathcal{H}^{-p}$ має значення $f_0 \in \mathbb{R}$ у точці $x = 0$ ($f(0) = f_0$) тоді і лише тоді, коли для $\varphi \in \mathcal{D}(0,l)$ маємо $\langle f_\alpha,\varphi\rangle \to \langle f_0,\varphi\rangle$ при $\alpha \to +0$. Тут $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$, тобто $\langle f_\alpha,\varphi\rangle = \left\langle f, \frac{1}{\alpha}\varphi_{1/\alpha}\right\rangle$, $\varphi_{1/\alpha}(x) = \varphi(x/\alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1)$.

Ми розглядаємо керовану систему (1.1)–(1.3) у просторах $\mathcal{H}^{-m}$, $m = 0,1,2$, тобто $\left(\frac{d}{dt}\right)^m w\colon [0,T] \to \mathcal{H}^{-m}$, $m = 0,1,2$, $w^0_0 \in \mathcal{H}^0$ і $w^0_1 \in \mathcal{H}^{-1}$. Зрозуміло, що рівняння (1.1) можна записати у вигляді

$$w_{tt} = \mathcal{D}^2_{\eta\theta} w + (\gamma - \nu) w, \qquad x \in (0, l), \quad t \in (0, T), \tag{2.2}$$

де $\nu = \mathcal{D}_{\eta\theta} \left(\theta^2 \eta' / \eta \right)$.

Нехай $w \in \mathcal{H}^0$ — розв'язок керованої системи (2.2), (1.2), (1.3). Позначимо через W, W_0^0 та W_1^0 непарні продовження по x розподілів w, w_0^0 та w_1^0 відповідно. Беручи до уваги лему 3.1, бачимо, що

$$W_{tt} = \mathcal{D}^2_{\eta\theta} W + (\widehat{\gamma} - \nu) W - 2\eta^2(0) u \mathcal{D}_{\eta\theta} \delta, \qquad x \in (-l, l), \quad t \in (0, T), \tag{2.3}$$

$$W(\cdot, 0) = W_0^0, \quad W_t(\cdot, 0) = W_1^0 \quad \text{на} \quad (-l, l), \tag{2.4}$$

де $\left(\dfrac{d}{dt} \right)^m W \colon [0, T] \to \widetilde{\mathbb{H}}^{-m}$, $m = 0, 1, 2$, $W_0^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$, $W_1^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}$, δ є розподілом Дірака по x. Нехай W — розв'язок системи (2.3), (2.4) і W^+ — його звуження на $[0, l) \times [0, T]$. За наслідком 4.1 (див. пункт 4) маємо

$$W^+(0, \cdot) = u \quad \text{на} \quad (0, T). \tag{2.5}$$

Отже, W^+ є розв'язком системи (2.2), (1.2), (1.3).

Разом із керованою системою (2.3), (2.4) із загальним хвильовим оператором розглянемо допоміжну керовану систему з найпростішим хвильовим оператором

$$Z_{tt} = Z_{\xi\xi} - q^2 Z - 2v\delta', \qquad \xi \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T), \tag{2.6}$$

$$Z(\cdot, 0) = Z_0^0, \qquad Z_t(\cdot, 0) = Z_1^0 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

де $\left(\dfrac{d}{dt} \right)^m Z \colon [0, T] \to \widetilde{H}^{-m}$, $m = 0, 1, 2$, $Z_0^0 \in \widetilde{H}^0$, $Z_1^0 \in \widetilde{H}^{-1}$, δ — розподіл Дірака по ξ, $v \in L^\infty(0, T)$ — керування, q є сталою з умови (1.8). Нехай Z — розв'язок системи (2.6), (2.7), а Z^+ — його звуження на $[0, +\infty) \times [0, T]$. У [6] доведено, що

$$Z^+(0, \cdot) = v \quad \text{на} \quad (0, T). \tag{2.8}$$

Позначимо $W^0 = \begin{pmatrix} W_0^0 \\ W_1^0 \end{pmatrix}$ і $Z^0 = \begin{pmatrix} Z_0^0 \\ Z_1^0 \end{pmatrix}$. Зрозуміло, що $W^0 \in \mathbb{H}^0$ і $Z^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$.

Упродовж всієї роботи будемо позначати область визначення і образ оператора A через $D(A)$ і $R(A)$ відповідно.

3. Простори та оператори. У цьому пункті досліджено простори $\mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2, 2}$, і введено та досліджено деякі оператори перетворення. Далі впродовж цього пункту ми вважаємо $p = 0, 1, 2$.

Згідно з (1.4) $\sigma(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{d\mu}{\theta^2(\mu)}$, $x \in (-l, l)$. Більш того, σ — непарна зростаюча оборотна функція і $\sigma(x) \to +\infty$ при $x \to l$.

Введемо оператор $S_0 \colon H^0 \to \mathbb{H}^0$ з областю визначення $D(S_0) = H^0$ так, що $S_0 \psi = (\psi \circ \sigma) / \eta$, $\psi \in D(S_0)$, де $\psi \circ \sigma$ — композиція ψ та σ, тобто $(\psi \circ \sigma)(x) = \psi(\sigma(x))$, $x \in \mathbb{R}$.

За побудовою, S_0 є оборотним, $S_0^{-1} \colon \mathbb{H}^0 \to H^0$ з областю визначення $D(S_0^{-1}) = R(S_0)$ і $S_0^{-1} \varphi = (\eta \varphi) \circ \sigma^{-1}$, $\varphi \in D(S_0^{-1})$.

Теорема 3.1. *Справедливими є такі твердження*:

(i) $\mathcal{D}_{\eta\theta} \left(S_0 \psi \right) = S_0 \left(\psi' \right)$, $\psi \in H^1$;

(ii) S_0 *є ізометричним ізоморфізмом* H^p *і* $\mathbb{H}^p$.

Доведення. Твердження (i) безпосередньо одержуємо з означення S_0.

(ii) Бачимо, що з (i) випливає $[\![S_0\psi]\!]^p = \|\psi\|^p$, $\psi \in H^p$. Отже, S_0 є ізометричним ізоморфізмом H^p і $\mathbb{H}^p$.

Теорему доведено.

Продовжимо $\mathbf{S}_0$ на H^{-2}. Введемо оператор $\mathbf{S}\colon H^{-2} \to \mathbb{H}^{-2}$ з областю визначення $D(\mathbf{S}) = H^{-2}$ так, що $\langle\langle \mathbf{S}g, \varphi\rangle\rangle = \langle g, S_0^{-1}\varphi\rangle$, $g \in D(\mathbf{S})$, $\varphi \in D(S_0^{-1}) \cap \mathbb{H}^2 = \mathbb{H}^2$. Це продовження $\mathbf{S}$ оператора S_0 є також оборотним, $\mathbf{S}^{-1}\colon \mathbb{H}^{-2} \to H^{-2}$ з областю визначення $D(\mathbf{S}^{-1}) = \mathbb{H}^{-2}$ і $\langle \mathbf{S}^{-1} f, \psi\rangle = \langle\langle f, S_0\psi\rangle\rangle$, $f \in D(\mathbf{S}^{-1})$, $\psi \in D(S_0) \cap H^2 = H^2$.

Беручи до уваги конструкцію $\mathbf{S}$ і теорему 3.1, одержуємо таку теорему.

Теорема 3.2. *Для* $m = \overline{-2, 2}$ *справедливими є наступні твердження*:

(i) $\mathcal{D}_{\eta\theta}\mathbf{S}\psi = \mathbf{S}(\psi')$, $\psi \in H^m$, $m \neq -2$;

(ii) $\mathbf{S}$ *є ізометричним ізоморфізмом* H^m *і* $\mathbb{H}^m$;

(iii) $\langle\langle f, \varphi\rangle\rangle = \langle \mathbf{S}^{-1} f, \mathbf{S}^{-1}\varphi\rangle$, $f \in \mathbb{H}^{-m}$, $\varphi \in \mathbb{H}^m$.

Використовуючи означення $\mathbf{S}$ і δ, одержуємо таку теорему.

Теорема 3.3. *Справджується рівність* $\mathbf{S}\,(\delta') = \eta(0)\mathcal{D}_{\eta\theta}\delta$.

Доведення. Нехай $\varphi \in \mathbb{H}^2$. За теоремою 3.2

$$\Big\langle\!\Big\langle \mathbf{S}\delta', \varphi \Big\rangle\!\Big\rangle = \langle\langle \mathcal{D}_{\eta\theta}\mathbf{S}\delta, \varphi\rangle\rangle = -\,\langle\langle \mathbf{S}\delta, \mathcal{D}_{\eta\theta}\varphi\rangle\rangle = -\langle \delta, \mathbf{S}^{-1}\mathcal{D}_{\eta\theta}\varphi\rangle = -\eta(0)\,(\mathcal{D}_{\eta\theta}\varphi)\,(0) =$$
$$= -\,\langle\langle \eta(0)\delta, \mathcal{D}_{\eta\theta}\varphi\rangle\rangle = \langle\langle \eta(0)\mathcal{D}_{\eta\theta}\delta, \varphi\rangle\rangle\,,$$

що і потрібно було довести.

Наступна теорема встановлює властивості просторів $\mathbb{H}^m$, $m = \overline{-2, 2}$.

Теорема 3.4. $\mathcal{D}(-l, l) \subset \mathbb{H}^m \subset \mathbb{H}^n \subset \mathcal{D}'(-l, l)$, $-2 \le n \le m \le 2$, *є щільним неперервним вкладенням.*

Доведення. Використовуючи (2.1), одержуємо $[\![f]\!]^n = \left\|\mathbf{S}^{-1} f\right\|^n \le \left\|\mathbf{S}^{-1} f\right\|^m = [\![f]\!]^m$, $f \in \mathbb{H}^m$, $-2 \le n \le m \le 2$. Отже, $\mathbb{H}^m \subset \mathbb{H}^n$ — неперервне вкладення. Оскільки H^m є щільним у H^n, застосовуючи оператор $\mathbf{S}$ та його властивості (див. теорему 3.2), бачимо, що $\mathbb{H}^m$ є щільним у $\mathbb{H}^n$.

Доведемо, що $\mathcal{D}(-l, l) \subset \mathbb{H}^m$ — неперервне вкладення. Нехай $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(-l, l)$ та $\varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$ в $\mathcal{D}(-l, l)$, тобто існує $a \in (0, l)$ таке, що $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [-a, a]$ для кожного $n = \overline{0, \infty}$ і $\left\|\varphi_n^{(m)}\right\|_{L^\infty(-l,l)} \to 0$ при $n \to \infty$ для кожного $m = \overline{0, \infty}$. Оскільки $\eta \in C^2(-l, l)$ і $\theta \in C^1(-l, l)$, одержуємо

$$[\![\varphi_n]\!]^2 = \left(\sum_{m=0}^{2}\left(\left\|\mathcal{D}_{\eta\theta}^m\varphi_n\right\|_{L^2_{\eta\theta}(-l,l)}\right)^2\right)^{1/2} \le C\sum_{m=0}^{2}\left\|\varphi_n^{(m)}\right\|_{L^2_{\eta\theta}(-l,l)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

де $C > 0$ — стала, що визначається значеннями функцій η, η', η'', θ та θ' на $[-a, a]$. Тому $\varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$ в $\mathbb{H}^2$. Таким чином, $\mathcal{D} \subset \mathbb{H}^2$ — неперервне вкладення. Отже, $\mathcal{D}(-l, l) \subset \mathbb{H}^m$ є неперервним вкладенням.

Доведемо, що $\mathcal{D}(-l, l)$ є щільним в $\mathbb{H}^2$. Спочатку покажемо, що для кожного $\varphi \in \mathbb{H}^2$ існує послідовність $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{H}^2$ така, що $\operatorname{supp}\varphi_n \subset (-l, l)$, $n = \overline{1, \infty}$, і $[\![\varphi - \varphi_n]\!]^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Покладемо $\psi = \mathbf{S}^{-1}\varphi$. Тоді $\psi \in H^2$. Згідно з результатами [9] (глава 1), $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ є щільним в H^2. Отже, існує послідовність $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ така, що $\|\psi - \psi_n\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Покладемо $\varphi_n = \mathbf{S}\psi_n$, $n = \overline{1, \infty}$. Тоді $\varphi_n \in \mathbb{H}^2$, $\operatorname{supp}\varphi_n \subset (-l, l)$, $n = \overline{1, \infty}$, і $[\![\varphi - \varphi_n]\!]^m \to 0$

при $n \to \infty$. На жаль, ми не можемо гарантувати, що $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(-l,l)$. Тепер припустимо, що $\varphi \in \mathbb{H}^2$ і $\operatorname{supp}\varphi_n \subset (-l,l)$. Тоді $\varphi \in H^2(-l,l)$. Отже, існує послідовність $\{\widehat{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \subset \mathcal{D}(-l,l)$ така, що $\|\varphi - \widehat{\varphi}_n\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Тому існує $a \in (0,l)$ таке, що $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$ і $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [-a,a]$, $n = \overline{1,\infty}$. Отже, $[\![\varphi - \widehat{\varphi}_n]\!]^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Таким чином, $\mathcal{D}(-l,l)$ є щільним в $\mathbb{H}^2$. Тому $\mathcal{D}(-l,l)$ є щільним в $\mathbb{H}^m$.

Оскільки $\mathcal{D}(-l,l)$ є щільним в $\mathcal{D}'(-l,l)$, бачимо, що $\mathbb{H}^n$ є щільним в $\mathcal{D}'(-l,l)$.

Теорему доведено.

Деякі простори $\mathbb{H}^m$ досліджено у наведених нижче прикладах.

У пункті 2 нам буде потрібний аналог леми 8.7 з роботи [7].

Лема 3.1. *Нехай* $f \in \mathcal{H}^0$, $\varphi \in \mathcal{H}^2$. *Якщо існує* $f(0)$, *то*

$$\left\langle\left[\mathcal{D}_{\eta\theta}^2 f, \varphi\right]\right\rangle = \left\langle\left[f, \mathcal{D}_{\eta\theta}^2 \varphi\right]\right\rangle + \eta^2(0) f(0) \left(\mathcal{D}_{\eta\theta}\varphi\right)(0). \tag{3.1}$$

Доведення. Покладемо $F(x) = f(x)$, якщо $x \in [0,l)$, і $F(x) = 0$ у протилежному випадку на $(-l,l)$. Тоді $F \in \mathbb{H}^0$. Для кожного $n = \overline{1,\infty}$ покладемо $F_n(x) = f(x)$, якщо $x \in [0, l - l/n]$, і $F_n(x) = 0$ у протилежному випадку на $(-l,l)$. Тоді $F_n \in \mathbb{H}^0 \bigcap H^0(-l,l)$, $n = \overline{1,\infty}$, і

$$[\![F - F_n]\!]^0 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3.2}$$

Нехай $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\psi(x) \ge 0$ для $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{supp}\psi \subset [-l,0]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,dx = 1$. Покладемо $F_n^k = F_n * \psi_k$, де $\psi_k(x) = k\psi(kx)$, $x \in \mathbb{R}$, $n = \overline{1,\infty}$, $*$ є знаком згортки. Отже, $F_n^k \in \in \mathbb{H}^0 \bigcap C^\infty(-l,l)$, $\operatorname{supp} F_n^k \in [-l/k, l - l/n]$, $n,k = \overline{1,\infty}$, і для кожного $n = \overline{1,\infty}$ маємо

$$\left\|F_n - F_n^k\right\|^0 \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Далі, повторюючи доведення леми 8.7 [7], одержуємо (3.1), що і потрібно було довести.

Для дослідження керованої системи (2.3), (2.4) нам потрібен оператор, що перетворює кожний $L^2(0,+\infty)$-розв'язок рівняння

$$-z'' = \mu^2 z, \quad \lambda > 0, \tag{3.3}$$

на $L^2(0,+\infty)$-розв'язок рівняння

$$-y'' + ry = \mu^2 y, \quad \lambda > 0, \tag{3.4}$$

за крайової умови $\dfrac{y(\lambda,\mu)}{z(\lambda,\mu)} \to 1$ при $\lambda \to +\infty$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\Re\mu \ge 0$. Тут z'' та y'' — похідні z і y по λ, μ — параметр,

$$r = \left(\mathcal{D}_{\eta\theta}\left(\theta^2\eta'/\eta\right) - \widehat{\gamma} - q^2\right) \circ \sigma^{-1} = \left(P(k,\rho) - \gamma - q^2\right) \circ \sigma^{-1}. \tag{3.5}$$

Беручи до уваги (1.7) і (1.8), одержуємо

$$r \in L^\infty(0,+\infty) \bigcap C^1[0,+\infty) \quad \text{і} \quad \lambda r \in L^1(0,+\infty). \tag{3.6}$$

У [19] (глава 3) доведено, що цей оператор є оборотним, тобто існує оператор, що перетворює кожний $L^2(0,+\infty)$-розв'язок рівняння (3.4) на $L^2(0,+\infty)$-розв'язок рівняння (3.3) за крайової умови, що зберігає асимптотику розв'язків на нескінченності. У [6] цей оператор та обернений до нього були продовжені на H_0^{-2} за додаткової умови

$$|r(\lambda)| \leq \alpha e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0. \tag{3.7}$$

Результати продовження цих операторів на H_0^{-2} було анонсовано в [17] у загальному випадку (без припущення (3.7)). Пізніше продовження цих операторів було означено та вивчено в [7] (без припущення (3.7)).

Нагадаємо означення для цих продовжень. Ми вважаємо, що (3.6) виконано, але не вважаємо, що виконано (3.7).

Означення 3.1. *Позначимо через* $\mathbf{T}_0 : H^0 \to H^0$ *оператор з областю визначення* $D(\mathbf{T}_0) = \widetilde{H}^0$,

$$(\mathbf{T}_0 g)(\lambda) = g(\lambda) + \operatorname{sgn}\lambda \int\limits_{|\lambda|}^{\infty} K\big(|\lambda|, \xi\big)\, g(\xi)\, d\xi, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad g \in D(\mathbf{T}_0).$$

Тут ядро $K \in C(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ є єдиним розв'язком деякої крайової задачі (див. [19], глава 3), де $\Omega = \big\{ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 > y_1 > 0 \big\}$.

З [19] (глава 3) випливає, що оператор $\mathbf{T}_0$ є оборотним і $\mathbf{T}_0^{-1} : H^0 \to H^0$, $D\left(\mathbf{T}_0^{-1}\right) = \widetilde{H}^0$,

$$\left(\mathbf{T}_0^{-1} f\right)(\xi) = f(\xi) + \operatorname{sgn}\xi \int\limits_{|\xi|}^{\infty} L\big(|\xi|, \lambda\big) f(\lambda)\, d\lambda, \qquad \xi \in \mathbb{R}, \quad f \in D(\mathbf{T}_0^{-1}),$$

де $L \in C^2(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Для спряжених операторів $\mathbf{T}_0^*$ і $\left(\mathbf{T}_0^{-1}\right)^* = (\mathbf{T}_0^*)^{-1}$ маємо $\mathbf{T}_0^* : H^0 \to H^0$, $D(\mathbf{T}_0^*) = \widetilde{H}^0 = R\left((\mathbf{T}_0^*)^{-1}\right)$,

$$(\mathbf{T}_0^* \varphi)(\xi) = \varphi(\xi) + \operatorname{sgn}\xi \int\limits_0^{|\xi|} K(\lambda, |\xi|) \varphi(\lambda)\, d\lambda, \qquad \xi \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in D(\mathbf{T}_0^*),$$

і $(\mathbf{T}_0^*)^{-1} : H^0 \to H^0$, $D\left((\mathbf{T}_0^*)^{-1}\right) = \widetilde{H}^0 = R(\mathbf{T}_0^*)$,

$$\left((\mathbf{T}_0^*)^{-1} \psi\right)(\lambda) = \psi(\lambda) + \operatorname{sgn}\lambda \int\limits_0^{|\lambda|} L(\xi, |\lambda|) \psi(\xi)\, d\xi, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \psi \in D\left((\mathbf{T}_0^*)^{-1}\right).$$

Наступну теорему було доведено в [7].

Теорема 3.5. *Оператор* $\mathbf{T}_0^*$ *є автоморфізмом простору* $\widetilde{H}^m$, $m = \overline{-2, 2}$.

Тепер наведемо означення оператора $\mathbf{T}_r$.

Означення 3.2. *Позначимо через* $\mathbf{T}_r$ *оператор* $\left(\mathbf{T}_0^*|_{H^2}\right)^*$. *Маємо* $\mathbf{T}_r : H^{-2} \to H^{-2}$, $D(\mathbf{T}_r) = \widetilde{H}^{-2}$, $\langle \mathbf{T}_r g, \varphi \rangle = \langle g, \mathbf{T}_0^* \varphi \rangle$, $g \in D(\mathbf{T}_r) = \widetilde{H}^{-2}$, $\varphi \in D(\mathbf{T}_r^*) \cap \widetilde{H}^2 = \widetilde{H}^2$.

Тоді $\mathbf{T}_r^{-1} = \left((\mathbf{T}_0^*)^{-1}|_{H_0^2}\right)^*$, $\mathbf{T}_r^{-1} : H_0^{-2} \to H_0^{-2}$, $D\left(\mathbf{T}_r^{-1}\right) = \widetilde{H}_0^{-2}$ і $\langle \mathbf{T}_r^{-1} f, \psi \rangle = \langle g, (\mathbf{T}_0^*)^{-1} \psi \rangle$, $f \in D\left(\mathbf{T}_r^{-1}\right) = \widetilde{H}^{-2}$, $\psi \in D\left((\mathbf{T}_r^*)^{-1}\right) \cap \widetilde{H}^2 = H^2$.

Наступні чотири теореми було доведено в [7].

Теорема 3.6. *Оператор* $\mathbf{T}_r$ *є автоморфізмом простору* $\widetilde{H}^m$, $m = \overline{-2, 2}$.

Теорема 3.7. *Справджується рівність*

$$\left((d/d\lambda)^2 - r(|\lambda|)\right)(\mathbf{T}_r g) = \mathbf{T}_r\left((d/d\xi)^2 g\right) + 2\delta'(\lambda)\int\limits_0^\infty K(0,\xi)g(\xi)\,d\xi, \quad g \in \widetilde{H}^0.$$

Більш того, якщо $g \in \widetilde{H}^0$ *та існує* $g(+0)$, *то* $\displaystyle\int_0^\infty K(0,\xi)g(\xi)\,d\xi = (\mathbf{T}_r g)(+0) - g(+0)$.

Теорема 3.8. *Справджується рівність*

$$(d/d\xi)^2\left(\mathbf{T}_r^{-1} f\right) = \mathbf{T}_r^{-1}\left(\left((d/d\lambda)^2 - r(|\lambda|)\right) f\right) + 2\delta'(\xi)\int\limits_0^\infty L(0,\lambda)f(\lambda)\,d\lambda, \quad f \in \widetilde{H}^0.$$

Більш того, якщо $f \in \widetilde{H}^0$ *та існує* $f(+0)$, *то* $\displaystyle\int_0^\infty L(0,\lambda)f(\lambda)\,dx = \left(\mathbf{T}_r^{-1} f\right)(+0) - f(+0)$.

Теорема 3.9. *Маємо* $\mathbf{T}_r(\delta') = \delta'$.

Ядра K та L інтегральних операторів $\mathbf{T}_r$ і $\mathbf{T}_r^{-1}$ було явно знайдено в [6] (приклад 5.1) для $r(\lambda) = \beta e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$, де $\beta > 0$ — стала.

4. Умови керованості. Скориставшись оператором перетворення $\mathbf{ST}_r$ та його оберненим, перетворимо кожний розв'язок керованої системи (2.6), (2.7) із найпростішим хвильовим оператором на розв'язок керованої системи (2.3), (2.4) із загальним хвильовим оператором, і навпаки (теореми 4.1, 4.2). Зазначимо, що теореми 4.1, 4.2 і наслідок 4.1 є аналогами теорем 4.1, 4.3 та наслідку 4.2 [7], і ми їх доводимо цілком аналогічно.

Теорема 4.1. *Нехай* Z *є розв'язком системи* (2.6), (2.7) *для деяких* $v \in L^\infty(0,T)$ *і* $Z^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}$. *Нехай* $W(\cdot,t) = \mathbf{ST}_r Z(\cdot,t)$, $t \in [0,T]$. *Тоді* W *є розв'язком системи* (2.3), (2.4) *з* $W^0 = \mathbf{ST}_r Z^0$ *та*

$$\eta(0)u(t) = v(t) + \int\limits_0^\infty K(0,\xi)Z(\xi,t)\,d\xi, \quad t \in [0,T], \tag{4.1}$$

і (2.5) *виконано. Більш того,*

$$\left[\!\left[\!\left[\begin{pmatrix} W(\cdot,t) \\ W_t(\cdot,t)\end{pmatrix}\right]\!\right]\!\right]^0 \le C_0 \left|\!\left|\!\left|\begin{pmatrix} Z(\cdot,t) \\ Z_t(\cdot,t)\end{pmatrix}\right|\!\right|\!\right|^0, \quad t \in [0,T], \tag{4.2}$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T)} \le C_1 Q(T)\left(\|v\|_{L^\infty(0,T)} + |||Z^0|||^0\right), \tag{4.3}$$

де $Q(T) = \sqrt{(2T^2+6)(1+q^2)}$, $C_0 > 0$ *та* $C_1 > 0$ — *деякі сталі.*

***Наслідок* 4.1.** *Якщо* W *є розв'язком системи* (2.3), (2.4) *для деяких* $u \in L^\infty(0,T)$ *і* $W^0 \in \mathbb{H}$, *то* (2.5) *виконано.*

Теорема 4.2. *Нехай* W *є розв'язком системи* (2.3), (2.4) *для деяких* $u \in L^\infty(0,T)$ *і* $W^0 \in \mathbb{H}$ *та* $Z(\cdot,t) = \mathbf{T}_r^{-1}\mathbf{S}^{-1}W(\cdot,t)$, $t \in [0,T]$. *Тоді* Z *є розв'язком системи* (2.6), (2.7) *з* $Z^0 = \mathbf{T}_r^{-1}\mathbf{S}^{-1}W^0$ *та*

$$v(t) = \eta(0)u(t) + \int\limits_0^\infty L(0,x)\mathbf{S}^{-1}W(x,t)\,dx, \quad t \in [0,T]. \tag{4.4}$$

Більш того,

$$\left|\left|\left|\begin{pmatrix} Z(\cdot,t) \\ Z_t(\cdot,t) \end{pmatrix}\right|\right|\right|^0 \le G_0 \left|\left|\left|\begin{pmatrix} W(\cdot,t) \\ W_t(\cdot,t) \end{pmatrix}\right|\right|\right|^0, \quad t \in [0,T], \tag{4.5}$$

$$\|v\|_{L^\infty(0,T)} \le G_1 Q(T) e^{TG_2} \left(\|u\|_{L^\infty(0,T)} + |||W^0|||^0 \right), \tag{4.6}$$

де $Q(T) = \sqrt{(2T^2+6)(1+q^2)}$, $G_0 > 0$, $G_1 > 0$ *та* $G_2 > 0$ *— деякі сталі.*

Ці теореми та наслідок доведено з допомогою оператора перетворення $\mathbf{ST}_r$ та оберненого до нього до систем (2.3), (2.4) та (2.6), (2.7). Теореми 3.2 і 3.6 відіграють головну роль у їх доведенні (див. [7], теореми 4.1, 4.3 та наслідок 4.1). У доведенні теореми 4.2 використано узагальнену теорему Гронуолла (див. [7], теорема 4.3).

***Зауваження* 4.1.** За теоремою 3.2 [4] система (2.6), (2.7) має єдиний розв'язок. Тому з теорем 4.1, 4.2 випливає єдиність розв'язку задачі (2.3), (2.4) (і (1.1) – (1.3)).

***Зауваження* 4.2.** Беручи до уваги (4.2), (4.5) і (4.6), одержуємо

$$\left|\left|\left|\begin{pmatrix} W(\cdot,t) \\ W_t(\cdot,t) \end{pmatrix}\right|\right|\right|^0 \le C(T) \left(|||W^0|||^0 + \|u\|_{L^\infty(0,T)} \right), \quad t \in [0,T],$$

де $C(T) = C_0 Q(T) \left(G_0 + G_1 Q(T) e^{TG_2} \right)$, C_0, G_0, G_1, G_2 та $Q(T)$ — сталі з теорем 4.1 та 4.2. Тому задачі (2.3), (2.4) і (1.1) – (1.3) є коректними.

Таким чином, керована система (2.3), (2.4) із загальним хвильовим оператором є перетворенням за допомогою оператора $\mathbf{ST}_r$ керованої системи (2.6), (2.7) із найпростішим хвильовим оператором і, навпаки, керована система (2.6), (2.7) є перетворенням за допомогою оператора $(\mathbf{ST}_r)^{-1}$ керованої системи (2.3), (2.4).

Для заданих $T > 0$ і $W^0 \in \mathbb{H}^0$ ($Z^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$) позначимо через $\mathcal{R}_T^g(W^0)$ $\big($відповідно $\mathcal{R}_T^s(Z^0)\big)$ множину станів $W^T \in \mathbb{H}^0$ $\big($відповідно $Z^T \in \widetilde{\mathbf{H}}^0\big)$, для яких існує керування $u \in L^\infty(0,T)$ $\big($відповідно $v \in L^\infty(0,T)\big)$ таке, що задача (2.3), (2.4) (відповідно (2.6), (2.7)) має єдиний розв'язок W $\big($відповідно $Z\big)$ і $\begin{pmatrix} W(\cdot,T) \\ W_t(\cdot,T) \end{pmatrix} = W^T \left(\text{відповідно } \begin{pmatrix} Z(\cdot,T) \\ Z_t(\cdot,T) \end{pmatrix} = Z^T \right)$. Для заданих $W^0 \in \mathbb{H}^0$ і $Z^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$ позначимо $\mathcal{R}^g(W^0) = \bigcup_{T>0} \mathcal{R}_T^g(W^0)$ і $\mathcal{R}^s(Z^0) = \bigcup_{T>0} \mathcal{R}_T^s(Z^0)$.

Означення 4.1. *Стан* $W^0 \in \mathbb{H}^0$ $(Z^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0)$ *називається* L^∞*-керованим відносно системи* (2.3), (2.4) (*відповідно* (2.6), (2.7)) *за заданий час* $T > 0$, *якщо* 0 *належить* $\mathcal{R}_T^g(W^0)$ (*відповідно* $\mathcal{R}_T^s(Z^0)$), *і наближено* L^∞*-керованим відносно системи* (2.3), (2.4) (*відповідно* (2.6), (2.7)) *за заданий час* $T > 0$, *якщо* 0 *належить замиканню* $\mathcal{R}_T^g(W^0)$ *в* $\mathbb{H}^0$ $\big($*відповідно* $\mathcal{R}_T^s(Z^0)$ *в* $\widetilde{\mathbf{H}}^0\big)$.

Означення 4.2. *Стан* $W^0 \in \mathbb{H}^0$ $(Z^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0)$ *називається наближено* L^∞*-керованим відносно системи* (2.3), (2.4) (*відповідно* (2.6), (2.7)) *за вільний час*, *якщо* 0 *належить замиканню* $\mathcal{R}^g(W^0)$ *в* $\mathbb{H}^0$ $\big($*відповідно* $\mathcal{R}^s(Z^0)$ *в* $\widetilde{\mathbf{H}}^0\big)$.

З теорем 4.1 та 4.2 випливає такий результат.

***Наслідок* 4.2.** *Нехай* $W^0 \in \mathbb{H}^0$, $Z^0 = (\mathbf{ST}_r)^{-1} W^0$ *і задано час* $T > 0$.

(i) W^0 *є наближено* L^∞*-керованим відносно системи* (2.3), (2.4) *за час* T *тоді і лише тоді, коли* Z^0 *є наближено* L^∞*-керованим відносно системи* (2.6), (2.7) *за той же час.*

(ii) W^0 *є* L^∞*-керованим відносно системи* (2.3), (2.4) *за час* T *тоді і лише тоді, коли* Z^0 *є* L^∞*-керованим відносно системи* (2.6), (2.7) *за той же час.*

Для того щоб сформулювати властивості керованої системи (2.6), (2.7), нагадаємо деякі означення і твердження з [5]. Будемо вважати, що $\mathcal{S}$ — простір Шварца швидко спадних функцій, а $\mathcal{S}'$ є двоїстим до нього (тобто $\mathcal{S}'$ є простором помірних розподілів). Нехай $\beta > 0$, $\mathbf{\Psi}_\beta : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, $D\left(\mathbf{\Psi}_\beta\right) = \left\{g \in \mathcal{S}' \mid g \text{ непарне і } \operatorname{supp} g \subset [-\beta, \beta]\right\} = R\left(\mathbf{\Psi}_\beta\right)$,

$$\mathbf{\Psi}_\beta g = \mathcal{F}^{-1}_{\sigma \to \xi}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + q^2}}\left(\mathcal{F}g\right)\left(\sqrt{\sigma^2 + q^2}\right)\right), \quad g \in D(\mathbf{\Psi}_\beta),$$

де $\mathcal{F}$ — оператор перетворення Фур'є. Зрозуміло, що якщо $q = 0$, то $\mathbf{\Psi}_\beta = \operatorname{Id}$ (де Id — тотожний оператор). Зокрема,

$$\left(\mathbf{\Psi}_\beta g\right)(\xi) = g(\xi) - q\xi \int\limits_{|\xi|}^{\infty} \frac{J_1\left(q\sqrt{\tau^2 - \xi^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - \xi^2}} g(\tau)\, d\tau, \qquad \xi \in \mathbb{R}, \quad g \in D\left(\mathbf{\Psi}_\beta\right) \cap H^0.$$

Тут J_ν, $\nu = \overline{0, \infty}$, — функція Бесселя. Оператор $\mathbf{\Psi}_\beta$ є оборотним і $\mathbf{\Psi}_\beta^{-1} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, $D\Big(\mathbf{\Psi}_\beta^{-1}\Big) = R(\mathbf{\Psi}_\beta) = D(\mathbf{\Psi}_\beta) = R\Big(\mathbf{\Psi}_\beta^{-1}\Big)$,

$$\mathbf{\Psi}_\beta^{-1} f = \mathcal{F}^{-1}_{\sigma \to \xi}\left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - q^2}}\left(\mathcal{F}f\right)\left(\sqrt{\mu^2 - q^2}\right)\right), \quad f \in D\big(\mathbf{\Psi}_\beta^{-1}\big).$$

Зокрема,

$$\Big(\mathbf{\Psi}_\beta^{-1} f\Big)(\tau) = f(\tau) + q\tau \int\limits_{|\tau|}^{\infty} \frac{I_1\left(q\sqrt{\xi^2 - \tau^2}\right)}{\sqrt{\xi^2 - \tau^2}} f(\xi)\, d\xi, \qquad \tau \in \mathbb{R}, \quad f \in D\big(\mathbf{\Psi}_\beta^{-1}\big) \cap H^0,$$

де I_ν — модифікована функція Бесселя: $I_\nu(\tau) = i^{-\nu} J_\nu(i\tau)$, $\nu = \overline{0, \infty}$. Оператори $\mathbf{\Psi}_\beta$ та $\mathbf{\Psi}_\beta^{-1}$ є обмеженими з H^{-s} в H^{-s}, $s \geq 0$. Більш того, $\mathbf{\Psi}\Big(\widetilde{H}^{-s} \cap D\left(\mathbf{\Psi}_\beta\right)\Big) = \widetilde{H}^{-s} \cap R\left(\mathbf{\Psi}_\beta\right)$, $s \geq 0$. Якщо $f = \mathbf{\Psi}_\beta g$, то $f \in L^\infty(-\beta, \beta)$ у тому і лише в тому випадку, коли $g \in L^\infty(-\beta, \beta)$.

Скориставшись наслідком 3.9 [5], теоремами 4.1, 4.2 і наслідком 4.2, одержимо умови керованості за заданий час для системи (2.3), (2.4) з таких умов для системи (2.6), (2.7).

Теорема 4.3. *Нехай* $W^0 \in \mathbb{H}^0$ *і задано час* $T > 0$.

(i) W^0 *є наближено* L^∞*-керованим відносно системи* (2.3), (2.4) *за час* T *тоді і лише тоді, коли*

$$\operatorname{supp} W^0_0 \subset \left[-\sigma^{-1}(T), \sigma^{-1}(T)\right], \tag{4.7}$$

$$W^0_1 - \left(\mathbf{ST}_r \mathbf{\Psi}_T\right)\left(\left(\operatorname{sgn} x \left(\mathbf{ST}_r \mathbf{\Psi}_T\right)^{-1} W^0_0\right)'\right) = 0. \tag{4.8}$$

(ii) W^0 *є* L^∞*-керованим відносно системи* (2.3), (2.4) *за час* T *тоді і лише тоді, коли* $\eta W^0_0 \in L^\infty(0, \sigma^{-1}(T))$ *і виконано* (4.7), (4.8).

Доведення. (i) За наслідком 4.2 і наслідком 3.9 [5] W^0 є наближено L^∞-керованим відносно системи (2.3), (2.4) за час T тоді і лише тоді, коли виконано умови (4.7), (4.8).

(ii) Покладемо $Z^0 = \mathbf{T}_r^{-1}\mathbf{S}^{-1}W^0$. Беручи до уваги наслідок 4.2, наслідок 3.9 [5] та твердження (i), бачимо, що достатньо довести, що

$$\eta W_0^0 \in L^\infty(0, \sigma^{-1}(T)) \quad \text{тоді і тільки тоді, коли} \quad Z_0^0 \in L^\infty(0,T), \tag{4.9}$$

замість доведення (ii). Застосовуючи (3.6), одержуємо

$$\left\| Z_0^0 \right\|_{L^\infty(0,T)} \le \left\| \eta W_0^0 \right\|_{L^\infty(0,\sigma^{-1}(T))} \Big(1 + \| K(0,\cdot) \|_{L^2(0,+\infty)} \Big),$$

тобто якщо $W_0^0 \in L^\infty(0, \sigma^{-1}(T))$, то $Z_0^0 \in L^\infty(0,T)$. Протилежне твердження одержуємо аналогічно. Отже, (4.9) виконано. Беручи до уваги наслідок 4.2 і наслідок 3.9 [5], бачимо, що (ii) також виконано.

Теорему 4.3 доведено.

З теорем 4.1 та 4.2 випливає таке твердження.

***Наслідок* 4.3.** *Нехай $W^0 \in \mathbb{H}^0$ і $Z^0 = (\mathbf{ST}_r)^{-1}W^0$. Стан W^0 є наближено L^∞-керованим відносно системи* (2.3), (2.4) *за вільний час тоді і лише тоді, коли Z^0 є наближено L^∞-керованим відносно системи* (2.6), (2.7) *за вільний час.*

Застосовуючи наслідок 4.3, теорему 1.1 [23] та теорему 3.8 [5], одержуємо умови керованості за вільний час для системи (2.3), (2.4) з відповідних умов для системи (2.6), (2.7).

Теорема 4.4. *Нехай $q = 0$. Стан $W^0 \in \mathbb{H}^0$ є наближено L^∞-керованим відносно системи* (2.3), (2.4) *за вільний час тоді і лише тоді, коли*

$$W_1^0 - \mathbf{ST}_r \Big(\operatorname{sgn} x \; (\mathbf{ST}_r)^{-1} W_0^0 \Big)' = 0. \tag{4.10}$$

Зазначимо, що якщо $q = 0$, то умова (4.10) еквівалентна умові (4.8).

Теорема 4.5. *Нехай $q > 0$. Кожний стан $W^0 \in \mathbb{H}^0$ є наближено L^∞-керованим відносно системи* (2.3), (2.4) *за вільний час.*

Таким чином, перетворена керована система (2.3), (2.4) із загальним хвильовим оператором відтворює властивості керованості своєї оригінальної керованої системи (2.6), (2.7) із найпростішим хвильовим оператором за заданий та вільний час і навпаки.

5. Приклади. Нехай $\alpha \in \mathbb{R}$, $\delta \in [0,1]$, $\widehat{k}(x) = \left(l^2 - x^2\right)^\alpha$, $\widehat{\rho}(x) = (2l)^2 \left(l^2 - x^2\right)^{\alpha - 2}$, $\widehat{\gamma}(x) = \left(1 - \delta^2\right) \left(\dfrac{\alpha - 1}{2} \right)^2 - \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{4l^2} \left(l^2 - x^2\right) - \delta^2 \dfrac{l - |x|}{l + |x|}$, $x \in (-l, l)$, $W^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$ і $u \in L^\infty(0,T)$. Тоді

$$\eta(x) = \sqrt{2l} \left(l^2 - x^2\right)^{\frac{\alpha-1}{2}}, \qquad \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} \sqrt{l^2 - x^2},$$

$$\sigma(x) = \int_0^x \frac{2l \, d\xi}{l^2 - \xi^2} = \ln \frac{l + x}{l - x}, \qquad x \in (-l, l), \quad \sigma^{-1}(\lambda) = l \frac{e^\lambda - 1}{e^\lambda + 1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Маємо

$$\mathcal{D}_{\eta\theta}\varphi = \frac{1}{2l} \left(\left(l^2 - x^2\right) \varphi' - (\alpha - 1) x \varphi \right),$$

$$\mathcal{D}^2_{\eta\theta}\varphi = \frac{1}{4l^2}\Big(\left(l^2-x^2\right)^2\varphi'' - 2\alpha x\left(l^2-x^2\right)\varphi' + (\alpha-1)\left((\alpha-1)x^2 - \left(l^2-x^2\right)\right)\varphi\Big).$$

Отже,

$$\varphi\in\mathbb{H}^0 \Leftrightarrow \varphi\in L^2_{\eta\theta}(-l,l) \Leftrightarrow \left(l^2-x^2\right)^{\alpha/2-1}\varphi\in L^2(-l,l),$$

$$\varphi\in\mathbb{H}^1 \Leftrightarrow \varphi\in\mathbb{H}^0\wedge\left(l^2-x^2\right)\varphi'\in L^2_{\eta\theta}(-l,l) \Leftrightarrow \varphi\in\mathbb{H}^0\wedge\left(l^2-x^2\right)^{\alpha/2}\varphi'\in L^2(-l,l),$$

$$\varphi\in\mathbb{H}^2 \Leftrightarrow \varphi\in\mathbb{H}^1\wedge\left(l^2-x^2\right)^2\varphi''\in L^2_{\eta\theta}(-l,l) \Leftrightarrow \varphi\in\mathbb{H}^1\wedge\left(l^2-x^2\right)^{\alpha/2+1}\varphi''\in L^2(-l,l).$$

Тоді

$$\nu = \mathcal{D}_{\eta\theta}\left(\theta^2\eta'/\eta\right) = \theta^2\left(\theta^2\eta'/\eta\right)' + \left(\theta^2\eta'/\eta\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4l^2}\left(-(\alpha-1)^2\left(l^2-x^2\right) + (\alpha-1)^2x^2\right) = \left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^2 - \frac{\alpha(\alpha-1)}{4l^2}\left(l^2-x^2\right).$$

Тому $r\circ\sigma + q^2 = \nu - \gamma = \delta^2\left(\dfrac{l-|x|}{l+|x|} + \left(\dfrac{\alpha-1}{2}\right)^2\right)$. Отже, умови (1.7) та (1.8) виконано для $q = \delta\dfrac{\alpha-1}{2}$ і $r(\lambda) = \delta^2 e^{-|\lambda|}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, тому (3.6) також виконано. У цьому випадку ядра K та L операторів $\mathbf{T}_r$ та $\mathbf{T}_r^{-1}$ було обчислено в [6].

Розглянемо керовану систему (2.3), (2.4). Беручи до уваги теореми 4.3 і 4.5, одержуємо такі твердження:

(i) стан W^0 є наближено L^∞-керованим відносно системи (2.3), (2.4) за заданий час $T>0$ тоді і лише тоді, коли (4.7) та (4.8) виконано;

(ii) стан W^0 є L^∞-керованим відносно системи (2.3), (2.4) за заданий час $T>0$ тоді і лише тоді, коли $(l^2-x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}W^0_0\in L^\infty(0,T)$ і виконано (4.7), (4.8);

(iii) якщо $\delta\neq 0$ і $\alpha\neq 1$, то стан W^0 є завжди L^∞-керованим відносно системи (2.3), (2.4) за вільний час;

(iv) якщо $\delta = 0$ або $\alpha = 1$, то стан W^0 є наближено L^∞-керованим відносно системи (2.3), (2.4) за вільний час тоді і лише тоді, коли виконано (4.10).

Знайдемо явні співвідношення між розв'язком W системи (2.3), (2.4) та розв'язком Z задачі (2.6), (2.7), де $W(\cdot,t) = \mathbf{S}\mathbf{T}_r Z(\cdot,t)$, $t\in[0,T]$. Використовуючи явну формулу, одержану в [6] для K, маємо

$$\left(\mathbf{T}_r Z(\cdot,t)\right)(\lambda) = Z(\lambda,t) + \frac{\delta}{2}\int\limits_{|\lambda|}^{\infty}\frac{I_1\left(2\delta\sqrt{e^{-\frac{|\lambda|}{2}}\left(e^{-\frac{|\lambda|}{2}} - e^{-\frac{\xi}{2}}\right)}\right)}{\sqrt{e^{-\frac{|\lambda|}{2}}\left(e^{-\frac{|\lambda|}{2}} - e^{-\frac{\xi}{2}}\right)}}e^{-\frac{|\lambda|+\xi}{2}}Z(\xi,t)\,d\xi.$$

Позначаючи $\xi = \ln\dfrac{l+\mu}{l-\mu}$, одержуємо

$$W(x,t) = \frac{\left(l^2-x^2\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\sqrt{2l}}\left(Z\left(\ln\frac{l+x}{l-x},t\right) + l\delta\int\limits_{h(x)}^{l}K_1(x,\mu)Z\left(\ln\frac{l+\mu}{l-\mu},t\right)d\mu\right),$$

де $h(x) = \ln \dfrac{l+|x|}{l-|x|}$,

$$K_1(x,\mu) = I_1\left(2\delta\sqrt{\frac{l-|x|}{l+|x|} - \sqrt{\frac{(l-|x|)(l-\mu)}{(l+|x|)(l+\mu)}}}\right) \Bigg/ \sqrt{\frac{l+\mu}{l-\mu} - \sqrt{\frac{(l+|x|)(l+\mu)}{(l-|x|)(l-\mu)}}}.$$

Розглянемо тепер окремий випадок, де

$$\delta = 0, \qquad u(t) = \frac{l^{1/2-\alpha}}{\sqrt{2}(2e^t-1)}, \quad t \in [0,T], \qquad W_0^0(x) = \frac{\left(l^2-x^2\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}(l-|x|)}{\sqrt{2}l(l+3|x|)}\operatorname{sgn} x,$$

$$W_1^0(x) = -\frac{\left(l^2-x^2\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}(l^2-x^2)}{\sqrt{2}l(l+3|x|)^2}\operatorname{sgn} x, \quad x \in (-l,l).$$

У цьому випадку ми можемо знайти керування, що розв'язують проблему наближеної L^∞-керованості за вільний час. Маємо $q=0$, $r=0$. Тому $\mathbf{T}_r$ — тотожний оператор. Далі, $Z_0^0(\xi) = \dfrac{\operatorname{sgn}\xi}{2e^{|\xi|}-1}$, $Z_1^0(\xi) = -\dfrac{2e^{|\xi|}\operatorname{sgn}\xi}{\left(2e^{|\xi|}-1\right)^2}$, $\xi \in \mathbb{R}$, $v(t) = \dfrac{1}{2e^t-1}$, $t \in [0,T]$. Бачимо, що $Z_1^0(\xi) = \left(Z_0^0(\xi)\operatorname{sgn}\xi\right)'$, $\xi \in \mathbb{R}$. Отже, для W^0 умову (4.10) виконано, і цей стан є наближено L^∞-керованим відносно системи (2.3), (2.4) за вільний час згідно з твердженням (iv). Можна переконатися, що

$$Z(\xi,t) = \frac{H(\xi)}{2e^{t+\xi}-1} - \frac{H(-\xi)}{2e^{t-\xi}-1} = \frac{\operatorname{sgn}\xi}{2e^t e^{|\xi|}-1}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

є розв'язком системи (2.6), (2.7). Маємо

$$\left|\!\left|\!\left|\begin{pmatrix} Z(\cdot,T) \\ Z_t(\cdot,T)\end{pmatrix}\right|\!\right|\!\right|^0 = \sqrt{2\int_0^\infty \frac{d\xi}{\left(2e^{T+\xi}-1\right)^2} + e^{2T}\int_0^\infty \frac{d\xi}{\left(2e^{T+\xi}-1\right)^4}} \le$$

$$\le \sqrt{2\int_T^\infty e^{-2\mu}\,d\mu + e^{2T}\int_T^\infty e^{-4\mu}\,d\mu} = \sqrt{3}e^{-T} \to 0 \quad \text{при} \quad T \to +\infty. \tag{5.1}$$

Застосовуючи оператор перетворення $\mathbf{ST}_r = \mathbf{S}$ до $Z(\cdot,t)$ і беручи до уваги теорему 4.1, бачимо, що

$$W(x,t) = \frac{\left(l^2-x^2\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}(l-|x|)}{\sqrt{2}l(l\left(2e^t-1\right)+|x|\left(2e^t+1\right))}\operatorname{sgn} x, \quad x \in (-l,l),$$

є розв'язком системи (2.3), (2.4). Згідно з (5.1) одержуємо

$$\left[\!\left[\!\left[\begin{pmatrix} W(\cdot,T) \\ W_t(\cdot,T)\end{pmatrix}\right]\!\right]\!\right]^0 \le C_0 \left|\!\left|\!\left|\begin{pmatrix} Z(\cdot,T) \\ Z_t(\cdot,T)\end{pmatrix}\right|\!\right|\!\right|^0 \le \sqrt{3}C_0 e^{-T} \to 0 \quad \text{при} \quad T \to +\infty.$$

Таким чином, керування $u_n(t) = \dfrac{l^{1/2-\alpha}}{\sqrt{2}(2e^t-1)}$, $t \in [0,T_n]$, розв'язують задачу наближеної L^∞-керованості відносно системи (2.3), (2.4) за вільний час для стану W^0. Тут $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,+\infty)$ є довільною послідовністю, що зростає до $+\infty$. Зокрема, $W(x,t) \to 0$ при $x \to l$, якщо $\alpha < 1$, і $W(x,t) \to \infty$ при $x \to l$, якщо $\alpha > 1$.

Література

1. *Alabau-Boussouira F., Cannarsa P., Leugering G.* Control and stabilization of degenerate wave equations // arXiv:1505.05720.
2. *Antosik P., Mikusiński J., Sikorski R.* Theory of distributions. The sequential approach. – Amsterdam: Elsevier, 1973.
3. *Castro C.* Exact controllability of the 1-D wave equation from a moving interior point // ESAIM. Control, Optim. and Calc. Var. – 2013. – **19**. – P. 301 – 316.
4. *Fardigola L. V.* Controllability problems for the string equation on a half-axis with a boundary control bounded by a hard constant // SIAM J. Control Optim. – 2008. – **47**, № 4. – P. 2179 – 2199.
5. *Fardigola L. V.* Controllability problems for the 1-d wave equation on a half-axis with the Dirichlet boundary control // ESAIM. Control, Optim. Calc. Var. – 2012. – **18**. – P. 748 – 773.
6. *Fardigola L. V.* Transformation operators of the Sturm – Liouville problem in controllability problems for the wave equation on a half-axis // SIAM J. Control Optim. – 2013. – **51**. – P. 1781 – 1801.
7. *Fardigola L. V.* Transformation operators of the Sturm – Liouville problem in controllability problems for the wave equation with variable coefficients on a half-axis controlled by the Dirichlet boundary control // Math. Control and Relat. Fields. – 2015. – **5**. – P. 31 – 53.
8. *Фардигола Л. В., Халіна К. С.* Проблеми керованості для рівняння струни // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 7. – С. 939 – 952.
9. *Gindikin S. G., Volevich L. R.* Distributions and convolution equations. – Philadelphia: Gordon and Breach Sci. Publ., 1992.
10. *Gueye M.* Exact boundary controllability of 1-D parabolic and hyperbolic degenerate equations // SIAM J. Control Optim. – 2014. – **52(4)**. – P. 2037 – 2054.
11. *Gugat M., Keimer A., Leugering G.* Optimal distributed control of the wave equation subject to state constraints // Z. angew. Math. und Mech. – 2009. – **89**, № 6. – S. 420 – 444.
12. *Gugat M., Leugering G.* L^∞-norm minimal control of the wave equation: on the weakness of the bang-bang principle // ESAIM. Control, Optim. and Calc. Var. – 2008. – **14**, № 2. – P. 254 – 283.
13. *Gugat M., Sokolowski J.* A note on the approximation of Dirichlet boundary control problems for the wave equation on curved domains // Appl. Anal. – 2012. – **92**, № 10. – P. 2200 – 2214.
14. *Ильин В. А., Кулешов А. А.* Обобщенные решения вонового уравнения из классов L_p и W_p^1, $p \geq 1$ // Докл. АН. – 2012. – **446**, № 4. – С. 374 – 377.
15. *Халіна К. С.* Проблеми крайової керованості для рівняння коливання неоднорідної струни на півосі // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 4. – С. 525 – 541.
16. *Khalina K. S.* On the Neumann boundary controllability for a non-homogeneous string on a half-axis // J. Math. Phys., Anal. and Geom. – 2012. – **8**, № 4. – P. 307 – 335.
17. *Халіна К. С.* Про керованість крайовими умовами Діріхле для неоднорідної струни на півосі // Доп. НАН України. – 2012. – № 10. – С. 24 – 29.
18. *Lui Y.* Some sufficient conditions for the controllability of the wave equation with variable coefficients // Acta Appl. Math. – 2013. – **128**. – P. 181 – 191.
19. *Marchenko V. A.* Sturm – Liouville operators and applications. – Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2011.
20. *Mizumachi T.* Decay properties of solutions to degenerate wave equation with dissipative terms // Adv. Different. Equat. – 1997. – **2**, № 4. – P. 573 – 592.
21. *Privat Y., Trélat E., Zuazua E.* Optimal location of controllers for the one-dimensional wave equation // Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire. – 2013. – **30**, № 6. – P. 1097 – 1126.
22. *Seck Ch., Bayili G., Séne A., Niane M. T.* Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans des espaces de Sobolev non réguliers pour un ouvert polygonal // Afr. Mat. – 2012. – **23**, № 1. – P. 1 – 9.
23. *Sklyar G. M., Fardigola L. V.* The Markov power moment problem in problems of controllability and frequency extinguishing for the wave equation on a half-axis // J. Math. Anal. and Appl. – 2002. – **276**, № 1. – P. 109 – 134.
24. *Vancostenoble J., Zuazua E.* Hardy inequalities, observability, and control for the wave and Schrödinder equations with singular potentials // SIAM J. Math. Anal. – 2009. – **41**, № 4. – P. 1508 – 1532.
25. *Zhang M., Gao H.* Null controllability of some degenerate wave equations // J. Syst. Sci. Complex. – 2016.
26. *Zhang X.* A unified controllability/observability theory for some stochastic and deterministic partial differential equations // Proc. Intern. Congr. Math. (Hyderabad, India). – 2010. – **4**. – P. 3008 – 3034.
27. *Zuazua E.* Controllability and observability of partial differential equations: some results and open problems // Handbook Different. Equat.: Evol. Equat. – 2006. – **3**.

Одержано 20.02.17