УДК 517.5, 539.3

С. В. Грищук (Ін-т математики НАН України, Київ)

КОМУТАТИВНІ КОМПЛЕКСНІ АЛГЕБРИ ДРУГОГО РАНГУ З ОДИНИЦЕЮ ТА ДЕЯКІ ВИПАДКИ ПЛОСКОЇ ОРТОТРОПІЇ. I *

Among all two-dimensional algebras of the second rank with unity e over the field of complex numbers $\mathbb{C}$, we find a semisimple algebra $\mathbb{B}_0 := \{c_1e+c_2\omega : c_k \in \mathbb{C},\, k = 1,2\}$, $\omega^2 = e$, containing bases (e_1, e_2), such that $e_1^4+2pe_1^2e_2^2+e_2^4 = 0$ for every fixed $p > 1$. A domain $\{(e_1, e_2)\}$ is described in the explicit form. We construct $\mathbb{B}_0$-valued "analytic" functions Φ such that their real-valued components satisfy the equation for the stress function u in the case of orthotropic plane deformations $\left(\dfrac{\partial^4}{\partial x^4} + 2p\dfrac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4}{\partial y^4}\right)u(x, y) = 0$, where $x,\ y$ are real variables.

Серед двовимірних алгебр другого рангу з одиницею e над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ знайдено напівпросту алгебру $\mathbb{B}_0 = \{c_1e + c_2\omega : c_k \in \mathbb{C}, k = 1,2\}$, $\omega^2 = e$, що містить базиси (e_1, e_2) такі, що $e_1^4 + 2pe_1^2e_2^2 + e_2^4 = 0$ для кожного фіксованого $p > 1$. Множину $\{(e_1, e_2)\}$ описано в явному вигляді. Побудовано $\mathbb{B}_0$-значні „аналітичні" функції Φ такі, що їхні дійснозначні компоненти задовольняють рівняння для знаходження функції напружень u у випадку плоских ортотропних деформацій $\left(\dfrac{\partial^4}{\partial x^4} + 2p\dfrac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4}{\partial y^4}\right)u(x, y) = 0$, де $x,\ y$ — дійсні змінні.

1. Вступ. Розробці алгебраїчно-аналітичних підходів дослідження пружних середовищ через „аналітичні" функції (задовольняють систему рівнянь з частинними похідними — узагальнення „умов Коші – Рімана") зі значеннями у скінченновимірних алгебрах присвячено роботи [1 – 15] (комутативні алгебри, ізотропні плоскі середовища), [16] (комутативна алгебра, ортотропні плоскі середовища), [17 – 22] (алгебра кватерніонів, ізотропні просторові середовища), [23 – 25] (алгебри комплексних (2×2)-матриць, анізотропні плоскі середовища), [26] (алгебри комплексних (3×3)-матриць, анізотропні просторові середовища).

Сучасні роботи ряду авторів (див., наприклад, [17 – 19]) присвячено дослідженням поліноміальних розв'язків просторової системи рівнянь рівноваги Ляме і знаходженню їх подання через кватерніонні „моногенні" поліноми. Суттєвим є те, що такого роду підходи ґрунтуються на певних узагальненнях формул Колосова – Мусхелішвілі для випадку кватерніоннозначних „моногенних" функцій (див., наприклад, [19 – 22]).

Незважаючи на таку значну кількість публікацій, переважну кількість робіт присвячено лише знаходженню частинних розв'язків системи рівнянь рівноваги Ляме у зміщеннях через оператори від відповідних „аналітичних" функцій у певних опуклих областях.

Дану роботу присвячено побудові класів „аналітичних" функцій Φ зі значеннями у двовимірних алгебрах над полем комплексних чисел, що містять базиси (e_1, e_2) з певними алгебраїчними властивостями (далі будуються всі вказані базиси у явному вигляді та відповідна алгебра), які є достатніми для того, щоб дійсні компоненти даних функцій задовольняли такі рівняння при фіксованих $p > 1$:

$$\widetilde{l}_p u(x, y) := \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2p\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) u(x, y) = 0. \tag{1}$$

Рівняння (1) є частинним випадком *узагальненого бігармонічного рівняння* (даний термін використовується, наприклад, у [27, с. 603]), що має важливе значення у плоскій анізотропній

* Частково підтримано грантом Міністерства освіти і науки України (проект № 0116U001528) та грантом №39/2014 між академіями наук України та Польщі.

теорії пружності (див. [27–33]) і визначає рівняння для знаходження функції напружень $u(x, y)$ (в ізотропному випадку подібну функцію часто називають функцією Ейрі, а рівняння (1) тоді перетворюється на бігармонічне рівняння при $p = 1$).

2. Двовимірні алгебри над полем комплексних чисел та їх базиси. Як відомо (див. [34]), існують (з точністю до ізоморфізму) дві асоціативні, комутативні над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ алгебри другого рангу з одиницею e. Це алгебри, породжені базисами (e, ρ) (e, ω) відповідно:

$$\mathbb{B} := \{c_1 e + c_2 \rho\colon c_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2\}, \quad \rho^2 = 0, \tag{2}$$

$$\mathbb{B}_0 := \{c_1 e + c_2 \omega\colon c_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2\}, \quad \omega^2 = e. \tag{3}$$

Очевидно, що алгебра $\mathbb{B}_0$ є напівпростою (означення див., наприклад, у [35, с. 33]) і містить базис з ортогональних ідемпотентів $(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$, де

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{2}\left(e + \omega\right), \qquad \mathcal{I}_2 = \frac{1}{2}\left(e - \omega\right), \qquad \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 = 0. \tag{4}$$

Очевидно, що

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = e, \qquad \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 = \omega. \tag{5}$$

У зарубіжних джерелах для алгебри $\mathbb{B}_0$ використовують кілька назв. Наприклад, у роботі [36] її названо *уніподальною*. При цьому вона визначає найпростіший випадок *комплексної алгебри Кліффорда* (див. [36–38]).

Алгебра (3) є комплексифікацією алгебри *гіперболічних або подвійних чисел* $\mathbb{P}$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{B}_0 = \mathbb{P} \oplus i\mathbb{P}, \qquad \mathbb{P} := \{xe + hy\colon x, y \in \mathbb{R}\}, \quad h := \omega,$$

де i — комплексна уявна одиниця. Зазначимо, що алгебра $\mathbb{P}$ розглядається, наприклад, у [38–40]. У роботі [41] для $\mathbb{P} \oplus i\mathbb{P}$ використано термін „гіперболічні числа” і розглянуто їх застосування у релятивістській квантовій фізиці.

Елемент $w = c_1 \mathcal{I}_1 + c_2 \mathcal{I}_2$ з $\mathbb{B}_0$ є оборотним тоді і тільки тоді, коли $c_k \neq 0$, $k = 1, 2$, у випадку виконання цієї умови для оберненого елемента справджується рівність (див. [37, с. 38]

$$w^{-1} = \frac{1}{c_1}\,\mathcal{I}_1 + \frac{1}{c_2}\,\mathcal{I}_2. \tag{6}$$

Оскільки алгебра $\mathbb{B}$ містить ненульовий радикал $\{c\rho\colon c \in \mathbb{C}\}$ (див. [4]), то алгебра $\mathbb{B}$ не є напівпростою. Елемент $a = c_1 e + c_2 \rho$ з $\mathbb{B}$ є оборотним тоді і тільки тоді, коли $c_1 \neq 0$, у випадку виконання цієї умови справджується рівність $a^{-1} = \dfrac{1}{c_1}\,e - \dfrac{c_2}{(c_1)^2}\,\rho$ (див. [44]).

Нехай $p > 1$ є довільним чином фіксованим дійсним числом, $p \in \mathbb{R}$. Введемо для довільних комплексних чисел c_1 і c_2 позначення

$$l_p(c_1, c_2) := c_1^4 + 2p c_1^2 c_2^2 + c_2^4. \tag{7}$$

Знайдемо асоціативну, комутативну над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ алгебру другого рангу з одиницею e, яка містить базис (e_1, e_2), що задовольняє умову

$$\mathcal{L}_p(e_1, e_2) := e_1^4 + 2p e_1^2 e_2^2 + e_2^4 = 0, \tag{8}$$

а всі корені рівняння

$$l_p(s,1) \equiv l_p(1,s) = 0 \tag{9}$$

є попарно різними. Зазначимо, що ці корені мають вигляд

$$\{s_1, s_2, \overline{s_1}, \overline{s_2}\} =: \ker l_p(s,1), \tag{10}$$

де $s_1 \neq s_2,\ s_k \in \mathbb{C},\ k = 1,2;\ \overline{x+iy} := x - iy \equiv \mathrm{Re}\, z - i\,\mathrm{Im}\, z,\ x,y \in \mathbb{R},\ z = x+iy$. Крім того, поставимо задачу про знаходження у шуканій алгебрі (або алгебрах) усіх базисів $\{(e_1, e_2)\}$, що задовольняють умову (8).

Зауважимо, що співвідношення (10) задає множину всіх (попарно різних) коренів рівняння (9), наприклад, за результатами робіт [28, 29].

При $p = 1$ аналогічну проблему розв'язано в [45] за припущення, що умова (10) замінюється на умову $e_1^2 + e_2^2 \neq 0$. При цьому доведено, що всі шукані базиси належать алгебрі $\mathbb{B}$. Крім того, там же показано, що над полем дійсних чисел не існує жодної алгебри другого рангу з необхідними властивостями.

При $p > 1$ одержуємо

$$s_1 = ip_1, \qquad s_2 = ip_2, \qquad p_1 = \frac{\sqrt{2(p+1)} - \sqrt{2(p-1)}}{2}, \qquad p_2 = \frac{\sqrt{2(p+1)} + \sqrt{2(p-1)}}{2}. \tag{11}$$

Отже, при $p > 1$ умова (10) завжди виконується.

Базис $(e_1, e_2),\ e_1 = e$, з таблицею множення

$$e_1 = e, \qquad e_2^2 = e + i\sqrt{2(p+1)}e_2 \tag{12}$$

задовольняє умову (8) при $p = 1$ в алгебрі (2) (див. [4]), а при $p > 1$ — в алгебрі (3) (див. [16]).

Далі у роботі, якщо немає спеціальних зауважень щодо $p = 1$, розглядаємо лише випадок $p > 1$.

Очевидно, що якщо

$$e_1 = \alpha_1 \mathfrak{I}_1 + \alpha_2 \mathfrak{I}_2, \qquad e_2 = \beta_1 \mathfrak{I}_1 + \beta_2 \mathfrak{I}_2, \qquad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1,2, \tag{13}$$

є базисними елементами алгебри (3), що задовольняють умову (8), то

$$e_1 = \beta_1 \mathfrak{I}_1 + \beta_2 \mathfrak{I}_2, \qquad e_2 = \alpha_1 \mathfrak{I}_1 + \alpha_2 \mathfrak{I}_2$$

теж базисні елементи алгебри (3), що задовольняють умову (8), і має місце нерівність між коефіцієнтами

$$\alpha_1 \beta_2 \neq \alpha_2 \beta_1. \tag{14}$$

Поєднуючи ці два випадки, будемо казати, що формула (13) задає базис (e_1, e_2) алгебри (3), що *задовольняє умову* (8) *з точністю до переставлення*.

Теорема 1. *Алгебра* $\mathbb{B}$ *не містить жодного базису* (e_1, e_2), *що задовольняє умову* (8).

Усі базиси алгебри $\mathbb{B}_0$, *що задовольняють умову* (8) *з точністю до переставлення, подаються у вигляді*

$$e_1 = \alpha_1\, \mathfrak{I}_1 + \alpha_2\, \mathfrak{I}_2, \qquad e_2 = \beta_1\, \mathfrak{I}_1 + \beta_2\, \mathfrak{I}_2,$$

де комплексні числа $\alpha_k \neq 0,\ \beta_k \neq 0,\ k = 1,2,$ *задовольняють одну з двох умов*:

а) $\alpha_k = \widetilde{s}_k\beta_k,\ k = 1, 2,$

б) $\alpha_1 = \widehat{s}_1\beta_1,\ \beta_2 = \widehat{s}_2\alpha_2,$

де $\widetilde{s}_1$ *і* $\widetilde{s}_2$ *— довільні різні елементи з* $\ker l_p(s, 1)$,

$$\big\{(\widehat{s}_1, \widehat{s}_2)\big\} = \big\{(ip_1, ip_2), (ip_2, ip_1), (-ip_1, -ip_2), (-ip_2, -ip_1),$$
$$(ip_k, ip_k), (-ip_k, ip_k), (ip_k, -ip_k), k = 1, 2\big\}. \tag{15}$$

Доведення. З'ясуємо питання про існування шуканих базисів у алгебрі $\mathbb{B}$. У базисі (e, ρ) базисні елементи $e_k,\ k = 1, 2$, мають розклад вигляду

$$e_1 = \alpha_1 e + \beta_1\rho, \qquad e_2 = \alpha_2 e + \beta_2\rho, \quad \alpha_k,\, \beta_k \in \mathbb{C}, \tag{16}$$

а внаслідок лінійної незалежності елементів e_1 і e_2 виконується співвідношення (14).

Із рівностей (16) випливає, що

$$e_k^2 = \alpha_k^2 e + 2\alpha_k\beta_k\rho, \qquad e_k^4 = \alpha_k^4 e + 4\alpha_k^3\beta_k\rho, \quad k = 1, 2,$$

тому справджуються рівності

$$0 = \mathcal{L}_p(e_1, e_2) = l_p(\alpha_1, \alpha_2)e + 4\Big(\alpha_1\beta_1\big(\alpha_1^2 + p\alpha_2^2\big) + \alpha_2\beta_2\big(\alpha_2^2 + p\alpha_1^2\big)\Big)\,\rho,$$

які, у свою чергу, визначають систему рівнянь відносно α_k і $\beta_k,\ k = 1, 2$:

$$\begin{gathered} l_p(\alpha_1, \alpha_2) = 0, \\ \alpha_1\beta_1\big(\alpha_1^2 + p\alpha_2^2\big) + \alpha_2\beta_2\big(\alpha_2^2 + p\alpha_1^2\big) = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

З першого рівняння системи (17) і співвідношення (14) випливає, що

$$\alpha_k \neq 0, \quad k = 1, 2. \tag{18}$$

З першого рівняння системи (17) і співвідношень (18) одержуємо

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = s_0 \qquad \text{або} \qquad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = s_0, \tag{19}$$

де s_0 — довільний елемент з $\ker l_p(s, 1)$.

Нехай $\beta_1 = 0$, тоді $\beta_2 \neq 0$. Згідно з (14), друге рівняння системи (17) рівносильне рівнянню $\alpha_2^2 + p\alpha_1^2 = 0$, яке з урахуванням (18) і (19) рівносильне сукупності двох рівнянь: $a_{p,s_0} :=$ $:= s_0^2 + p = 0$ і $b_{p,s_0} := 1 + ps_0^2 = 0$. Враховуючи (10) і (11), легко встановлюємо, що $a_{p,s_0} \neq 0$ і $b_{p,s_0} \neq 0$. Отже, $\beta_1 \neq 0$, тоді з другого рівняння системи (17) випливає, що $\beta_2 \neq 0$. Згідно з (19), друге рівняння системи (17) рівносильне сукупності двох рівнянь: $\beta_1 b_{p,s_0} + \beta_2 s_0 a_{p,s_0} = 0$ при $\alpha_2 = s_0\alpha_1$ і $\beta_1 s_0 a_{p,s_0} + \beta_2 b_{p,s_0} = 0$ при $\alpha_1 = s_0\alpha_2$. Тоді рівність $\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1$ еквівалентна рівності $l_p(s_0, 1) = 0$, яка має місце внаслідок вибору s_0. Отже, нерівність (14) не має місця, тому в алгебрі $\mathbb{B}$ не існують базиси, які б задовольняли умову (8).

Опишемо всі базиси алгебри $\mathbb{B}_0$, що задовольняють умову (8). У базисі $(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$ базисні елементи e_1 і e_2 мають розклад вигляду (13).

Тоді з (13) і ортогональності ідемпотентів $\mathcal{I}_k,\ k = 1, 2$, одержуємо

$$e_1^{2k} = \alpha_1^{2k}\,\mathcal{I}_1 + \alpha_2^{2k}\,\mathcal{I}_2, \qquad e_2^{2k} = \beta_1^{2k}\,\mathcal{I}_1 + \beta_2^{2k}\,\mathcal{I}_2, \quad k = 1,2.$$

Звідси маємо рівності

$$0 = \mathcal{L}_p(e_1, e_2) = l_p(\alpha_1, \beta_1)\,\mathcal{I}_1 + l_p(\alpha_2, \beta_2)\,\mathcal{I}_2,$$

які визначають систему рівнянь відносно α_k і β_k, $k = 1,2$:

$$\begin{aligned} &l_p(\alpha_k, \beta_k) = 0, \\ &l_p(\alpha_2, \beta_2) = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Аналогічно дослідженню першого рівняння системи (17) з системи (20) одержуємо можливі випадки: $\dfrac{\alpha_k}{\beta_k} = \widetilde{s}_k$, $\dfrac{\alpha_k}{\beta_k} = \dfrac{1}{\widetilde{s}_k}$, $k = 1,2$, де $\widetilde{s}_k$ — довільні елементи з (10) з урахуванням (11). Перевіряючи тепер ці випадки на виконання умови (14), легко встановлюємо випадок а), а для встановлення випадку б) беремо до уваги, що тоді (14) рівносильне нерівності $\widetilde{s}_1\widetilde{s}_2 \neq 1$, тому $\widetilde{s}_k = \widehat{s}_k$, $k = 1,2$.

Теорему доведено.

Оскільки

$$\mathcal{L}_p(e, e_2) = \Big(e - e_2^2 - i\sqrt{2(p+1)}e_2\Big)\Big(e - e_2^2 + i\sqrt{2(p+1)}e_2\Big), \tag{21}$$

то важливо знайти базиси (e_1, e_2), $e_1 = e$, що задовольняють умову (8) і мають таблицю множення (12) або таку:

$$e_1 = e, \qquad e_2^2 = e - i\sqrt{2(p+1)}e_2. \tag{22}$$

Беручи до уваги, що рівняння

$$\beta^2 - \Big(\pm i\sqrt{2(p+1)}\Big)\beta - 1 = 0, \quad \beta \in \mathbb{C},$$

має корені $\{\beta\} = \{\pm i p_1, \pm i p_2\}$ (однойменні знаки відповідають знакам у рівнянні), а також рівність $p_1 p_2 = 1$, встановлюємо, що коефіцієнти базису (13) із таблицею множення (12) мають вигляд

$$\alpha_k \equiv \alpha_k^+ := 1, \quad k = 1,2, \qquad \big\{(\beta_1, \beta_2)\big\} \equiv \big\{(\beta_1^+, \beta_2^+)\big\} := \big\{(ip_1, ip_2), (ip_2, ip_1)\big\}, \tag{23}$$

а коефіцієнти базису (13) із таблицею множення (22) —

$$\alpha_k \equiv \alpha_k^- := 1, \quad k = 1,2, \qquad \big\{(\beta_1, \beta_2)\big\} \equiv \big\{(\beta_1^-, \beta_2^-)\big\} := \big\{(-ip_1, -ip_2), (-ip_2, -ip_1)\big\}. \tag{24}$$

Позначимо через $\mathcal{B}$ множину всіх базисів (e_1, e_2), що задовольняють умову (8), а через $\mathcal{B}_1$ її підмножину, що складається з елементів $(e_1, \widetilde{e}_2)$, $e_1 := e$, $\widetilde{e}_2 := e_2$.

Множину всіх оборотних елементів $\big\{e_1 = a_1\mathcal{I}_1 + a_2\mathcal{I}_2 \in \mathbb{B}_0 \colon a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, k = 1,2\big\}$ позначимо через $\mathcal{E}$. За теоремою 1 і рівністю (6) усі базисні елементи e_k належать $\mathcal{E}$, $k = 1,2$, де $(e_1, e_2) \in \mathcal{B}$.

Під добутком множин $E_k \subset \mathbb{B}_0$, $k = 1,2$, розуміємо множину $E \equiv E_1E_2 := \big\{x_1x_2 \colon x_k \in E_k, k = 1,2\big\}$, що складається з добутків довільного елемента першої множини E_1 на довільний елемент другої множини E_2.

Встановимо зв'язок між множинами базисів $\mathcal{B}$ і $\mathcal{B}_1$.

Лема 1. *Справджується рівність множин* $\mathcal{B} = \mathcal{E}\mathcal{B}_1$.

Доведення. Нехай (e_1, e_2) належить $\mathcal{B}$. Тоді, оскільки e_1 належить $\mathcal{E}$ та мають місце рівності

$$0 = \mathcal{L}_p(e_1, e_2) = e_1^4 \mathcal{L}_p(e, e_1^{-1} e_2),$$

$(e, \widetilde{e}_2)$ належить $\mathcal{B}_1$, $\widetilde{e}_2 := e_1^{-1} e_2$.

Навпаки, нехай $(e, \widetilde{e}_2)$ належить $\mathcal{B}_1$, тоді для будь-якого елемента $e_1 \in \mathcal{E}$ мають місце рівності

$$0 = e_1^4 \mathcal{L}_p(e, \widetilde{e}_2) = \mathcal{L}_p(e_1, e_2), \quad e_2 = e_1 \widetilde{e}_2,$$

тому $(e_1, e_2) = (e_1 e, e_1 \widetilde{e}_2) \in \mathcal{B}$.

Лему доведено.

Лема 1 показує, що для знаходження довільного базису $(e_1, e_2) \in \mathcal{B}$ достатньо довільний елемент $(e, \widetilde{e}_2) \in \mathcal{B}_1$ помножити на довільний елемент $E_1 \in \mathcal{E}$, тобто $e_1 = E_1$, $e_2 = E_1 \widetilde{e}_2$.

Розглянемо підмножини $\mathcal{B}_1^{\pm}$ множини $\mathcal{B}_1 : \mathcal{B}_1^{+}$ складається з усіх базисів (e_1, e_2), $e_1 := e$, $e_2 := \widetilde{e}_2$, які мають таблицю множення (12), а $\mathcal{B}_1^{-}$ — з усіх базисів (e_1, e_2), $e_1 := e$, $e_2 := \widetilde{e}_2$, які мають таблицю множення (22). З огляду на (21), (23) і (24) приходимо до співвідношень

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1^{+} \cup \mathcal{B}_1^{-}, \qquad \mathcal{B}_1^{+} \cap \mathcal{B}_1^{-} = \varnothing. \tag{25}$$

***Зауваження* 1.** Формули (23) і (24) визначають коефіцієнти розкладу (13) для елементів множини $\mathcal{B}_1$, що приводить до повного опису множини $\mathcal{B}_1$.

3. Моногенні функції площини, породженої елементами з $\mathcal{B}_1^{\pm}$. Розглянемо площину $\mu_{\pm} := \{x e_1 + y e_2 : x, y \in \mathbb{R}\}$, де $(e_1, e_2) \in \mathcal{B}_1^{+}$ для μ_{+} або $(e_1, e_2) \in \mathcal{B}_1^{-}$ для μ_{-}. Далі будемо користуватися тими ж позначеннями для подвійних знаків, розуміючи сукупність двох випадків: або верхній знак або нижній.

Розглянемо евклідову норму $\|a\| := \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$, де $a = z_1 e_1 + z_2 e_2 \in \mathbb{B}_0$, $z_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2$.

Нехай D — область декартової площини xOy. Позначимо $D_{\zeta}^{\pm} := \big\{\zeta = x e_1 + y e_2 \in \mu_{\pm} : (x, y) \in D\big\}$, а $\partial D_{\zeta}^{\pm}$ — її межа.

Далі вважатимемо, що $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\zeta = x e_1 + y e_2 \in \mu_{\pm}$.

Зауважимо, що якщо $\zeta \in \mu_{\pm}$, $\zeta \neq 0$, то $\zeta \in \mathcal{E}$, що легко доводиться аналогічно випадку μ_{+} (див. [16]).

Розглядаємо *моногенні* в $D_{\zeta}^{\pm}$ функції, тобто функції $\Phi_{\pm} : D_{\zeta}^{\pm} \longrightarrow \mathbb{B}_0$ вигляду

$$\Phi_{\pm}(\zeta) = (U_1)_{\pm}(x, y)\, e_1 + (U_2)_{\pm}(x, y)\, i e_1 + (U_3)_{\pm}(x, y)\, e_2 + (U_4)_{\pm}(x, y)\, i e_2, \tag{26}$$

що мають класичну похідну $\Phi'_{\pm}(\zeta)$ в кожній точці ζ з $D_{\zeta}^{\pm}$:

$$\Phi'_{\pm}(\zeta) := \lim_{h \to 0,\, h \in \mu^{\pm}} \Big(\Phi(\zeta + h) - \Phi(\zeta)\Big) h^{-1}.$$

Кожну компоненту $(U_k)_{\pm} : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in \{1, \ldots, 4\}$, з (26) позначаємо через $U_k\big[\Phi_{\pm}\big]$, тобто $U_k\big[\Phi_{\pm}(\zeta)\big] := (U_k)_{\pm}(x, y)$, $k \in \{1, \ldots, 4\}$.

Аналогічно випадку $p = 1$ (див. [4, 5]) встановлюємо таку теорему.

Теорема 2. *Функція* $\Phi_\pm\colon D_\zeta^\pm \longrightarrow \mathbb{B}_0$ *є моногенною в області* $D_\zeta^\pm$ *тоді і тільки тоді, коли її компоненти* $(U_k)_\pm\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $k=\overline{1,4}$, *з розкладу* (26) *диференційовні в області* D *та виконується аналог умов Коші – Рімана*

$$\frac{\partial\Phi_\pm(\zeta)}{\partial y}\,e_1=\frac{\partial\Phi_\pm(\zeta)}{\partial x}\,e_2\quad\forall\,\zeta=xe_1+ye_2\in D_\zeta^\pm. \tag{27}$$

Зауваження 2. Покомпонентно, у розширеній формі, рівність (27) є системою чотирьох рівнянь відносно компонент $(U_k)_\pm$, $k=\overline{1,4}$, функції (26):

$$\frac{\partial\,(U_1)_\pm\,(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\,(U_3)_\pm\,(x,y)}{\partial x}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial\,(U_2)_\pm\,(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\,(U_4)_\pm\,(x,y)}{\partial x}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial\,(U_3)_\pm\,(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\,(U_1)_\pm\,(x,y)}{\partial x}-\Big(\pm\sqrt{2(p+1)}\Big)\,\frac{\partial\,(U_4)_\pm\,(x,y)}{\partial x}, \tag{30}$$

$$\frac{\partial\,(U_4)_\pm\,(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\,(U_2)_\pm\,(x,y)}{\partial x}\pm\sqrt{2(p+1)}\,\frac{\partial\,(U_3)_\pm\,(x,y)}{\partial x}. \tag{31}$$

Для змінної $\zeta=xe_1+ye_2\in\mu_\pm$, $(e_1,e_2)\in\mathcal{B}_1^\pm$, введемо до розгляду комплексні змінні $Z_k^\pm\in\mathbb{C}$, $k=1,2$, за допомогою формул

$$Z_k^\pm=x+y\beta_k^\pm,\quad k=1,2, \tag{32}$$

де $\beta_k^\pm$, $k=1,2$, визначаються з рівностей (23), (24), тобто

$$\big\{(\beta_1^+,\beta_2^+)\big\}=\big\{(ip_1,ip_2),(ip_2,ip_1)\big\},\qquad\beta_k^-=-\beta_k^+,\quad k=1,2. \tag{33}$$

З рівностей $e_1\equiv e=\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2$, $e_2=\beta_1^\pm\mathcal{I}_1+\beta_2^\pm\mathcal{I}_2$ та (32) випливає, що змінну ζ можна записати у вигляді $\zeta=Z_1^\pm\mathcal{I}_1+Z_2^\pm\mathcal{I}_2$.

Зауважимо, що при $k=1,2$ мають місце співвідношення $\mathrm{Re}\beta_k^\pm=0$, $\mathrm{Im}\beta_k^\pm\neq0$, $\mathrm{Im}Z_k^\pm=$ $=\mathrm{Im}\beta_k^\pm y\neq0$ при $y\neq0$, $\mathrm{Re}Z_k^\pm=x\neq0$ при $x\neq0$.

Введемо до розгляду такі області комплексної площини:

$$D_{Z_k^\pm}:=\big\{Z_k^\pm=x+\beta_k^\pm y\in\mathbb{C}\colon xe_1+ye_2\in D_\zeta^\pm\big\},\quad k=1,2. \tag{34}$$

Має місце зображення моногенної функції $\Phi_\pm\colon D_\zeta^\pm\longrightarrow\mathbb{B}_0$ через дві голоморфні функції комплексної змінної $Z_1^\pm$ і $Z_2^\pm$ відповідно.

Теорема 3. *Функція* $\Phi_\pm\colon D_\zeta^\pm\longrightarrow\mathbb{B}_0$ *є моногенною в області* $D_\zeta^\pm$ *тоді і тільки тоді, коли має місце рівність*

$$\Phi_\pm(\zeta)=(F_1)_\pm\big(Z_1^\pm\big)\mathcal{I}_1+(F_2)_\pm\big(Z_2^\pm\big)\mathcal{I}_2\quad\forall\zeta\in D_\zeta^\pm, \tag{35}$$

де $(F_k)_\pm$ *— деяка голоморфна функція комплексної змінної* $Z_k^\pm$ *в області* $D_{Z_k^\pm}$ *відповідно при* $k=1,2$.

Теорема 3 доводиться тривіально з використанням теореми 2, рівності (26), формул (23) і (24) для базисів $(e_1, e_2) \in \mathcal{B}_1^{\pm}$ з (13), а також умов Коші – Рімана аналітичності функцій $(F_k)_{\pm}\big(Z_k^{\pm}\big)$ у областях $D_{Z_k^{\pm}}$, $k = 1, 2$, відповідно. За цією ж схемою теорему 2 доведено у роботі [16] для базису $(e_1, e_2) \in \mathcal{B}_1^{+}$ (однак у доведенні є дрібні арифметичні помилки).

Зауважимо, що для алгебри бікомплексних чисел подібну теорему доведено у [46] (пункт 10), причому відповідні функції визначено в усій алгебрі.

У роботах [42, 43] розглядаються функції $\Phi : \Omega_\zeta \longrightarrow \mathbb{A}_n$, де $\mathbb{A}_n$ — скінченновимірна напівпроста комутативна алгебра над полем комплексних чисел розмірності n, $n \geq 2$, базис якої утворено ортогональними ідемпотентами $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$, тобто $\mathcal{I}_k^2 = \mathcal{I}_k$, $\mathcal{I}_k\mathcal{I}_r = 0$, $k, r = 1, 2, \ldots, n$, $k \neq r$, Ω_ζ — область, що належить лінійній оболонці

$$E_m := \left\{ \zeta = \sum_{k=1}^{m} x_k e_k : x_k \in \mathbb{R} \right\}$$

лінійно незалежних над полем дійсних чисел векторів e_1, $e_2, \ldots,$ e_m, $2 \leq m \leq n$, де e_1 — одиниця алгебри $\mathbb{A}_n$. Припускається далі, що Φ є неперервною у Ω_ζ, а також диференційовною за Гато у кожній точці даної області, тобто для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент алгебри $\Phi'(\zeta) \in \mathbb{A}_n$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \big(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)\big)\varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall \zeta \in E_m, \quad \zeta + \varepsilon h \in \Omega_\zeta.$$

Нехай $n = m = 2$, $\mathbb{A}_2 = \mathbb{B}_0$, e_1 і e_2, що породжують E_2, такі, що $(e_1, e_2) \in \mathcal{B}_1^{\pm}$, ідемпотенти $\mathcal{I}_k$, $k = 1, 2$, визначаються рівностями (4).

Тоді на підставі теореми 3 [42] (або теореми 1 [43]) одержуємо таке твердження: *нехай*

$$f_k(E_2) := \big\{ f_k(\zeta) := x_1 + a_{2k}x_2 : x_j \in \mathbb{R}, \, j = 1, 2 \big\} \equiv \mathbb{C}, \quad k = 1, 2, \tag{36}$$

а область Ω_ζ *„опукла за множиною напрямків* M_1, M_2*”, тобто з того, що* ζ_1, $\zeta_2 \in \Omega_\zeta$ *і* $\zeta_1 - \zeta_2 \in M_k := \big\{\zeta \in E_m : f_k(\zeta) = 0\big\}$, $k = 1, 2$, *випливає, що область* Ω_ζ *повністю містить відрізок* $\big\{\zeta_1 + \alpha(\zeta_2 - \zeta_1) : \alpha \in [0, 1]\big\}$, *що з'єднує точки* ζ_1 *і* ζ_2.

Тоді кожна функція $\Phi : \Omega_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$, *яка є неперервною і диференційовною за Гато в області* Ω_ζ, *зображується у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = F_1\big(f_1(\zeta)\big)\mathcal{I}_1 + F_2\big(f_2(\zeta)\big)\mathcal{I}_2,$$

де $F_k : D_k \longrightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2$, — *деяка аналітична в області* $D_k := \big\{f_k(\zeta) : \zeta \in \Omega_\zeta\big\} \subset \mathbb{C}$ *функція комплексної змінної* $x_1 + a_{2k}x_2 = f_k(\zeta)$, $k = 1, 2$.

Оскільки (e_1, e_2) належить $\mathcal{B}_{\pm}$, то $a_{2k} = \beta_k^{\pm}$, $k = 1, 2$, де $\beta_k^{\pm}$, $k = 1, 2$, визначаються з (23) і (24). Перепозначаючи у ζ змінну x_1 на x, а x_2 на y, приходимо до ідентичності у позначеннях $\zeta \in E_2$ і $\zeta \in \mu_{\pm} \equiv E_2$. Тоді $f_k(\zeta) = x + \beta_k^{\pm} y \equiv Z_k^{\pm}$, $D_k \equiv D_{Z_k^{\pm}}$, $k = 1, 2$, $\Omega_\zeta \equiv D_\zeta^{\pm}$. Враховуючи, що $Z_k^{\pm} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y = 0$, одержуємо, що $M_1 = M_2 \equiv \{0\}$, тобто „опуклість за множиною напрямків M_1, M_2” області $\Omega_\zeta \equiv D_\zeta^{\pm}$ вироджується у її відсутність ($\zeta_1 - \zeta_2 = 0$ лише при $\zeta_1 = \zeta_2$). На підставі (23), (24) і (32) одержуємо, що $f_k(E_2) = Z_k^{\pm}$, $k = 1, 2$, „пробігає” всю комплексну площину $\mathbb{C}$, коли ζ „пробігає” $E_2 = \mu_{\pm}$ (x і y „пробігають” множину дійсних чисел).

Нарешті, враховуючи, що з моногенності функції $\Phi := \Phi_\pm$ в області $D_\zeta^\pm$ випливає, що Φ є диференційовною за Гато і неперервною у даній області, переконуємося, що теорема 3 є наслідком зазначених результатів робіт [42, 43].

Використовуючи перші дві рівності з (4) та замінюючи без втрати загальності $(F_k)_\pm$ на $2(F_k)_\pm,\ k=1,2,$ у (35), отримуємо зображення у базисі (e,ω):

$$\Phi_\pm(\zeta) = \big((F_1)_\pm(Z_1^\pm) + (F_2)_\pm(Z_2^\pm)\big)\, e + \big((Z_2^\pm)(F_1)_\pm(Z_1^\pm) - (F_2)_\pm(Z_2^\pm)\big)\,\omega \quad \forall \zeta \in D_\zeta^\pm. \tag{37}$$

Для одержання розкладу вигляду (35) у базисі $(e_1,e_2) \in \mathcal{B}_1^\pm$ потрібно в (35) підставити рівності

$$\mathcal{I}_1 = \frac{\beta_2^\pm}{\beta_2^\pm - \beta_1^\pm}\, e_1 - \frac{1}{\beta_2^\pm - \beta_1^\pm}\, e_2, \qquad \mathcal{I}_2 = -\frac{\beta_1^\pm}{\beta_2^\pm - \beta_1^\pm}\, e_1 + \frac{1}{\beta_2^\pm - \beta_1^\pm}\, e_2. \tag{38}$$

Наведемо важливі наслідки з теореми 2.

***Наслідок* 1.** *Нехай область $\partial D_\zeta^\pm$ така, що межі $\partial D_{Z_k}^\pm$ областей* (34), $k=1,2,$ *є жордановими спрямлюваними кривими комплексної площини. Якщо функція $\Phi_\pm \colon D_\zeta^\pm \longrightarrow \mathbb{B}_0$ є моногенною в області $D_\zeta^\pm$ і неперервною у її замиканні $D_\zeta^\pm \cup \partial D_\zeta^\pm$, то мають місце рівності*

$$\Phi_\pm(\zeta) = \sum_{k=1}^{2} \mathcal{I}_k \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_{Z_k^\pm}} \frac{(F_k)_\pm(T_k^\pm)}{(T_k^\pm - Z_k^\pm)}\, dT_k^\pm \quad \forall \zeta \in D_\zeta^\pm, \qquad \int\limits_{\partial D_\zeta^\pm} \Phi_\pm(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{39}$$

***Наслідок* 2.** *Кожна моногенна функція $\Phi_\pm \colon D_\zeta^\pm \longrightarrow \mathbb{B}_0$ має похідні ${\Phi_\pm}^{(k)}$ довільного порядку $k = 1,2,\ldots$.*

4. Ізоморфізм функціональних алгебр у площинах, породжених різними елементами з $\mathfrak{B}$. Розглянемо площину $\mu_* := \{\zeta = xe_1 + ye_2 \colon x,y \in \mathbb{R}\}$, де $(e_1,e_2) \in \mathcal{B}$. Аналогічно випадкам, коли $D_\zeta^\pm \subset \mu_\pm$, можна будувати моногенні функції Φ в області $D_\zeta \subset \mu_*$, для яких критерій моногенності повністю аналогічний теоремі 2 (з заміною однойменних базисних елементів). На підставі леми 1 мають місце рівності $e_1 = E_1,\ e_2 = E_1\widetilde{e}_2$, де $E_1 \in \mathcal{E},\ (e,\widetilde{e}_2) \in \mathcal{B}_1$. Тоді функцію Φ можна єдиним чином записати у вигляді

$$\Phi(\zeta) = \widehat{\Phi}(\zeta_1)E_1, \qquad \zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta, \quad \zeta_1 = xe + y\widetilde{e}_2,$$

де $\widehat{\Phi}(\zeta_1)$ — функція змінної ζ_1 в області $D_{\zeta_1} := \big\{xe + y\widetilde{e}_2 \colon xe_1 + ye_2 \in D_\zeta\big\}$.

Очевидно, що функція Φ моногенна в D_ζ тоді і тільки тоді, коли функція $\widehat{\Phi}$ моногенна в D_{ζ_1}.

Встановимо як пов'язані моногенні функції в площинах μ_+ і μ_- відповідно.

З рівностей (13), (23), (24) випливає, що

$$\mathcal{B}_1^\pm = \big\{(e,\pm e_2) \colon (e,\mp e_2) \in \mathcal{B}_1^\mp\big\}.$$

Звідси одержуємо, що (e,e_2) належить $\mathcal{B}_1^+$ тоді і тільки тоді, коли $(e,-e_2)$ належить $\mathcal{B}_1^-$. Нехай $\mu_\pm$ — площина, породжена базисом $(e,\pm e_2) \in \mathcal{B}_1^\pm$.

Розглянемо при $(e,e_2) \in \mathcal{B}_1^+$ області

$$D_\zeta^+ \in \mu_+, \qquad D_\zeta^- := \Big\{xe - y(-e_2) \in \mu_- \colon xe + ye_2 \in D_\zeta^+\Big\}$$

та функції: $\Phi_\pm : D_\zeta^\pm \longrightarrow \mathbb{B}_0$. Очевидно, що кожна функція Φ_-, моногенна в D_ζ^-, породжує моногенну функцію Φ_+ в D_ζ^+ (та навпаки) за формулою

$$\Phi_-\big(xe - y(-e_2)\big) = \Phi_+(xe + ye_2) \quad \forall \big(xe \pm y(\pm e_2)\big) \in D_\zeta^\pm,$$

яка і встановлює необхідний ізоморфізм функціональних алгебр.

***Зауваження* 3.** Отже, показано, що вивчення моногенних функцій в областях з μ_* еквівалентне вивченню моногенних функцій в областях з μ_+ або μ_-. У свою чергу, дослідження моногенних функцій в областях з μ_+ і μ_- відповідно є рівноправним.

5. Моногенні функції зі значеннями у двовимірній комутативній алгебрі (2) або (3) та аналітичні функції за Дуглісом. Під $\mathbb{B}_*$ розуміємо одну з алгебр (2), (3). Нехай (e_1, e_2) — базис алгебри $\mathbb{B}_*$, що задовольняє умову (8) з $p > 1$ при $\mathbb{B}_* = \mathbb{B}_0$ або з $p = 1$ при $\mathbb{B}_* = \mathbb{B}$. Позначимо $\mu_{e_1,e_2} := \{\zeta = xe_1 + ye_2 : x, y \in \mathbb{R}\}$, де $(e_1, e_2) \in \mathcal{B}_1^+$ при $\mathbb{B}_* = \mathbb{B}_0$ ($\mu_{e_1,e_2} \equiv \mu_+$), а при $\mathbb{B}_* = \mathbb{B}$ вважаємо, що базис (e_1, e_2) має таблицю множення (12).

Нехай D_ζ — область площини μ_{e_1,e_2}, $D_z := \{z = x + iy : \zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta\} \subset \subset \mathbb{C}$. Розглянемо моногенні функції $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_*$. Тоді при $\mathbb{B}_* = \mathbb{B}_0$ маємо зображення (35) моногенної функції $\Phi = \Phi_+$ у ідемпотентному базисі $(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$, а при $\mathbb{B}_* = \mathbb{B}$ — зображення моногенної функції Φ (будується аналогічно випадку $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$) у базисі $(\widetilde{\omega}, e_1)$, $\widetilde{\omega} := e_2 - ie_1$, через відповідні аналітичні функції $\psi_k : D_z \longrightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2$, комплексної змінної $z = x + iy$ у вигляді

$$\Phi(\zeta) = \big(\psi_1(z) + y\,\psi_2'(z)\big)\widetilde{\omega} + \psi_2(z)e_1 \quad \forall\, \zeta \in D_\zeta. \tag{40}$$

Формула (40) випливає також з аналогічної формули робіт [5 – 7] при $\psi_2 := F$ і $\psi_1 := 2iF_0$. Зазначимо, що у випадку, коли область D_ζ є опуклою у напрямку осі Oy, зображення (40) встановлено у роботі [8].

Отже, моногенні функції зі значеннями у $\mathbb{B}_*$ зображуються через дві функції $\psi_k(x + \nu_k y)$, $k = 1, 2$, аналітичні в областях вигляду (34) (де слід покласти знак „плюс”) відповідно, при цьому $\beta_k^+ := i$, $k = 1, 2$, при $\mathbb{B}_* = \mathbb{B}$ і $F_k^+ := \psi_k$ в (35), $k = 1, 2$, при $\mathbb{B}_* = \mathbb{B}_0$. У зазначених вище позначеннях комплекснозначні компоненти Φ_k, $k = 1, 2$, розкладу моногенної функції у відповідному базисі мають вигляд $\Phi_k = \psi_k$, $k = 1, 2$, при $\mathbb{B}_* = \mathbb{B}_0$ і $\Phi_2 = \psi_2$, $\Phi_1 = \psi_1 + y\psi_2'$ $\left(\psi_2' := \dfrac{d\psi_2}{dz}\right)$ при $\mathbb{B}_* = \mathbb{B}$. Тоді за умови, що дійсна та уявна частини компонент $\Phi_k = \Phi_k(x, y)$, $k = 1, 2$, є диференційовними функціями в області $D = \big\{(x, y) : \zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta\big\}$ декартової площини xOy, аналог умов Коші – Рімана (критерій моногенності)

$$\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial y}\, e_1 = \frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial x}\, e_2 \quad \forall\zeta \in D_\zeta, \tag{41}$$

можна записати у вигляді

$$\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial y} = J_{\mathbb{B}_*}\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial x} \quad \forall\zeta \in D_\zeta, \tag{42}$$

де $\Phi(\zeta)$ — вектор-стовпець $\Phi(\zeta) = (\Phi_1(\zeta), \Phi_2(\zeta))$, а $J = J_{\mathbb{B}_*}$ — (2×2)-комплексна матриця, що визначається таким чином:

$$J_{\mathbb{B}_0} = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \qquad J_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad \nu_k := \beta_k^+, \quad k = 1, 2. \tag{43}$$

Матриці (43) є невиродженими і мають власні значення, що належать верхній півплощині $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

У роботах [23, 47] доведено, що вектор-функції Φ, що задовольняють рівняння (42) і є неперервно диференційовними (у сенсі диференційовності дійсної та уявної частин компонент $\Phi_k,\ k = 1, 2$), мають дану властивість для $\Phi := \dfrac{\partial^n \Phi}{\partial x^n} \equiv \left(\dfrac{\partial^n \Phi_1}{\partial x^n}, \dfrac{\partial^n \Phi_2}{\partial x^n}\right)$, тобто $\dfrac{\partial^n \Phi}{\partial x^n}$ задовольняє рівняння (42), а Φ є n разів неперервно диференційовною для кожного натурального n. Крім того, доведено, що неперервно диференційовна вектор-функція Φ задовольняє рівняння (42) тоді і тільки тоді, коли існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta z \to 0} [\Delta z]^{-1} \big(\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)\big) =: \Phi'(\zeta) \quad \forall \zeta = x e_1 + y e_2 \in D_\zeta, \tag{44}$$

де $[z] \equiv [xI + yJ] = xI + yJ =: z_J$ $(z = x + iy \in \mathbb{C})$, $I = \operatorname{diag}(1, 1)$ — одинична (2×2)-матриця, $[w]^{-1}$ — обернена матриця до матриці $[w] = w_J$.

За умови існування границі (44) справджуються рівності $\Phi^{(n)} = \dfrac{\partial^n \Phi}{\partial x^n},\ n = 1, 2, \ldots$.

Як відомо, неперервно диференційовні розв'язки $\Phi(\zeta)$ називаються функціями, *аналітичними у сенсі Дугліса*, або *J-аналітичними* (див., наприклад, [3, 48 – 50]). Покладаючи у (43) $\nu_1 = \nu_2 = i$ для $J = J_{\mathbb{B}_0}$, одержуємо, що J-аналітичність вектор-функції Φ еквівалентна класичній аналітичності її функцій-компонент $\Phi_k(z) = \Phi_k(\zeta),\ k = 1, 2$, відносно комплексної змінної z.

Уперше неперервно диференційовні розв'язки $\Phi(\zeta)$ для задачі вигляду (42), де J — $(n \times n)$-комплексна, оборотна і ганкелева матриця (означення див., наприклад, у [51, с. 42]), досліджувались у роботі А. Дугліса [52], а вектор-функція Φ набувала значень у певній $2n$-вимірній алгебрі над полем дійсних чисел.

Зауважимо, що без втрати гладкості можна вважати вектор-функції $\Phi = \Phi(x, y)$ лише диференційовними, як це і має місце для підходу моногенних функцій.

Кожна з пари матриць у (43) є елементом прямого добутку двох неперетинних класів матриць, аналітичні за Дуглісом функції для яких застосовуються, наприклад, у роботах [23 – 25] для рівнянь та крайових задач плоскої ортотропії, зокрема для опису розв'язків системи рівнянь рівноваги Ляме. У роботі [26] аналогічний підхід реалізовано для деяких випадків пружної симетрії для просторової анізотропії.

Вищезазначені міркування щодо зображення моногенної функції через аналітичні функції $\psi_k,\ k = 1, 2$, разом з рівністю (42) або (44) показують, що моногенні функції $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_*$ та J-аналітичні (з $J = J_{\mathbb{B}_*}$) за Дуглісом вектор-функції

$$\Phi(z) \equiv \Phi(\zeta) := \big(\Phi_1(x + \nu_1 y), \Phi_2(x + \nu_2 y)\big),$$

де $\zeta = x e_1 + y e_2 \in D_\zeta$, $z = x + iy \in D_z$, $\nu_1 = \nu_2 := i$ при $B_* := \mathbb{B}$, є еквівалентними поняттями (якщо виходити з зазначеного послаблення умови неперервності компонент $\Phi_k,\ k = 1, 2$, лише на диференційовність у D).

Основною перевагою підходу моногенних функцій зі значеннями у комутативних банахових алгебрах над підходом аналітичності у сенсі Дугліса є те, що перший не вимагає використання матричного числення, а будується аналогічно класичній теорії функцій однієї комплексної змінної.

6. Моногенні функції площини, породженої елементами з $\mathcal{B}_1^{\pm}$, та одне узагальнене бігармонічне рівняння. З наслідку 2 випливає, що кожна компонента $(U_k)_{\pm}$, $k = \overline{1,4}$, моногенної функції (26) задовольняє в D рівняння (1). Дійсно, це є наслідком таких рівностей при кожному

$$\zeta \in D_{\zeta}^{\pm} : \widetilde{l}_p \Phi_{\pm}(\zeta) = \mathcal{L}_p(e_1, e_2)\Phi_{\pm}^{(4)}(\zeta) \equiv 0.$$

Рівняння (1) одержується, наприклад, за допомогою підстановки у рівняння сумісності деформацій Сен-Венана (див., наприклад, [32, с. 213]) рівнянь узагальненого закону Гука (див. [29, с. 32]) вигляду

$$\varepsilon_x = \sigma_x + a_{12}\sigma_y, \qquad \varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + \sigma_y, \qquad \gamma_{xy} = 2(p - a_{12})\tau_{xy}, \tag{45}$$

де

$$-1 < a_{12} < 1 \tag{46}$$

$\Bigl(\varepsilon_x,\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2},\ \varepsilon_y$ і $\sigma_x,\ \tau_{xy},\ \sigma_y$ є компонентами тензора деформацій [29, с. 16] і напружень [29, с. 15] відповідно$\Bigr)$, а далі із застосуванням підстановки залежностей напружень через функцію напружень $u(x,y)\colon \sigma_x = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (див., наприклад, [32, с. 664]). Зауважимо, що нерівність (46) є наслідком симетричності і додатної визначеності матриці коефіцієнтів в узагальненому законі Гука (див., наприклад, [53, с. 27, 68], [54] (§ 2.3), [26]) та нерівності $p > 1$.

Запишемо узагальнений закон Гука (45) у еквівалентній формі

$$\sigma_x = \frac{1}{1 - a_{12}^2}(\varepsilon_x - a_{12}\varepsilon_y), \qquad \sigma_y = \frac{1}{1 - a_{12}^2}(-a_{12}\varepsilon_x + \varepsilon_y), \qquad \tau_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2(p - a_{12})}. \tag{47}$$

Рівняння (1) та узагальнений закон Гука (47) відповідають плоскому випадку анізотропії, який називається *ортотропним* (див. [29, с. 33, 34]), причому його частинному випадку.

Зазначимо, що коефіцієнти у правих частинах рівностей (47) при деформаціях називаються *модулями пружності* (див., наприклад, [29, с. 25]).

Література

1. *Sobrero L.* Nuovo metodo per lo studio dei problemi di elasticità, con applicazione al problema della piastra forata // Ric. Ingegn. – 1934. – **13**, № 2. – P. 255 – 264.
2. *Edenhofer J. A.* Solution of the biharmonic Dirichlet problem by means of hypercomplex analytic functions // Funct. Theor. Methods Partial Different. Equat. (Proc. Int. Symp. Held at Darmstand, Germany, 12 – 15 April, 1976): Ser. Lect. Notes Math. –1976. – **561**. – P. 192 – 202.
3. *Gilbert R. P., Wendland W. L.* Analytic, generalized, hyperanalytic function theory and an application to elasticity // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. – 1975. – **73**. – P. 317 – 331.
4. *Ковалев В. Ф., Мельниченко И. П.* Бигармонические функции на бигармонической плоскости // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 8. – С. 25 – 27.
5. *Грищук С. В., Плакса С. А.* Моногенные функции в бигармонической алгебре // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 12. – С. 1587 – 1596.
6. *Грищук С. В., Плакса С. А.* Моногенные функции в бигармонической плоскости // Доп. НАН України. – 2009. – № 12. – С. 13 – 20.
7. *Gryshchuk S. V., Plaksa S. A.* Reduction of a Schwartz-type boundary value problem for biharmonic monogenic functions to Fredholm integral equations // Open Math. – 2017. – **15**, № 1. – P. 374 – 381.

8. *Ковалев В. Ф.* Бигармоническая задача Шварца. – Киев, 1986. – 19 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.16).
9. *Gryshchuk S. V., Plaksa S. A.* Schwartz-type integrals in a biharmonic plane // Int. J. Pure and Appl. Math. – 2013. – **83**, № 1. – P. 193 – 211.
10. *Gryshchuk S. V., Plaksa S. A.* Monogenic functions in the biharmonic boundary value problem // Math. Meth. Appl. Sci. – 2016. – **39**, № 11. – P. 2939 – 2952.
11. *Gryshchuk S. V.* $\mathbb{B}$-valued monogenic functions and their applications to boundary value problems in displacements of 2-D elasticity // ArXiv preprint. – 2016. – 12 p.
12. *Ковалев В. Ф., Мельниченко И. П.* Бигармонические потенциалы и плоские изотропные поля смещений // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 2. – С. 229 – 231.
13. *Грищук С. В.* Гіперкомплексні моногенні функції бігармонічної змінної в деяких задачах плоскої теорії пружності // Доп. НАН України. – 2015. – № 6. – С. 7 – 12.
14. *Грищук С. В.* Одновимірність ядра системи інтегральних рівнянь Фредгольма для однорідної бігармонічної задачі // Аналіз та застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – **14**, № 1. – С. 128 – 139.
15. *Бон Ц. С.* Задача Неймана для бигармонического уравнения // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 1. – P. 169 – 172.
16. *Ковалев В. Ф., Мельниченко И. П.* Алгебры функционально-инвариантных решений p-бигармонического уравнения. – Киев, 1991. – 15 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 91.10).
17. *Weisz-Patrault D., Bock S., Gürlebeck K.* Three-dimensional elasticity based on quaternion-valued potentials // Int. J. Solids and Structures. – 2014. – **51**, № 19. – P. 3422 – 3430.
18. *Bock S., Gürlebeck K., Legatiuk D., Nguyen H. M.* ψ-Hyperholomorphic functions and a Kolosov – Muskhelishvili formula // Math. Meth. Appl. Sci. – 2015. – **38**, № 18. – P. 5114 – 5123.
19. *Grigor'ev Yu. M.* Regular quaternionic polynomials and their properties // Complex Var. and Elliptic Equat. – 2017. – **62**, № 9. – P. 1343 – 1363.
20. *Цалик А. М.* Кватернионные функции, их свойства и некоторые приложения к задачам механики сплошных сред // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 12. – С. 21 – 24.
21. *Tsalik A.* Quaternionic representations of the 3D elastic and thermoelastic boundary problems // Math. Meth. Appl. Sci. – 1995. – **18**. – P. 687 – 708.
22. *Gülebeck K., Habetha K., Sprössig W.* Application of holomorphic functions in two and higher dimensions. – Basel: Birkhäuser, 2016. – 402 p.
23. *Солдатов А. П.* Гипераналитические функции и их приложения // Совр. математика и ее приложения. Теория функций. – Тбилиси: Ин-т кибернетики АН Грузии, 2004. – **15**. – С. 142 – 199.
24. *Солдатов А. П.* К теории анизотропной плоской упругости // Совр. математика. Фундам. направления. – М.: Рос. ун-т дружбы народов, 2016. – **60**. – С. 114 – 163.
25. *Абаполова Е. А., Солдатов А. П.* Система Ламе теории упругости в плоской ортотропной среде // Совр. математика и ее приложения. – Тбилиси: Ин-т кибернетики АН Грузии, 2008. – **53**, ч. 1. – С. 3 – 9.
26. *Митин С. П.* О представлении решений анизотропной теории упругости // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**, № 1. – С. 94 – 100.
27. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
28. *Фридман М. М.* Математическая теория упругости анизотропных сред // Прикл. математика и механика. – 1950. – **14**, № 3. – С. 321 – 340.
29. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
30. *Шерман Д. И.* Плоская задача теории упругости для анизотропной среды // Тр. Сейсм. ин-та АН СССР. – 1938. – № 86. – С. 51 – 78.
31. *Боган Ю. А.* Регулярные интегральные уравнения для второй краевой задачи в анизотропной двумерной теории упругости // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 4. – С. 17 – 26.
32. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
33. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. – М.: Физматгиз, 1963. – 472 с.
34. *Study E.* Über systeme complexer zahlen und ihre anwendungen in der theorie der transformationsgruppen // Monatsh. Math. – 1890. – **1**, № 1. – S. 283 – 354.
35. *Чеботарев Н. Г.* Введение в теорию алгебр. – 3-е изд. // Физико-математическое наследие: математика (алгебра). – М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – 88 с.

36. *Hestenes D., Reany P. Sobczyk G.* Unipodal algebra and roots of polynomials // Adv. Appl. Clifford Algebras. – 1991. – **1**, № 1. – P. 31 – 51.
37. *Baylis W. E.* (*Ed.*) Clifford (geometric) algebras: with applications to physics, mathematics, and engineering. – Boston ect.: Birkhäuser, 1996. – 521 p.
38. *Segre G., Khrennikov A.* An introduction to hyperbolic analysis // arXiv preprint. – 2005. – 42 p.
39. *Motter A. E., Rosa M. A. F.* Hyperbolic calculus // Adv. Appl. Clifford Algebras. – 1998. – **8**, № 1. – P. 109 – 128.
40. *Kisil V. V.* Induced representations and hypercomplex numbers // Adv. Appl. Clifford Algebras. – 2013. – **23**, № 2. – P. 417 – 440.
41. *Ulrych S.* Relativistic quantum physics with hyperbolic numbers // Phys. Lett. B. – 2005. – **625**, № 3. – P. 313 – 323.
42. *Плакса С. А., Пухтаєвич Р. П.* Конструктивний опис моногенних функцій в скінченновимірній напівпростій комутативній алгебрі // Доп. НАН України. – 2014. – № 1. – С. 14 – 21.
43. *Plaksa S. A., Pukhtaievych R. P.* Monogenic functions in a finite-dimensional semi-simple commutative algebra // An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa. – 2014. – **22**, № 1. – P. 221 – 235.
44. *Грищук С. В., Плакса С. А.* О логарифмичном вычете моногенных функций бигармонической переменной // Комплексний аналіз і течії з вільними границями: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 2. – С. 227 – 234.
45. *Мельниченко И. П.* Бигармонические базисы в алгебрах второго ранга // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 2. – С. 252 – 254.
46. *Riley J. D.* Contributions to the theory of functions of a bicomplex variable // Tohoku Math. J. – 1953. – **5**, № 2. – P. 132 – 165.
47. *Николаев В. Г.* Исследование граничных свойств функций, аналитических по Дуглису: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Великий Новгород, 2015. – 105 с.
48. *Gilbert R. P., Hile G. N.* Generalized hypercomplex function theory // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – **195**. – P. 1 – 29.
49. *Hile G. N.* Function theory for a class of elliptic systems in the plane // J. Different. Equat. – 1979. – **32**, № 3. – P. 369 – 387.
50. *Yeh R. Z.* Hyperholomorphic functions and higher order partial differential equations in the plane // Pacif. J. Math. – 1990. – **142**, № 2. – P. 379 – 399.
51. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
52. *Douglis A.* A function-theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables // Communs Pure and Appl. Math. – 1953. – **6**, № 2. – P. 259 – 289.
53. *Бехтерев П. В.* Аналитическое исследование обобщенного закона Гука: В 2 ч. – Л.: Изд. автора, отпечатано в типографии Морск. ведомства, 1925. – Ч. 1: Применение учения о потенциальной энергии и начала наименьшей работы. – 155 с. (переиздание: М.: Рипол Классик, 2013. – 160 с.)
54. *Хан Х.* Теория упругости. Основы линейной теории и ее применения: Пер. с нем. Е. А. Когана. – М.: Мир, 1988. – 344 с.

Одержано 04.10.17