УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Ун-т им. А. Нобеля, Днепр)

ОБОБЩЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГЛАДКОСТИ И НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2(\mathbb{R})$. I

We consider the generalized characteristics of smoothness of the functions $\omega^w(f,t)$ and $\Lambda^w(f,t),\ t>0,$ in the space $L_2(\mathbb{R})$ and, on the classes $L_2^\alpha(\mathbb{R})$ defined with the help of fractional-order derivatives $\alpha\in(0,\infty)$, obtain the exact Jackson-type inequalities for $\omega^w(f)$.

Розглянуто узагальнені характеристики гладкості функцій $\omega^w(f,t)$ і $\Lambda^w(f,t),\ t>0,$ у просторі $L_2(\mathbb{R})$ і на класах $L_2^\alpha(\mathbb{R})$, визначених за допомогою похідних дробового порядку $\alpha\in(0,\infty)$, знайдено точні нерівності типу Джексона для $\omega^w(f)$.

1. Введение. В работе С. Н. Бернштейна [1] было заложено начало исследованиям, связанным с аппроксимацией функций, заданных на всей вещественной оси. При этом средством приближения послужило пространство целых функций конечного экспоненциального типа. В последующем различные аспекты данной тематики рассматривались в работах Н. И. Ахиезера, А. Ф. Тимана, М. Ф. Тимана, С. Н. Никольского, И. И. Ибрагимова, Ф. Г. Насибова, В. Ю. Попова, В. Г. Пономаренко, Г. Гаймназарова, А. И. Степанца, А. А. Лигуна, В. Г. Доронина, В. В. Арестова, А. Г. Бабенко, С. Н. Васильева, С. Б. Вакарчука, М. Ш. Шабозова, С. Я. Янченко, С. Ю. Артамонова и других (см., например, [2–32]).

Целью данной статьи является продолжение исследований, связанных с решением в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций, базирующееся на использовании обобщенных характеристик гладкости и на обобщении понятия производной. В случае 2π-периодических функций в определенном смысле подобный круг экстремальных задач в пространстве $L_2([0,2\pi])$ был рассмотрен автором в статьях [33–35]. При этом заметим, что краткий обзор окончательных в том или ином смысле результатов, связанных с наилучшим полиномиальным приближением 2π-периодических функций в пространстве $L_2([0,2\pi])$, получил свое распространение на случай наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального типа в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ и приведен в [21].

Сформулируем далее необходимые понятия и определения. Под $L_2(\mathbb{R})$ понимаем пространство всех измеримых функций f, заданных на всей вещественной оси $\mathbb{R}$, квадрат модуля которых интегрируем по Лебегу на любом конечном промежутке, а норма определяется формулой $\|f\| := \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2 dx\right\}^{1/2} < \infty$. Приведем далее характеристики гладкости функций, при использовании которых удалось получить окончательные решения ряда экстремальных задач теории аппроксимации в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

1.1. Для $\beta\in(0,\infty)$ запишем биномиальные коэффициенты

$$\binom{\beta}{0} := 1, \qquad \binom{\beta}{1} := \beta, \qquad \binom{\beta}{j} := \frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-j+1)}{j!}, \tag{1.1}$$

где $j\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$. В случае $\beta=m,\ m\in\mathbb{N}$, для (1.1) полагают

$$\binom{m}{j} := \left\{ \frac{m!}{j!(m-j)!}, \text{ если } \ j=0,\ldots,m; \ \ 0, \ \text{ если } \ j=m+1,m+2,\ldots \right\}. \tag{1.2}$$

Поскольку $\sum_{j=0}^{\infty}\left|\binom{\beta}{j}\right| < \infty$, то разность дробного порядка β функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ с шагом $h \in \mathbb{R}$, т. е.

$$\Delta_h^{\beta}(f,x) := \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\beta}{j}f(x-jh), \tag{1.3}$$

определена почти всюду на $\mathbb{R}$ и принадлежит $L_2(\mathbb{R})$. Разность (1.3) называют левосторонней при $h>0$ и правосторонней при $h<0$. Модулем непрерывности функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ дробного порядка $\beta \in (0,\infty)$ называют величину

$$\omega_{\beta}(f,t) := \sup\left\{\left\|\Delta_h^{\beta}(f)\right\| : |h| \le t\right\}, \quad t \ge 0. \tag{1.4}$$

При $\beta = m$, $m \in \mathbb{N}$, из (1.1)–(1.4) имеем обычный модуль непрерывности m-го порядка $\omega_m(f)$. В случае аппроксимации целыми функциями экспоненциального типа в $L_2(\mathbb{R})$ характеристика гладкости $\omega_m(f), m \in \mathbb{N}$, использовалась в работах [6–8, 15, 16, 21, 26, 27], а характеристика гладкости (1.4) — в работе [32] (в более общем случае пространства $L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, модуль непрерывности дробного порядка рассматривался в [10, 11]).

1.2. В работах [18, 19, 21–24] при решении экстремальных задач в $L_2(\mathbb{R})$ применялась следующая характеристика гладкости:

$$\Omega_m(f,t) := \left\{\frac{1}{t^m}\int_0^t \ldots \int_0^t \left\|\Delta_{\overline{h}}^m(f)\right\|^2 dh_1\ldots dh_m\right\}^{1/2}, \quad t>0, \tag{1.5}$$

где

$$\overline{h} := (h_1,\ldots,h_m), \qquad \Delta_{\overline{h}}^m := \Delta_{h_1}^1 \circ \ldots \circ \Delta_{h_m}^1, \qquad \Delta_{h_j}^1(f,x) := f(x+h_j) - f(x), \quad j = \overline{1,m}.$$

1.3. Для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ запишем функцию Стеклова $S_h(f,x) := (1/(2h))\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt, h>0$, и обозначим $S_{h,j}(f) := S_h(S_{h,j-1}(f))$, $j \in \mathbb{N}$, и $S_{h,0}(f) \equiv f$. Полагая, что $\mathbb{I}$ — единичный оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, определим специальные конечные разности первого и высшего порядков в точке x с шагом h:

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f,x) := S_h(f,x) - f(x) = (S_h - \mathbb{I})(f,x),$$

$$\widetilde{\Delta}_h^m(f,x) := \widetilde{\Delta}_h^1\big(\widetilde{\Delta}_h^{m-1}(f),x\big) = (S_h-\mathbb{I})^m(f,x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}S_{h,j}(f,x), \quad m = 2,3,\ldots.$$

Использовав указанные обозначения, запишем специальный модуль непрерывности m-го, $m \in \mathbb{N}$, порядка

$$\widetilde{\Omega}_m(f,t) := \sup\left\{\left\|\widetilde{\Delta}_h^m(f)\right\| : 0 < h \le t\right\}, \quad t>0. \tag{1.6}$$

Характеристика гладкости (1.6) была использована, например, в работе [25].

1.4. Для решения некоторых экстремальных задач в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ в работе [30] применялась характеристика гладкости

$$\Lambda_m(f,t) := \left\{ \frac{1}{t} \int\limits_0^t \left\| \Delta_h^m(f) \right\|^2 dh \right\}^{1/2}, \quad t > 0, \tag{1.7}$$

где $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим ее более подробно, основываясь на исследованиях З. Дитциана и В. Тотика [36, с. 26].

Возьмем интервал $D = (a,b)$, концы которого могут принимать не только конечные, но и бесконечные значения, например $-\infty$ и $+\infty$ соответственно. Для функции $f \in L_p(D)$, $1 \le p < \infty$, в [36] рассматривалась характеристика гладкости

$$\overline{\omega}_\varphi^{*m}(f,t)_p := \left\{ \frac{1}{t} \int\limits_0^t \int\limits_D \left| \overline{\Delta}_{h\varphi(x)}^m f(x) \right|^p dx\, dh \right\}^{1/p}, \quad t > 0. \tag{1.8}$$

Функция φ, определенная на интервале D, является положительной и удовлетворяет нескольким требованиям, изложенным в пп. 1.2 [36]. Под $\overline{\Delta}_{h\varphi(x)}^m f(x)$ понимается прямая или обратная конечная разность m-го порядка функции f, которая существует почти всюду на D. При этом $\overline{\Delta}_{h\varphi(x)}^m f(x) := \overrightarrow{\Delta}_{h\varphi(x)}^m f(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} f\big(x + (m-j)h\varphi(x)\big)$ или $\overline{\Delta}_{h\varphi(x)}^m f(x) :=$ $:= \overleftarrow{\Delta}_{h\varphi(x)}^m f(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} f(x - jh\varphi(x))$. Полагают, что $\overrightarrow{\Delta}_{h\varphi(x)}^m f(x) = 0$ или $\overleftarrow{\Delta}_{h\varphi(x)}^m f(x) = 0$, если отрезок $\big[x, x + mh\varphi(x)\big]$ или отрезок $\big[x - mh\varphi(x), x\big]$ соответственно не принадлежит D.

Если в формуле (1.8), например, $D = (-\infty,\infty)$; $\varphi = \widetilde{\varphi}$, где $\widetilde{\varphi}(x) \equiv 1$, $p = 2$, $\overline{\Delta}_{h\widetilde{\varphi}(x)}^m f(x) :=$ $:= \overrightarrow{\Delta}_{h\widetilde{\varphi}(x)}^m f(x) = \Delta_h^m(f,x)$, то, используя формулы (1.7) и (1.8), получаем $\Lambda_m(f,t) =$ $= \overline{\omega}_{\widetilde{\varphi}}^{*m}(f,t)_2$, $t > 0$, $f \in L_2(\mathbb{R})$, т. е. (1.7) является вполне естественной характеристикой гладкости в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

1.5. С. Ю. Артамоновым в [31] был предложен модуль непрерывности $\omega_{\langle\prime\rangle}(f)$, где $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$. Использовав обозначения, принятые в [31], дадим его определение в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, а именно, с помощью операторов $\overline{\Delta}_h := \overline{T}_h - \mathbb{I}$ и $\overline{T}_h(f,x) :=$ $:= (3/\pi^2) \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z} \\ (j\neq 0)}} f(x+jh)/j^2$, где $h \in \mathbb{R}$, запишем характеристику гладкости

$$\omega_{\langle\prime\rangle}(f,t) := \sup\big\{\|\overline{\Delta}_h(f)\| : 0 \le h \le t\big\}, \quad t \ge 0. \tag{1.9}$$

Модуль непрерывности (1.9) появился как один из способов модификации введенного К. В. Руновским и Х.-Ю. Шмейссером в пространстве $L_p\big([0,2\pi]\big)$, $1 \le p < \infty$, модуля непрерывности, соответствующего производной Рисса [37]. В случае распространения на пространство $L_2(\mathbb{R})$ модуля непрерывности из [37] имеем

$$\widehat{\omega}(f,t) := \sup\big\{\|\widehat{\Delta}_h(f)\| : 0 \le h \le t\big\}, \quad t \ge 0, \tag{1.10}$$

где $\widehat{\Delta}_h := \widehat{T}_h - \mathbb{I}$, $\widehat{T}_h(f,x) := (4/\pi^2) \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(x + (2j+1)h)/(2j+1)^2$, $h \in \mathbb{R}$.

В связи с вышеизложенным естественным, с точки зрения автора, является рассмотрение в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ более общих конструкций, которые бы играли роль характеристик гладкости функций и содержали, как частные случаи, модули непрерывности, представленные в пп. 1.1 – 1.5, и чтобы при этом сохранялась возможность аккумулировать новые виды модулей непрерывности, которые могут появиться в будущем.

2. Преобразование Фурье и обобщенные характеристики гладкости функций в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. ***2.1.*** Впервые преобразование Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ построил и изучил Планшерель, поэтому указанное преобразование иногда называют преобразованием Фурье – Планшереля.

Теорема Планшереля ([3], гл. III, пп. 3.11.21)**.** *Для любой функции* $f \in L_2(\mathbb{R})$ *интеграл*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{-itx}-1}{-it}\, dt$$

имеет почти всюду конечную производную

$$\mathcal{F}(f,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{-itx}-1}{-it}\, dt, \tag{2.1}$$

для которой

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\mathcal{F}(f,x)\right|^2 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right|^2 dx \tag{2.2}$$

и почти всюду

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f,t) \frac{e^{itx}-1}{it}\, dt. \tag{2.3}$$

Кроме того, при $k \to \infty$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{F}(f,x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-k}^{k} f(t) e^{-itx}\, dt \right|^2 dx \to 0, \tag{2.4}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-k}^{k} \mathcal{F}(f,t) e^{itx}\, dt \right|^2 dx \to 0. \tag{2.5}$$

Функцию (2.1) называют преобразованием Фурье для f в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Иногда формулы (2.1) и (2.3) называют формулами обращения.

Соотношения (2.1) и (2.4) показывают, что преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ может быть определено не только как поточечный предел почти всюду, но и как предел в среднем, который обозначают символом l.i.m. Изложенное относится и к соотношениям (2.3) и (2.5). Таким образом,

$$\mathcal{F}(f,x) := \text{l.i.m}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-k}^{k} f(t)e^{-itx}\,dt\colon k\to\infty\right\},$$

$$f(x) := \text{l.i.m}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-k}^{k} \mathcal{F}(f,t)e^{itx}\,dt\colon k\to\infty\right\}.$$

Записывая для $f\in L_2(\mathbb{R})$ формулы обращения в виде

$$\mathcal{F}(f,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx}\,dt, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f,t)e^{itx}\,dt,$$

специально оговаривают, что интегралы понимаются сходящимися в среднеквадратическом, т. е. имеют место соотношения (2.4) и (2.5) соответственно.

2.2. Обозначим через $\mathbb{B}_{\sigma,2},\ \sigma\in(0,\infty)$, совокупность всех целых функций g экспоненциального типа, не превышающего σ, сужения которых на всю вещественную ось $\mathbb{R}$ принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R})$.

Пусть $L_2(a,b),\ -\infty<a<b<+\infty,$ — пространство измеримых на (a,b) функций, квадрат модуля которых интегрируем по Лебегу, т. е. $\int_a^b \left|f(x)\right|^2 dx<\infty,\ \sigma\in(0,\infty)$. Тогда если преобразование Фурье функции g, т. е. $\mathcal{F}(g)$, принадлежит $L_2(-\sigma,\sigma)$, то

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \mathcal{F}(g,t)e^{itx}\,dt \tag{2.6}$$

является элементом пространства $L_2(\mathbb{R})$ и допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость до целой функции экспоненциального типа, не превышающего σ. Иными словами, любая функция $g(z)$, допускающая на вещественной оси представление (2.6), принадлежит $\mathbb{B}_{\sigma,2}$. Имеет место и обратное утверждение.

Теорема Винера – Пэли ([48], гл. II, § 2.5)**.** *Для того чтобы функция $g\in L_2(\mathbb{R})$ была представима в виде* (2.6), *где $\mathcal{F}(g)\in L_2(-\sigma,\sigma)$, т. е. чтобы $g(x)$ была функцией с финитным и интегрируемым в квадрате спектром, необходимо и достаточно, чтобы $g(x)$ могла быть доопределена в плоскости комплексной переменной $z=x+iy$ как целая функция конечного экспоненциального типа $\le\sigma$.*

2.3. Как дальнейшее развитие и распространение идей Г. С. Шапиро и Я. Бомана, изложенных в [38, 39], обобщенные модули непрерывности 2π-периодических функций в пространстве $L_2([0,2\pi])$ рассматривались в работах С. Н. Васильева, А. Г. Бабенко, А. И. Козко, А. В. Рождественского, С. Б. Вакарчука (см., например, [40 – 42, 25 – 27]). Распространение понятия обобщенного модуля непрерывности на пространство функций n переменных $L_2(\mathbb{R}^n)$ было дано С. Н. Васильевым в работе [17] и в последующем использовано в статье Д. В. Горбачева [43].

2.3.1. Следуя обозначениям [17, 43], дадим определение обобщенного модуля непрерывности в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Пусть $\mathcal{M} := \{\mu_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющих условиям $0<\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\mu_j|<\infty$ и $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mu_j=0$. Полагаем $\mu(z) := \sum_{j\in\mathbb{Z}}\mu_j z^j$; H^h — оператор сдвига, т. е. $H^h f(x) := f(x+h),\ h\in\mathbb{R}$, при этом

$(H^h)^j := H^{hj}$. Символом $\Delta_h^{\mathcal{M}}$ обозначим обобщенный разностный оператор с постоянными коэффициентами, действующий из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$. При этом почти всюду на $\mathbb{R}$

$$\Delta_h^{\mathcal{M}}(f,x) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_j f(x+jh) = \mu(H^h)f(x). \tag{2.7}$$

Например, в случае $\widetilde{\mu}_1(z) := (z-1)^m$, $m \in \mathbb{N}$, для соответствующей данной функции числовой последовательности имеем $\mathcal{M}_{1,m} := \left\{\mu_j = (-1)^{m-j}\binom{m}{j}, \text{если } j = 0,\ldots,m;\ \mu_j = 0, \text{если } j < 0 \text{ или } j > m\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Отметим, что $\Delta_h^{\mathcal{M}_{1,m}}$, в силу (2.7), становится конечно-разностным оператором Δ_h^m, который для функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ почти всюду имеет вид $\Delta_h^m(f,x) := \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j}\binom{m}{j} f(x+jh)$.

При $\widetilde{\mu}_2(z) := (1-z)^\beta$, $|z| \le 1$, $\beta \in (0,\infty)\backslash\mathbb{N}$, имеем $\mathcal{M}_{2,\beta} := \left\{\mu_j = (-1)^j\binom{\beta}{j}, \text{если } j = 0,1,\ldots;\ \mu_j = 0, \text{если } j = -1,-2,\ldots\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и соответствующий данной ситуации оператор $\Delta_h^{\mathcal{M}_{2,\beta}}$ будет разностью $\Delta_{-h}^\beta(f,x)$ дробного порядка β. Здесь

$$\Delta_{-h}^\beta(f,x) := \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} (-1)^j \binom{\beta}{j} f(x-jh),$$

где $h \in \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}\cup\{0\}$. Данная разность называется левосторонней, если $h > 0$, и правосторонней, если $h < 0$. Таким образом, в силу (2.7) $\Delta_{-h}^{\mathcal{M}_{2,\beta}}(f,x) = \Delta_{-h}^\beta(f,x)$.

Когда $\widetilde{\mu}_3(z) := (-1)^m\prod_{j=0}^{m-1}(1-z^{a^j})$, где $m, a \in \mathbb{N}$, получаем разностный оператор Туэ–Морса $\widetilde{\Delta}_{ah}^m(f,x) = \prod_{j=0}^{m-1}\Delta_{a^jh}^1(f,x) = \prod_{j=0}^{m-1}\big(f(x+a^jh)-f(x)\big)$ [42].

В случае числовой последовательности $\mathcal{M}_3 := \big\{\mu_j = 3/(\pi j)^2, \text{если } j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}; \mu_j = -1, \text{если } j = 0\big\}_{j\in\mathbb{Z}}$ оператор $\Delta_h^{\mathcal{M}_3}$ совпадает с оператором $\overline{\Delta}_h$, входящим в определение модуля непрерывности (1.9), а для числовой последовательности $\mathcal{M}_4 := \big\{\mu_j = 4/(\pi j)^2, \text{если } j = 2\nu+1, \nu \in \mathbb{Z}; \mu_j = 0, \text{если } j = 2\nu, \nu \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}; \mu_j = -1, \text{если } j = 0\big\}_{j\in\mathbb{Z}}$ соответствующий оператор $\Delta_h^{\mathcal{M}_4}$ на основании (2.7) превращается в разностный оператор $\widehat{\Delta}_h$, входящий в определение характеристики гладкости (1.10).

Используя формулы (2.5) и (2.7), а также условия, налагаемые на члены числовой последовательности $\mathcal{M} = \{\mu_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, почти всюду на $\mathbb{R}$ имеем

$$\Delta_h^{\mathcal{M}}(f,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}(f,t)\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{e^{i(x+jh)t}-1}{it}\,\mu_j\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}(f,t)\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mu_j e^{ijht}\right)\frac{e^{ixt}}{it}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f,t) \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_j e^{ijht} \right) \frac{e^{ixt}-1}{it}\, dt. \tag{2.8}$$

Поскольку для произвольной функции f, принадлежащей $L_2(\mathbb{R})$, ее обобщенная разность $\Delta_h^{\mathcal{M}}(f)$ также является элементом из $L_2(\mathbb{R})$, на основании (2.3) записываем

$$\Delta_h^{\mathcal{M}}(f,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\Big(\Delta_h^{\mathcal{M}}(f),t\Big) \frac{e^{ixt}-1}{it}\, dt. \tag{2.9}$$

Полагая

$$w_{\mathcal{M}}(x) := \mu(e^{ix}) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_j e^{ijx}, \tag{2.10}$$

из (2.8) и (2.9) почти всюду на $\mathbb{R}$ получаем

$$\mathcal{F}\big(\Delta_h^{\mathcal{M}}(f),x\big) = w_{\mathcal{M}}(hx)\mathcal{F}(f,x). \tag{2.11}$$

Тогда на основании соотношений (2.2) и (2.11) имеем

$$\big\|\Delta_h^{\mathcal{M}}(f)\big\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|\mathcal{F}\big(\Delta_h^{\mathcal{M}}(f),x\big)\big|^2 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|\mathcal{F}(f,x)\big|^2 \big|w_{\mathcal{M}}(hx)\big|^2 dx. \tag{2.12}$$

Из формулы (2.10) следует, что комплекснозначная функция $w_{\mathcal{M}}$ является непрерывной, 2π-периодической и такой, что $w_{\mathcal{M}}(0)=0$. Все изложенное касается и вещественной функции $|w_{\mathcal{M}}|^2$, которая к тому же может быть еще и четной, если все элементы числовой последовательности $\mathcal{M}=\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ окажутся вещественными числами.

2.3.2. Для числовой последовательности $\mathcal{M}_{1,m}$ в силу (2.10) получаем

$$w_{\mathcal{M}_{1,m}}(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} e^{ijx} = (e^{ix}-1)^m.$$

Следовательно,

$$\big|w_{\mathcal{M}_{1,m}}(x)\big|^2 = 2^m(1-\cos x)^m. \tag{2.13}$$

Далее рассмотрим числовую последовательность $\mathcal{M}_{2,\beta}$, для которой $\beta\in(0,\infty)\backslash\mathbb{N}$. Тогда

$$w_{\mathcal{M}_{2,\beta}}(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} (-1)^j \binom{\beta}{j} e^{ijx} = (1-e^{ix})^\beta$$

и

$$\big|w_{\mathcal{M}_{2,\beta}}(x)\big|^2 = 2^\beta(1-\cos x)^\beta. \tag{2.14}$$

Отметим, что в силу формулы (2.11) в данном случае почти всюду на $\mathbb{R}$ имеем

$$\mathcal{F}\big(\Delta_h^\beta(f),x\big) = \mathcal{F}\big(\Delta_{-h}^{\mathcal{M}_{2,\beta}}(f),x\big) = w_{\mathcal{M}_{2,\beta}}(-hx)\mathcal{F}(f,x) = \big(1-e^{-ixh}\big)^\beta \mathcal{F}(f,x).$$

В случае числовой последовательности $\mathcal{M}_3$, используя результаты [44, с. 776] (пп. 5.4.2.7), для $0\le x\le\pi$ имеем

$$w_{\mathcal{M}_3}(x) = -1 + \frac{6}{\pi^2} \sum_{j \in \mathbb{N}} \cos \frac{jx}{j^2} = \frac{3x(x/(2\pi) - 1)}{\pi},$$

т. е.

$$\big|w_{\mathcal{M}_3}(x)\big|^2 = \frac{9}{\pi^2} x^2 \Big(1 - \frac{x}{2\pi}\Big)^2. \tag{2.15}$$

Для числовой последовательности $\mathcal{M}_4$, в силу результатов [44, с. 771] (пп. 5.4.6.5) при $0 \leq x \leq \pi$ получаем

$$w_{\mathcal{M}_4}(x) = -1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+} \cos((2\nu + 1)x)/(2\nu + 1)^2 = -\frac{2x}{\pi},$$

т. е.

$$\big|w_{\mathcal{M}_4}(x)\big|^2 = \frac{4x^2}{\pi^2}. \tag{2.16}$$

Отметим, что функции (2.13) – (2.16) являются 2π-периодическими, непрерывными, четными $\big($в связи с этим они рассматривались на отрезке $[0, \pi]\big)$ и принимающими в нуле значение 0.

Согласно работе С. Н. Васильева [17], под обобщенным модулем непрерывности произвольного элемента $f \in L_2(\mathbb{R})$, порожденным числовой последовательностью $\mathcal{M} = \{\mu_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, будем понимать функцию

$$w_{\mathcal{M}}(f, t) := \sup \big\{ \|\Delta_h^{\mathcal{M}}(f)\| : |h| \leq t \big\}, \quad t \geq 0. \tag{2.17}$$

Исходя из (2.12) и (2.17), в общем случае, включающем рассмотренные выше числовые последовательности $\mathcal{M}_{1,m}$, $\mathcal{M}_{2,\beta}$, $\mathcal{M}_3$ и $\mathcal{M}_4$, имеем

$$w_{\mathcal{M}}(f, t) = \sup \left\{ \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|\mathcal{F}(f, \tau)\big|^2 \big|w_{\mathcal{M}}(h\tau)\big|^2 d\tau \right)^{1/2} : 0 \leq h \leq t \right\}, \quad t \geq 0. \tag{2.18}$$

2.3.3. Характеристики гладкости (1.5) – (1.7) никак не укладываются в общую схему, связанную с формированием обобщенного модуля непрерывности вида (2.17) в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Остановимся на соотношениях (1.6) и (1.7). Согласно работам [25, 30], для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ получаем соответственно

$$\widetilde{\Omega}_m(f, t) = \sup \left\{ \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|\mathcal{F}(f, \tau)\big|^2 \big(1 - \mathrm{sinc}\,(h\tau)\big)^{2m} d\tau \right)^{1/2} : 0 < h \leq t \right\}, \quad t > 0, \tag{2.19}$$

и

$$\Lambda_m(f, t) = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|\mathcal{F}(f, \tau)\big|^2 \eta_m(t\tau)\, d\tau \right\}^{1/2}, \quad t > 0, \tag{2.20}$$

где $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{sinc}\,(x) := \big\{ \sin(x)/x, \text{ если } x \neq 0;\ 1, \text{ если } x = 0 \big\}$, $\eta_m(x) := (2^m/x) \displaystyle\int_0^x (1 - -\cos v)^m\, dv$, $x \neq 0$. Полагаем, что $\eta_m(0) = 0$. Содержащиеся в формулах (2.19), (2.20) функции $\big(1 - \mathrm{sinc}\,(x)\big)^{2m}$ и $\eta_m(x)$ соответственно являются на множестве $\mathbb{R}$ непрерывными, четными, ограниченными, почти всюду отличными от нуля и равными нулю при $x = 0$. Однако ни одна из них не является 2π-периодической.

2.3.4. Продолжая дальнейшее обобщение характеристик гладкости в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, через $\mathbb{G}$ обозначим множество всех непрерывных, неотрицательных, четных, ограниченных на всей вещественной оси $\mathbb{R}$ функций φ, которые почти всюду на $\mathbb{R}$ отличны от нуля и такие, что $\varphi(0) = 0$. Символом $\mathfrak{M}$ обозначим класс всех комплекснозначных функций $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, для которых $|w|^2 \in \mathbb{G}$.

Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(f)$ — преобразование Фурье функции f, $w \in \mathfrak{M}$, $h \in \mathbb{R}$. Тогда $\big\|\mathcal{F}(f,\cdot)w(h\cdot)\big\| \leq \|w\|_{C(\mathbb{R})}\|f\| < \infty$, т. е. $\mathcal{F}(f,x)w(hx) \in L_2(\mathbb{R})$. С помощью обобщенного разностного оператора $\Delta_h^w\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, где $h \in \mathbb{R}$, $w \in \mathfrak{M}$, почти всюду на $\mathbb{R}$ определяем функцию

$$\Delta_h^w(f,x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f,\tau)w(h\tau)\frac{e^{ix\tau}-1}{i\tau}\,d\tau. \tag{2.21}$$

Например, при $w := w_{\mathcal{M}}$, где $w_{\mathcal{M}}$ определяется формулой (2.10), из (2.8) и (2.21) для $f \in L_2(\mathbb{R})$ имеем $\Delta_h^{w_{\mathcal{M}}}(f) = \Delta_h^{\mathcal{M}}(f)$. В связи с этим формулу (2.21) можно рассматривать как своеобразное распространение обобщенного разностного оператора $\Delta_h^{\mathcal{M}}$ на более общий случай Δ_h^w. Согласно (2.3) и (2.21), почти всюду на $\mathbb{R}$ справедливо равенство $\mathcal{F}(\Delta_h^w(f),x) = \mathcal{F}(f,x)w(hx)$, $h \in \mathbb{R}$, на основании которого и формулы (2.2) получаем

$$\big\|\Delta_h^w(f)\big\|^2 = \big\|\mathcal{F}(\Delta_h^w(f))\big\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \big|\mathcal{F}(f,\tau)\big|^2\big|w(h\tau)\big|^2 d\tau. \tag{2.22}$$

В результате приходим в определенном смысле к более общей, чем (2.17), характеристике гладкости функций $f \in L_2(\mathbb{R})$:

$$\omega^w(f,t) := \sup\big\{\|\Delta_h^w(f)\|\colon |h| \leq t\big\}, \quad t \geq 0, \tag{2.23}$$

или с учетом (2.22), (2.23)

$$\omega^w(f,t) = \sup\left\{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \big|\mathcal{F}(f,\tau)\big|^2\big|w(h\tau)\big|^2 d\tau\right)^{1/2} : 0 \leq h \leq t\right\}, \quad t \geq 0. \tag{2.24}$$

При этом $\lim\big\{\omega^w(f,t)\colon t \to 0+\big\} = 0$ и $\omega^w(f,t)$ — непрерывная, неубывающая на множестве $0 \leq t < \infty$ функция, такая, что $\omega^w(f_1+f_2,t) \leq \omega^w(f_1,t) + \omega^w(f_2,t)$, где $f_1, f_2 \in L_2(\mathbb{R})$.

Сопоставляя (2.18) и (2.24), имеем $\omega^{w_{\mathcal{M}}}(f,t) = \omega_{\mathcal{M}}(f,t)$, $t \geq 0$. Поскольку рассмотренный в пп. 1.3 разностный оператор $\widetilde{\Delta}_h^m(f)$, $m \in \mathbb{N}$, $h \in (0,\infty)$, $f \in L_2(\mathbb{R})$, можно представить почти всюду на $\mathbb{R}$ в виде [25]

$$\widetilde{\Delta}_h^m(f,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f,\tau)(\operatorname{sinc}(h\tau)-1)^m\,\frac{e^{ix\tau}-1}{i\tau}\,d\tau,$$

то согласно (2.21) оператор $\widetilde{\Delta}_h^m(f)$ является частным случаем обобщенного оператора $\Delta_h^w(f)$ при $w = \widetilde{w}_m$, где $\widetilde{w}_m(x) := (\operatorname{sinc}(x)-1)^m$. Тогда на основании (2.19) и (2.24) получаем $\omega^{\widetilde{w}_m}(f,t) = \widetilde{\Omega}_m(f,t)$, $t > 0$.

2.3.5. Рассмотрим вторую группу функций, которые также целесообразно использовать как характеристики гладкости в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$ и $w \in \mathfrak{M}$. Тогда полагаем

$$\Lambda^w(f,t) := \left\{ \frac{1}{t} \int\limits_0^t \left\| \Delta_h^w(f) \right\|^2 dh \right\}^{1/2}, \quad t > 0. \tag{2.25}$$

При этом $\lim \left\{ \Lambda^w(f,t) : t \to 0+ \right\} = 0$; $\Lambda^w(f,t)$ является непрерывной функцией на множестве $0 < t < \infty$; $\Lambda^w(f,t) \le \omega^w(f,t),\ t > 0$; $\Lambda^w(f_1 + f_2, t) \le \sqrt{2}(\Lambda^w(f_1,t) + \Lambda^w(f_2,t)),\ t > 0$, где $f_1, f_2 \in L_2(\mathbb{R})$. Отметим, что, например, в случае $w = w_{\mathcal{M}_{1,m}},\ m \in \mathbb{N}$, из (1.7) и (2.25) имеем $\Lambda^{w_{\mathcal{M}_{1,m}}}(f,t) = \Lambda_m(f,t),\ t > 0$.

Для произвольного элемента $f \in L_2(\mathbb{R})$ на основании (2.22) и (2.25) записываем

$$\Lambda^w(f,t) = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{F}(f,\tau) \right|^2 \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \left| w(h\tau) \right|^2 dh \right) d\tau \right\}^{1/2}, \quad t > 0. \tag{2.26}$$

Очевидно, что

$$\int\limits_0^t |w(h\tau)|^2 dh = \frac{1}{\tau} \int\limits_0^{t\tau} \left| w(h) \right|^2 dh, \qquad t > 0, \quad \tau \ne 0. \tag{2.27}$$

Пусть

$$\mathcal{W}(x) := \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ (1/x) \displaystyle\int\limits_0^x \left| w(h) \right|^2 dh, & \text{если} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad x \ne 0, \end{cases} \tag{2.28}$$

где $w \in \mathfrak{M}$. В силу четности функции $|w|^2$ из (2.28) имеем $\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(-x),\ x \in \mathbb{R}$. Тогда с учетом (2.27), (2.28) формула (2.26) принимает вид

$$\Lambda^w(f,t) = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f,\tau)|^2 \mathcal{W}(t\tau)\, d\tau \right\}^{1/2}, \quad t > 0. \tag{2.29}$$

Следует особо отметить, что, например, для функций $w = w_{\mathcal{M}_{2,\beta}},\ \beta \in (0,\infty),\ w = w_{\mathcal{M}_3}$ и $w = w_{\mathcal{M}_4}$, а также для $w = \widetilde{w}_m,\ m \in \mathbb{N}$, рассмотренный далее круг экстремальных задач, связанных с теорией аппроксимации функций в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, ранее не исследовался с использованием характеристики гладкости Λ^w.

3. Производные дробного порядка функций в пространстве $\boldsymbol{L_2}(\mathbb{R})$. Напомним определение производной дробного порядка $\alpha \in (0,\infty)$ произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ (см., например, [10, 45 – 47, 32]). Пусть функция q, принадлежащая $L_2(\mathbb{R})$, такова, что

$$\lim \left\{ \| \Delta_{-h}^{\alpha}(f)/h^{\alpha} - q \| : h \to 0+ \right\} = 0, \tag{3.1}$$

где $\Delta_{-h}^{\alpha}(f,x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x - jh)$ почти всюду на $\mathbb{R}$. Тогда q называют сильной производной Лиувилля – Грюнвальда – Летникова дробного порядка α функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ и обозначают символом $\mathcal{D}^{\alpha}f$, т. е. $q=\mathcal{D}^{\alpha}f$. Из равенства (3.1), в частности, получаем $\|\mathcal{D}^{\alpha}f\|=$ $=\lim\big\{\|\Delta_{-h}^{\alpha}(f)/h^{\alpha}\|: h\to 0+\big\}$.

В статье Г. Гаймназарова [10] указывалось, что для произвольной функции $f\in L_2(\mathbb{R})$ и $\alpha\in(0,\infty)$ почти всюду на $\mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}^{\alpha}f,x)=(ix)^{\alpha}\mathcal{F}(f,x). \tag{3.2}$$

В работе автора [32] отмечалось, что если существует в приведенном выше смысле сильная производная Лиувилля – Грюнвальда – Летникова $D^{\alpha}f$, то почти всюду на $\mathbb{R}$ выполняется равенство $D^{\alpha}f(x)=\lim\big\{\Delta_{-h}^{\alpha}(f,x)/h^{\alpha}: h\to 0+\big\}$.

Символом $L_2^{\alpha}(\mathbb{R})$, $\alpha\in(0,\infty)$, обозначим класс функций $f\in L_2(\mathbb{R})$, которые имеют производные дробного порядка $D^{\alpha}f$, принадлежащие пространству $L_2(\mathbb{R})$. Отметим, что $L_2^{\alpha}(\mathbb{R})$ является банаховым пространством с нормой $\|f\|+\|D^{\alpha}f\|$. Если же $\alpha=r$, $r\in\mathbb{N}$, то под $L_2^{r}(\mathbb{R})$ будем понимать класс функций $f\in L_2(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$-го порядка локально абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R})$. В данном случае очевидно, что почти всюду на $\mathbb{R}$ имеем $D^{r}f=f^{(r)}$.

4. Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями экспоненциального типа $\boldsymbol{\sigma\in(0,\infty)}$ на классах $\boldsymbol{L_2(\mathbb{R})}$ и $\boldsymbol{L_2^{\alpha}(\mathbb{R})}$, $\boldsymbol{\alpha\in(0,\infty)}$, выраженные через характеристику гладкости $\boldsymbol{\omega^{w}}$. ***4.1.*** Прежде чем перейти к изложению основного материала данного пункта, введем ряд необходимых понятий и определений. Поскольку в силу четности функций из множества $\mathbb{G}$, введенного в пп. 2.3.4, достаточно их рассматривать лишь на полуоси $\mathbb{R}_{+}$, для произвольного элемента $\varphi\in\mathbb{G}$ через $t_*\in(0,\infty)$ обозначим такое значение аргумента x, для которого

$$\varphi(t_*)=\sup\big\{\varphi(x): 0<x<\infty\big\}. \tag{4.1}$$

Очевидно, что t_* зависит от φ. Если верхняя грань в формуле (4.1) достигается более чем при одном значении аргумента, то в качестве t_* рассматриваем наименьшее из них.

Будем говорить, что функция $\varphi\in\mathbb{G}$ удовлетворяет *свойству A*, если на отрезке $[0,t_*]$ она является монотонно возрастающей. Для произвольного элемента $\varphi\in\mathbb{G}$, имеющего указанное свойство, полагаем

$$\varphi_*(x):=\big\{\varphi(x),\ \text{ если }\ 0\le x\le t_*;\ \varphi(t_*),\ \text{ если }\ t_*\le x<\infty\big\}, \tag{4.2}$$

$$\varphi(\widetilde{t}_*)=\inf\big\{\varphi(x): t_*<x<\infty\big\}, \tag{4.3}$$

где значение t_* определяется из соотношения (4.1). Если нижняя грань в (4.3) достигается более чем при одном значении аргумента, то в качестве $\widetilde{t}_*$ используем наименьшее из них.

Будем говорить, что функция $\varphi\in\mathbb{G}$ удовлетворяет *свойству B*, если для нее $\varphi(\widetilde{t}_*)>0$.

Отметим, что рассмотренные ранее функции $|w_{\mathcal{M}_{1,m}}|^2$, $m\in\mathbb{N}$; $|w_{\mathcal{M}_{2,\beta}}|^2$, $\beta\in(0,\infty)$; $|w_{\mathcal{M}_3}|^2$ и $|w_{\mathcal{M}_4}|^2$ принадлежат множеству $\mathbb{G}$, удовлетворяют *свойству A* и для каждой из них $t_*=\pi$. Что же касается функций $|\widetilde{w}_m|^2$, $m\in\mathbb{N}$, то они также являются элементами множества $\mathbb{G}$, удовлетворяют *свойствам A*, *B* и имеют одно и то же значение $t_*\in(4{,}49;4{,}51)$, которое является наименьшим положительным корнем уравнения $tg(x)=x$ (см., например, [21, 25]).

Для произвольной функции $f\in L_2(\mathbb{R})$ через $\mathcal{A}_{\sigma}(f)$, $\sigma\in(0,\infty)$, обозначим ее наилучшее среднеквадратическое приближение элементами подпространства $\mathbb{B}_{\sigma,2}$, состоящего из целых функций экспоненциального типа $\le\sigma$, сужения которых на $\mathbb{R}$ принадлежат пространству

$L_2(\mathbb{R})$, т. е. $\mathcal{A}_\sigma(f) := \inf\{\|f-g\| : g \in \mathbb{B}_{\sigma,2}\}$. Нам понадобится одно утверждение, установленное И. И. Ибрагимовым и Ф. Г. Насибовым в работе [6].

Лемма 1. *Пусть функция f принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$ и $\mathcal{F}(f)$ — ее преобразование Фурье в смысле $L_2(\mathbb{R})$ т. е.*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f,t) \frac{e^{ixt}-1}{it}\, dt,$$

где $\mathcal{F}(f) \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда

$$\mathcal{L}_\sigma(f,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \mathcal{F}(f,t) e^{ixt}\, dt \tag{4.4}$$

является целой функцией, принадлежащей подпространству $\mathbb{B}_{\sigma,2}$, которая наименее уклоняется от f в смысле метрики $L_2(\mathbb{R})$, т. е.

$$\mathcal{A}_\sigma(f) = \big\|f - \mathcal{L}_\sigma(f)\big\| = \left\{ \int\limits_{|t|\ge\sigma} |\mathcal{F}(f,t)|^2\, dt \right\}^{1/2}. \tag{4.5}$$

4.2. **Теорема 1.** *Пусть α, σ принадлежат $(0,\infty)$; комплекснозначная функция $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такова, что $|w|^2$ принадлежит множеству $\mathbb{G}$ и удовлетворяет свойствам A и B; точка $\overline{t} \in (0, t_*)$ определяется следующим образом:*

$$\big|w(\overline{t})\big| = \big|w(\widetilde{t}_*)\big|, \tag{4.6}$$

где величина $\widetilde{t}_*$ находится для функции $\varphi = |w|^2$ согласно соотношению (4.3). *Тогда для любого значения $\tau \in (0, \overline{t}]$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^\alpha \mathcal{A}_\sigma(f)}{\omega^w(D^\alpha f, \tau/\sigma)} = \frac{1}{|w(\tau)|}. \tag{4.7}$$

Доказательство. Используя формулы (2.24), (3.2), (4.5) и учитывая, что функция $|w|^2$ удовлетворяет свойству B, для $0 < t \le \overline{t}/\sigma$ записываем

$$\omega^w(D^\alpha f, t) \ge \left\{ \int\limits_{|\tau|\ge\sigma} \big|\mathcal{F}(D^\alpha f,\tau)\big|^2 \big|w(t\tau)\big|^2\, d\tau \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \int\limits_{|\tau|\ge\sigma} |\tau|^{2\alpha} \big|\mathcal{F}(f,\tau)\big|^2\, |w(t\tau)|^2\, d\tau \right\}^{1/2} \ge$$

$$\ge \sigma^\alpha \left\{ \int\limits_{|\tau|\ge\sigma} \big|\mathcal{F}(f,\tau)\big|^2 \big|w(t\tau)\big|^2\, d\tau \right\}^{1/2} \ge$$

$$\geq \sigma^{\alpha}|w(t\sigma)| \left\{ \int\limits_{|\tau|\geq\sigma} \left|\mathcal{F}(f,\tau)\right|^2 d\tau \right\}^{1/2} =$$

$$= \sigma^{\alpha}\big|w(t\sigma)\big|\mathcal{A}_{\sigma}(f).$$

Отсюда, полагая $t = \tau/\sigma$, где $0 < \tau \leq \bar{t}$, получаем оценку сверху

$$\sup_{f\in L_2^{\alpha}(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{\alpha}\mathcal{A}_{\sigma}(f)}{\omega^{w}(D^{\alpha}f,\tau/\sigma)} \leq \frac{1}{|w(\tau)|}. \tag{4.8}$$

Установим оценку снизу экстремальной характеристики, содержащейся в левой части неравенства (4.8). Для этого рассмотрим функцию $\lambda_a(x) := a\mathrm{sinc}\,(ax)$, $a \in (0,\infty)$. Поскольку $|\lambda_a(z)| \leq k\exp(a|z|)$, где $k = \mathrm{const}(k > 0)$, $z \in \mathbb{C}$, то λ_a является целой функцией экспоненциального типа $\leq a$. Функция λ_a не является элементом пространства $L_1(\mathbb{R})$ [48] (гл. II, § 2.3), однако $\lambda_a \in L_2(\mathbb{R})$ и, следовательно, для нее существует преобразование Фурье (2.1) в смысле пространства $L_2(\mathbb{R})$, которое равно $\mathcal{F}(\lambda_a,x) = \sqrt{\pi/2}\big\{1$, если $|x| < a$; $1/2$, если $|x| = a$; 0, если $|x| > a\big\}$ [49] (гл. 5). Исходя из изложенного, рассмотрим функцию

$$q_{\sigma+\varepsilon}(x) := \sqrt{2/\pi}\big(\lambda_{\sigma+\varepsilon}(x) - \lambda_{\sigma}(x)\big), \quad \varepsilon > 0, \tag{4.9}$$

которая является целой функцией конечного экспоненциального типа $\leq \sigma+\varepsilon$, принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$ и имеет преобразование Фурье

$$\mathcal{F}(q_{\sigma+\varepsilon},x) = \big\{1, \text{ если } \sigma < |x| < \sigma+\varepsilon; \ \ 1/2, \text{ если } |x| = \sigma \text{ или } |x| = \sigma+\varepsilon;$$

$$0, \text{ если } |x| < \sigma \text{ или } |x| > \sigma+\varepsilon\big\}. \tag{4.10}$$

Из (2.2), (3.2) и (4.10) следует, что $q_{\sigma+\varepsilon}$ принадлежит $L_2^{\alpha}(\mathbb{R})$. Исходя из (4.5) и (4.10), для $q_{\sigma+\varepsilon}$ получаем

$$\mathcal{A}_{\sigma}(q_{\sigma+\varepsilon}) = \sqrt{2\varepsilon}. \tag{4.11}$$

Поскольку, согласно (2.22) и (3.2),

$$\big\|\Delta_h^{w}(\mathcal{D}^{\alpha}f)\big\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|\mathcal{F}(f,\tau)\big|^2|\tau|^{2\alpha}\big|w(h\tau)\big|^2 d\tau, \tag{4.12}$$

то используя соотношение (4.2), где $\varphi = |w|^2$, а также формулы (4.10) – (4.12) и учитывая, что $|w|^2 \in \mathbb{G}$, для функции $q_{\sigma+\varepsilon}$ имеем

$$\big\|\Delta_h^{w}(\mathcal{D}^{\alpha}q_{\sigma+\varepsilon})\big\|^2 = 2\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon} \tau^{2\alpha}|w(h\tau)|^2 d\tau \leq 2(\sigma+\varepsilon)^{2\alpha}\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon} |w(h\tau)|^2 d\tau \leq$$

$$\leq (\sigma+\varepsilon)^{2\alpha}\mathcal{A}_{\sigma}^2(q_{\sigma+\varepsilon})\,\big|w(h(\sigma+\varepsilon))\big|_{*}^{2}. \tag{4.13}$$

Используя определение (2.23) для характеристики гладкости ω^{w} и (4.13), для любого $t \in (0,\bar{t}/\sigma]$ получаем

$$\omega^w(\mathcal{D}^\alpha q_{\sigma+\varepsilon}, t) \le \mathcal{A}_\sigma(q_{\sigma+\varepsilon})(\sigma+\varepsilon)^\alpha \left|w(t(\sigma+\varepsilon))\right|_*. \tag{4.14}$$

Полагая $t = \tau/\sigma$, где $0 < \tau \le \bar{t}$, и вводя обозначение

$$\theta_\varepsilon(\sigma,\tau) := (1+\varepsilon/\sigma)^\alpha \left|w(\tau(1+\varepsilon/\sigma))\right|_*, \tag{4.15}$$

из (4.14) имеем

$$\frac{\sigma^\alpha \mathcal{A}_\sigma(q_{\sigma+\varepsilon})}{\omega^w(\mathcal{D}^\alpha q_{\sigma+\varepsilon}, \tau/\sigma)} \ge \frac{1}{\theta_\varepsilon(\sigma,\tau)}.$$

Поскольку, как уже отмечалось, $q_{\sigma+\varepsilon}$ принадлежит $L_2^\alpha(\mathbb{R})$, из последнего неравенства следует соотношение

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^\alpha \mathcal{A}_\sigma(f)}{\omega^w(\mathcal{D}^\alpha f, \tau/\sigma)} \ge \frac{1}{\theta_\varepsilon(\sigma,\tau)}. \tag{4.16}$$

Из (4.15) следует, что при $\varepsilon \to 0+$ и постоянных значениях σ и τ величина $\theta_\varepsilon(\sigma,\tau)$ монотонно убывает. Следовательно, $1/\theta_\varepsilon(\sigma,\tau)$ при $\varepsilon\to 0+$ монотонно возрастает и ограничена сверху значением $1/|w(\tau)|$. Таким образом, для произвольного сколь угодно малого числа $\delta > 0$ существует такое значение $\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}(\delta) \in (0,\sigma_*)$, где $\sigma_* := \min(\sigma, 1/\sigma)$, для которого $1/\theta_{\widetilde{\varepsilon}}(\sigma,\tau) > 1/|w(\tau)| - \delta$. Отсюда и из определения верхней грани числового множества имеем

$$\sup\left\{1/\theta_\varepsilon(\sigma,\tau)\colon 0<\varepsilon<\sigma_*\right\} = 1/|w(\tau)|. \tag{4.17}$$

Вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon \in (0,\sigma_*)$ от правой части неравенства (4.16) и используя (4.17), получаем оценку снизу

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^\alpha \mathcal{A}_\sigma(f)}{\omega^w(D^\alpha f, \tau/\sigma)} \ge \frac{1}{|w(\tau)|}. \tag{4.18}$$

Требуемое равенство (4.7) следует из соотношений (4.8) и (4.18).

Теорема 1 доказана.

***Замечание* 1.** На основании рассуждений, практически аналогичных имевшим место при доказательстве теоремы 1, имеем

$$\sup_{f\in L_2(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\omega^w(f, \tau/\sigma)} = \frac{1}{|w(\tau)|}, \tag{4.19}$$

где $0 < \tau \le \bar{t}$. При этом верхняя грань вычисляется по всем функциям f из $L_2(\mathbb{R})$, которые не эквивалентны нулю.

Объединяя, например, (4.7), когда $\alpha = r \in \mathbb{N}$; $w = \widetilde{w}_m$, $m\in\mathbb{N}$, и (4.19), когда также $w = \widetilde{w}_m$, $m \in \mathbb{N}$, получаем один из результатов автора [25]

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^r \mathcal{A}_\sigma(f)}{\widetilde{\Omega}_m(f^{(r)}, \tau/\sigma)} = \frac{1}{(1-\operatorname{sinc}(\tau))^m},$$

где $r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^0(\mathbb{R}) \equiv L_2(\mathbb{R})$, $f^{(0)} \equiv f$, $0 < \tau \le \bar{t}$.

4.3. Далее полагаем

$$\mathfrak{N}(f; u, \tau) := |\mathcal{F}(f,u)|^p \, |u|^{\alpha p} \, |w(\tau u)|^p \, \xi(\tau), \tag{4.20}$$

$$\Xi_{u,p,\alpha,w}(\xi, t) := |u|^\alpha \left\{ \int_0^t |w(\tau u)|^p \, \xi(\tau)\, d\tau \right\}^{1/p}. \tag{4.21}$$

Теорема 2. *Пусть* α, σ *принадлежат* $(0, \infty)$; *комплекснозначная функция* $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *такова, что* $|w|^2$ *принадлежит множеству* $\mathbb{G}$ *и удовлетворяет свойству* A; $0 < p \leq 2$; $t \in (0, t_*/\sigma]$, *где* t_* *определяется согласно* (4.1) *для* $\varphi = |w|^2$; ξ — *неотрицательная, суммируемая на отрезке* $[0, t]$ *функция, которая не эквивалентна нулю. Тогда имеет место двойное неравенство*

$$\frac{1}{\Xi_{\sigma,p,\alpha,w}(\xi,t)} \leq \sup_{f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^t (\omega^w(\mathcal{D}^\alpha f, \tau))^p \xi(\tau)\, d\tau\right\}^{1/p}} \leq \frac{1}{\inf\left\{\Xi_{u,p,\alpha,w}(\xi,t) : \sigma \leq |u| < \infty\right\}}. \tag{4.22}$$

Доказательство. Используя формулы (2.23), (4.12), (4.20), (4.21) и (4.5), а также обобщенное неравенство Минковского (см., например, [5], гл. I, раздел 1.3, пп. 1.3.2), для произвольного $t \in (0, t_*/\sigma]$ записываем

$$\left\{\int_0^t \big(\omega^w(\mathcal{D}^\alpha f, \tau)\big)^p \xi(\tau)\, d\tau\right\}^{1/p} \geq \left\{\int_0^t \big\|\Delta_\tau^w(\mathcal{D}^\alpha f)\big\|^p \xi(\tau)\, d\tau\right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{\int_0^t \left[\int_{-\infty}^{\infty} \big|\mathcal{F}(f,u)\big|^2 |u|^{2\alpha} \big|w(\tau u)\big|^2 du\right]^{p/2} \xi(\tau)\, d\tau\right\}^{1/p} \geq$$

$$\geq \left\{\int_0^t \left[\int_{|u|\geq\sigma} \big|\mathcal{F}(f,u)\big|^2 |u|^{2\alpha} \big|w(\tau u)\big|^2 du\right]^{p/2} \xi(\tau)\, d\tau\right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{\int_0^t \left[\int_{|u|\geq\sigma} \mathfrak{N}^{2/p}(f; u, \tau) du\right]^{p/2} d\tau\right\}^{1/p} \geq$$

$$\geq \left\{\int_{|u|\geq\sigma} \left[\int_0^t \mathfrak{N}(f; u, \tau)\, d\tau\right]^{2/p} du\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\int_{|u|\geq\sigma} |\mathcal{F}(f,u)|^2 \left[|u|^{\alpha p} \int_0^t \big|w(\tau u)\big|^p \xi(\tau)\, d\tau\right]^{2/p} du\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\int_{|u|\geq\sigma} |\mathcal{F}(f,u)|^2\, \Xi^2_{u,p,\alpha,w}(\xi,t) du\right\}^{1/2} \geq$$

$$\geq \mathcal{A}_\sigma(f) \inf\left\{\Xi_{u,p,\alpha,w} : \sigma \leq |u| < \infty\right\}.$$

Отсюда получаем оценку сверху

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^t (\omega^w(\mathcal{D}^\alpha f,\tau))^p \xi(\tau)\,d\tau\right\}^{1/p}} \le \frac{1}{\inf\left\{\Xi_{u,p,\alpha,w}(\xi,t) : \sigma \le |u| < \infty\right\}}. \tag{4.23}$$

Установим оценку снизу экстремальной характеристики, содержащейся в левой части неравенства (4.23). Для этого воспользуемся целой функцией $q_{\sigma+\varepsilon} \in L_2^\alpha(\mathbb{R})$ экспоненциального типа $\le \sigma+\varepsilon$, введенной при доказательстве теоремы 1 формулой (4.9). Далее полагаем

$$\widehat{\Xi}_{\sigma+\varepsilon,p,\alpha,w}(\xi,t) := (\sigma+\varepsilon)^\alpha \left\{\int\limits_0^t \left|w(\tau(\sigma+\varepsilon))\right|_*^p \xi(\tau)\,d\tau\right\}^{1/p}, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.24}$$

Используя неравенство (4.14), которое выполняется в более широком диапазоне значений $0 < < t < \infty$, а также формулу (2.24), получаем

$$\int\limits_0^t (\omega^w(\mathcal{D}^\alpha q_{\sigma+\varepsilon},\tau))^p \xi(\tau)\,d\tau \le \mathcal{A}_\sigma^p(q_{\sigma+\varepsilon})(\sigma+\varepsilon)^{\alpha p} \int\limits_0^t |w(\tau(\sigma+\varepsilon))|_*^p \xi(\tau)\,d\tau =$$

$$= \left(\widehat{\Xi}_{\sigma+\varepsilon,p,\alpha,w}(\xi,t)\right)^p \mathcal{A}_\sigma^p(q_{\sigma+\varepsilon}),$$

т. е.

$$\left\{\int\limits_0^t (\omega^w(\mathcal{D}^\alpha q_{\sigma+\varepsilon},\tau))^p \xi(\tau)\,d\tau\right\}^{1/p} \le \mathcal{A}_\sigma(q_{\sigma+\varepsilon})\widehat{\Xi}_{\sigma+\varepsilon,p,\alpha,w}(\xi,t).$$

Отсюда имеем

$$\frac{\mathcal{A}_\sigma(q_{\sigma+\varepsilon})}{\left\{\int_0^t (\omega^w(\mathcal{D}^\alpha q_{\sigma+\varepsilon},\tau))^p \xi(\tau)\,d\tau\right\}^{1/p}} \ge \frac{1}{\widehat{\Xi}_{\sigma+\varepsilon,p,\alpha,w}(\xi,t)}.$$

Поскольку, как уже отмечалось, $q_{\sigma+\varepsilon}$ является элементом класса $L_2^\alpha(\mathbb{R})$, из последнего неравенства для $0 < t \le t_*$ получаем

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^t \left(\omega^w(\mathcal{D}^\alpha f,\tau)\right)^p \xi(\tau)\,d\tau\right\}^{1/p}} \ge \frac{1}{\widehat{\Xi}_{\sigma+\varepsilon,p,\alpha,w}(\xi,t)}. \tag{4.25}$$

Из формулы (4.24) следует, что при $\varepsilon \to 0+$ величина $\widehat{\Xi}_{\sigma+\varepsilon,p,\alpha,w}(\xi,t)$, как функция от ε, при фиксированных значениях остальных параметров монотонно убывает. При этом с учетом (4.21) имеем $\lim\left\{\widehat{\Xi}_{\sigma+\varepsilon,p,\alpha,w}(\xi,t) : \varepsilon \to 0+\right\} = \Xi_{\sigma,p,\alpha,w}(\xi,t)$. Следовательно, для произвольного сколь угодно малого значения $\delta > 0$ существует такое число $\widehat{\varepsilon} = \widehat{\varepsilon}(\delta) \in (0,\sigma_*)$, для которого выполняется неравенство $1/\widehat{\Xi}_{\sigma+\widehat{\varepsilon},p,\alpha,w}(\xi,t) > 1/\Xi_{\sigma,p,\alpha,w}(\xi,t) - \delta$. Из данного соотношения и определения верхней грани числового множества получаем

$$\sup\left\{\frac{1}{\widehat{\Xi}_{\sigma+\varepsilon,p,\alpha,w}(\xi,t)} : 0 < \varepsilon < \sigma_*\right\} = \frac{1}{\Xi_{\sigma,p,\alpha,w}(\xi,t)}. \tag{4.26}$$

Поскольку левая часть неравенства (4.25) не зависит от ε, то, вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon \in (0, \sigma_*)$ от его правой части, с учетом (4.26) имеем

$$\sup_{f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{ \displaystyle\int_0^t \big(\omega^w(\mathcal{D}^\alpha f, \tau)\big)^p \xi(\tau)\, d\tau \right\}^{1/p}} \geq \frac{1}{\Xi_{\sigma,p,\alpha,w}(\xi, t)}. \tag{4.27}$$

Требуемое соотношение (4.22) следует из неравенств (4.23) и (4.27), что и завершает доказательство теоремы 2.

***Замечание* 2.** Повторяя практически дословно доказательство теоремы 2, получаем двойное неравенство для элементов пространства $L_2(\mathbb{R})$:

$$\frac{1}{\widetilde{\Xi}_{\sigma,p,w}(\xi, t)} \leq \sup_{f \in L_2(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{ \displaystyle\int_0^t (\omega^w(f, \tau))^p \xi(\tau)\, d\tau \right\}^{1/p}} \leq \frac{1}{\inf\left\{ \widetilde{\Xi}_{u,p,w}(\xi, t) : \sigma \leq |u| < \infty \right\}}, \tag{4.28}$$

где $\widetilde{\Xi}_{\sigma,p,w}(\xi, t) := \Xi_{\sigma,p,0,w}(\xi, t)$. При этом верхняя грань в формуле (4.28) вычисляется по всем функциям f из $L_2(\mathbb{R})$, которые не эквивалентны нулю.

Конкретизируя w в соотношении (4.22), а именно, полагая $w = w_{\mathcal{M}_{2,\beta}}$, $\beta \in (0, \infty)$, получаем основной результат теоремы 1 из [32]:

$$\frac{1}{\gamma_{\sigma,\beta,\alpha,p}(\xi, t)} \leq \sup_{f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{ \displaystyle\int_0^t \omega_\beta^p(\mathcal{D}^\alpha f, \tau) \xi(\tau)\, d\tau \right\}^{1/p}} \leq \frac{1}{\inf\left\{ \gamma_{u,\beta,\alpha,p}(\xi, t) : \sigma \leq |u| < \infty \right\}}, \tag{4.29}$$

где $0 < t \leq \pi/\sigma$; $\sigma, \alpha \in (0, \infty)$; $0 < p \leq 2$;

$$\gamma_{u,\beta,\alpha,p}(\xi, t) := 2^{\beta/2} |u|^\alpha \left\{ \int_0^t (1 - \cos(u\tau))^{\beta p/2} \xi(\tau)\, d\tau \right\}^{1/p}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

В случае объединения соотношений (4.29), где $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta = m \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, и (4.28), в котором полагаем $w = w_{\mathcal{M}_{1,m}}$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, получаем результат, сформулированный в теореме 1 из [26].

Пусть теперь в формулах (4.22) и (4.28) $w = \widetilde{w}_m$, $m \in \mathbb{N}$; $0 < p \leq 2$; $\sigma \in (0, \infty)$; $0 < t \leq t_*/\sigma$, и в формуле (4.22) $\alpha = r \in \mathbb{N}$. Тогда объединение при указанных условиях этих двух соотношений приводит к одному из основных результатов теоремы 2 из [25]:

$$\frac{1}{\widehat{\gamma}_{\sigma,m,r,p}(\xi, t)} \leq \sup_{f \in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{ \displaystyle\int_0^t \widetilde{\Omega}_m^p(f^{(r)}, \tau) \xi(\tau)\, d\tau \right\}^{1/p}} \leq \frac{1}{\inf\left\{ \widehat{\gamma}_{u,m,r,p}(\xi, t) : \sigma \leq |u| < \infty \right\}},$$

где $r \in \mathbb{Z}_+$,

$$\widehat{\gamma}_{u,m,r,p}(\xi, t) := |u|^r \left\{ \int_0^t (1 - \operatorname{sinc}(u\tau))^{mp} \xi(\tau)\, d\tau \right\}^{1/p}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Следует особо отметить, что для модулей непрерывности $\omega_{\mathcal{M}}$, заданных формулой (2.17), соотношение вида (4.22) ранее было неизвестно, за исключением двух упомянутых выше частных случаев $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{1,m}$, $m \in \mathbb{N}$, и $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{2,\beta}$, $\beta \in (0, \infty)$.

5. Некоторые следствия из теоремы 2. Особый интерес, с точки зрения автора, представляет рассмотрение условий, при которых удается вычислить точные значения экстремальной характеристики, содержащейся в соотношении (4.22).

***5.1. Следствие* 1.** *Пусть* α, σ *принадлежат* $(0,\infty)$; *комплекснозначная функция* $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *такова, что* $|w|^2$ *принадлежит множеству* $\mathbb{G}$ *и удовлетворяет свойствам* *A*, *B*; $0 < p \leq 2$; $0 < t \leq \bar{t}/\sigma$, *где* $\bar{t} \in (0, t_*)$ — *значение аргумента функции* $|w|^2$, *определяемое согласно формуле* (4.6); ξ — *неотрицательная, суммируемая на отрезке* $[0, t]$ *функция, которая не эквивалентна нулю. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^t (\omega^w(\mathcal{D}^\alpha f,\tau))^p \xi(\tau)\,d\tau\right\}^{1/p}} = \frac{1}{\Xi_{\sigma,p,\alpha,w}(\xi,t)}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Для получения соотношения (5.1) достаточно показать выполнение равенства

$$\inf\left\{\Xi_{u,p,\alpha,w}(\xi,t) : \sigma \leq |u| < \infty\right\} = \Xi_{\sigma,p,\alpha,w}(\xi,t) \tag{5.2}$$

и затем воспользоваться теоремой 2. Пусть $0 < y \leq \bar{t}$; $x, z \in [1,\infty)$; $\nu, \mu \in (0,\infty)$ — произвольные числа. Поскольку функция $|w|^2 \in \mathbb{G}$ удовлетворяет свойствам *A* и *B*, то выполняется неравенство $x^{\nu/\mu}|w(zy)|^2 \geq |w(y)|^2$. Возводя обе его части в степень $\mu/2$, получаем

$$x^{\nu/2}|w(zy)|^\mu \geq |w(y)|^\mu. \tag{5.3}$$

Поскольку $|w|^2$ — четная функция, то очевидно, что $|w(x)| = |w(|x|)|$, $x \in \mathbb{R}$. Полагая в (5.3) $z = x = |u|/\sigma$, $\sigma \leq |u| < \infty$, и $y = \sigma\tau$, $0 < \tau \leq \bar{t}/\sigma$, имеем $|u|^{\nu/2}|w(u\tau)|^\mu \geq \sigma^{\nu/2}|w(\sigma\tau)|^\mu$. Отсюда при $\nu = 2\alpha p$ и $\mu = p$ следует неравенство

$$|u|^{\alpha p}|w(u\tau)|^p \geq \sigma^{\alpha p}|w(\sigma\tau)|^p. \tag{5.4}$$

Умножая обе части соотношения (5.4) на функцию $\xi(\tau)$, затем интегрируя обе части полученного таким образом неравенства по переменной τ в пределах от 0 до t, $0 < t \leq \bar{t}/\sigma$, и возводя в степень $1/p$, имеем

$$|u|^\alpha \left\{\int\limits_0^t |w(u\tau)|^p \xi(\tau)\,d\tau\right\}^{1/p} \geq \sigma^\alpha \left\{\int\limits_0^t |w(\sigma\tau)|^p \xi(\tau)\,d\tau\right\}^{1/p}$$

или, с учетом (4.21), получаем $\Xi_{u,p,\alpha,w}(\xi,t) \geq \Xi_{\sigma,p,\alpha,w}(\xi,t)$, где $\sigma \leq |u| < \infty$. Следовательно, равенство (5.2) справедливо и следствие 1 доказано.

***Замечание* 3.** Аналогичным образом можно показать, что имеет место равенство

$$\sup_{f\in L_2(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^t \big(\omega^w(f,\tau)\big)^p \xi(\tau)\,d\tau\right\}^{1/p}} = \frac{1}{\widetilde{\Xi}_{\sigma,p,w}(\xi,t)} \tag{5.5}$$

при выполнении условий следствия 1. При этом $\widetilde{\Xi}_{\sigma,p,w}(\xi,t)$ определено ранее в замечании 2, а верхняя грань вычисляется по всем функциям f из $L_2(\mathbb{R})$, которые не эквивалентны нулю.

5.1.1. Полагая, например, $w = \widetilde{w}_m$, $m \in \mathbb{N}$, из (5.1), (5.5) с учетом (1.6), (2.19) и (4.21) для $0 < t \leq \bar{t}/\sigma$, $\sigma \in (0, \infty)$, $p \in (0, 2]$ при $\alpha \in (0, \infty)$ имеем

$$\sup_{f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^\alpha \mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{ \int_0^t \widetilde{\Omega}_m^p(\mathcal{D}^\alpha f, \tau)\xi(\tau)\,d\tau \right\}^{1/p}} = \sup_{f \in L_2(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{ \int_0^t \widetilde{\Omega}_m^p(f, \tau)\xi(\tau)\,d\tau \right\}^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left\{ \int_0^t (1 - \operatorname{sinc}(\tau\sigma))^{mp} \xi(\tau)\,d\tau \right\}^{1/p}}. \tag{5.6}$$

В случае $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, и $\xi(\tau) \equiv \tau$ из (5.6) при $\alpha \in (0, \infty)$, $0 < t \leq \bar{t}$ получаем

$$\sup_{f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{\alpha - 2m} \mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{ \int_0^{t/\sigma} \widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^\alpha f, \tau)\tau d\tau \right\}^m} = \sup_{f \in L_2(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{ \sigma^2 \int_0^{t/\sigma} \widetilde{\Omega}_m^{1/m}(f, \tau)\tau d\tau \right\}^m} =$$

$$= \frac{2^m}{t^{2m}(1 - \operatorname{sinc}^2(t/2))^m}.$$

Если же $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, и $\xi(\tau) \equiv 1$, то из (5.6) имеем

$$\sup_{f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{\alpha - m} \mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{ \int_0^{t/\sigma} \widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^\alpha f, \tau)\,d\tau \right\}^m} = \sup_{f \in L_2(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{ \sigma \int_0^{t/\sigma} \widetilde{\Omega}_m^{1/m}(f, \tau)\,d\tau \right\}^m} = \frac{1}{(1 - \operatorname{Si}(t))^m}.$$

где $\operatorname{Si}(x) := \int_0^x \operatorname{sinc}(t)\,dt$ — интегральный синус, $\alpha \in (0, \infty)$, $0 < t \leq \bar{t}$.

5.2. ***Следствие 2.*** *Пусть* $\sigma \in (0, \infty)$; $\alpha \in [1/2, \infty)$; *комплекснозначная функция* $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *такова, что функция* $|w|^2$ *принадлежит множеству* $\mathbb{G}$, *дифференцируема почти всюду на* $\mathbb{R}$ *и удовлетворяет свойству A*; $t \in (0, t_*/\sigma]$; ξ — *неотрицательная, измеримая на отрезке* $[0, t]$ *функция, которая не эквивалентна нулю и дифференцируема почти всюду на интеграле* $(0, t)$. *Если для некоторого значения* $p \in [1/\alpha, 2]$ *почти всюду на* $[0, t]$ *выполнено неравенство*

$$(\alpha p - 1)\xi(\tau) - \tau\xi'(\tau) \geq 0, \tag{5.7}$$

то имеет место соотношение (5.1).

Доказательство. Пусть для некоторого $p \in [1/\alpha, 2]$ почти при всех τ из отрезка $[0, t]$ выполняется неравенство (5.7). Для получения соотношения (5.1) при выполнении сформулированных выше условий необходимо показать, что имеет место равенство (5.2), а затем воспользоваться соотношением (4.22). Для этого рассмотрим вспомогательную функцию $\lambda(u) := := \left(\Xi_{u,p,\alpha,w}(\xi, t)\right)^p$, где все параметры, кроме u, в том числе и переменную t полагаем произвольными, но фиксированными. В силу (4.21) функция λ является четной и неотрицательной на $\mathbb{R}$. Следовательно, достаточно рассмотреть ее поведение на полуоси $\mathbb{R}_+$ и показать, что λ — неубывающая функция. Поскольку $\lambda(u) = u^{\alpha p} \int_0^t \left|w(\tau u)\right|^p \xi(\tau)\,d\tau$, то

$$\lambda'(u) = \alpha p u^{\alpha p - 1} \int\limits_0^t \big|w(\tau u)\big|^p \xi(\tau)\, d\tau + u^{\alpha p} \int\limits_0^t \xi(\tau) \frac{\partial}{\partial u} \big|w(\tau u)\big|^p d\tau. \tag{5.8}$$

Полагая $z = \tau u$, почти всюду на $\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ имеем $\dfrac{\partial}{\partial u}|w(z)|^p = p|w(z)|^{p-1}\big(|w(z)|\big)'_z \tau$ и $\dfrac{\partial}{\partial \tau}|w(z)|^p = p|w(z)|^{p-1}\big(|w(z)|\big)'_z u$, т. е.

$$\frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial u}\big|w(\tau u)\big|^p = \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial \tau}\big|w(\tau u)\big|^p. \tag{5.9}$$

Равенство (5.8) с учетом (5.9) принимает вид

$$\lambda'(u) = u^{\alpha p - 1}\left\{ \alpha p \int\limits_0^t \big|w(\tau u)\big|^p \xi(\tau)\, d\tau + \int\limits_0^t \tau \xi(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau}\big|w(\tau u)\big|^p d\tau \right\}. \tag{5.10}$$

После интегрирования по частям второго интеграла в (5.10) получаем

$$\lambda'(u) = u^{\alpha p - 1}\left\{ t\xi(t)\big|w(tu)\big|^p + \int\limits_0^t \big(\alpha p \xi(\tau) - \xi(\tau) - \tau\xi'(\tau)\big)\big|w(\tau u)\big|^p d\tau \right\}. \tag{5.11}$$

Учитывая неравенство (5.7), из (5.11) имеем $\lambda'(u) \geq 0$, где $0 < u < \infty$, т. е. λ является неубывающей функцией на рассматриваемом множестве.

Следствие 2 доказано.

5.2.1. Полагая $w = w_{\mathcal{M}_{2,\beta}}$, $\beta \in (0, \infty)$, на основании (2.23), (2.17) и (1.4) имеем

$$\omega^{w_{\mathcal{M}_{2,\beta}}}(f, t) = \omega_{\mathcal{M}_{2,\beta}}(f, t) = \omega_\beta(f, t),$$

где $f \in L_2(\mathbb{R})$, $t \geq 0$. Отметим, что в данном случае $t_* = \pi$. Тогда из следствия 2 в силу (2.14), (4.21) и (5.1) при $0 < t \leq \pi/\sigma$ имеем

$$\sup_{f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^\alpha \mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^t \omega_\beta^p(\mathcal{D}^\alpha f, \tau)\xi(\tau)\, d\tau\right\}^{1/p}} = \frac{1}{2^{\beta/2}\left\{\displaystyle\int_0^t (1 - \cos(\sigma\tau))^{p\beta/2}\xi(\tau)\, d\tau\right\}^{1/p}}. \tag{5.12}$$

Если, например, в (5.12) $\beta = 2/p$, $p \in [1/\alpha, 2]$, $\alpha \in [1/2, \infty)$ и $\xi(\tau) \equiv 1$, то получаем

$$\sup_{f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{\alpha - 1/p} \mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^{t/\sigma} \omega_{2/p}^p(\mathcal{D}^\alpha f, \tau)\, d\tau\right\}^{1/p}} = \frac{1}{\big\{2t(1 - \operatorname{sinc}(t)\big\}^{1/p}}, \tag{5.13}$$

где $0 < t \leq \pi$. В случае $\alpha = r \in \mathbb{N}$ и $p = 2/m$, где $m \in \mathbb{N}$ и $1 \leq m \leq 2r$, из (5.13) имеем один из результатов следствия 2 из [26]:

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{r - 1/p} \mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^{t/\sigma} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \tau)\, d\tau\right\}^{m/2}} = \frac{1}{\big\{2t(1 - \operatorname{sinc}(t)\big\}^{m/2}}.$$

Здесь $0 < t \leq \pi$, а ω_m — обычный модуль непрерывности m-го порядка.

5.2.2. Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{M}_4$ и $w = w_{\mathcal{M}_4}$. Тогда согласно (2.7), (2.17), (2.23) и (1.10) для произвольного элемента $f \in L_2(\mathbb{R})$ получаем $\omega^{w_{\mathcal{M}_4}}(f,t) = \omega_{\mathcal{M}_4}(f,t) = \widehat{\omega}(f,t)$, где $\widehat{\omega}$ — модуль непрерывности, введенный в рассмотрение К. В. Руновским и Х.-Ю. Шмейссером в работе [37]. Используя в данном случае формулы (2.16) и (4.21), из следствия 2 имеем

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{\alpha+1}\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^t \widehat{\omega}^p(\mathcal{D}^\alpha f,\tau)\xi(\tau)\,d\tau\right\}^{1/p}} = \frac{\pi}{2\left\{\displaystyle\int_0^t \tau^p\,\xi(\tau)\,d\tau\right\}^{1/p}}, \tag{5.14}$$

где $0 < t \le \pi/\sigma$. Полагаем $\xi(\tau) := \tau^m$, $m \in [0,\infty)$. Тогда ограничение (5.7) принимает вид $(m+1)/\alpha \le p \le 2$, где $(m+1)/2 \le \alpha < \infty$. С учетом изложенного из соотношения (5.14) при $0 < t \le \pi/\sigma$ получаем

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{\alpha+1}\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^t \widehat{\omega}^p(\mathcal{D}^\alpha f,\tau)\tau^m\,d\tau\right\}^{1/p}} = \frac{\pi(p+m+1)^{1/p}}{2t^{1+(m+1)/p}}.$$

Рассмотрим далее функцию $\xi(\tau) := \sin(\tau)$. Поскольку при $0 < \tau \le \pi$ выполняется неравенство $\operatorname{sinc}(\tau) > \cos(\tau)$, то $(\alpha p - 1)\sin(\tau) - \tau\cos(\tau) = \dfrac{1}{\tau}\big\{(\alpha p-1)\operatorname{sinc}(\tau) - \cos(\tau)\big\} \ge$ $\ge \dfrac{1}{\tau}(\alpha p - 2)\operatorname{sinc}(\tau)$ и правая часть данного соотношения будет неотрицательной для любых $\tau \in (0,\pi]$, если $p \ge 2/\alpha$. Таким образом, в рамках следствия 2 условие (5.7) имеет место, если в данном конкретном случае $2/\alpha \le p \le 2$ и $\alpha \in [1,\infty)$. Тогда из (5.14) при $0 < t \le \pi/\sigma$ получаем

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{\alpha+1}\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^t \widehat{\omega}^p(\mathcal{D}^\alpha f,\tau)\sin(\tau)\,d\tau\right\}^{1/p}} = \frac{\pi}{2\left\{\displaystyle\int_0^t \tau^p\ \sin(\tau)\,d\tau\right\}^{1/p}}. \tag{5.15}$$

Полагая, например, в (5.15) $p = 1$, когда $\alpha \in [2,\infty)$, при $0 < t \le \pi/\sigma$ имеем

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{\alpha+1}\mathcal{A}_\sigma(f)}{\displaystyle\int_0^t \widehat{\omega}(\mathcal{D}^\alpha f,\tau)\sin(\tau)\,d\tau} = \frac{\pi}{2t\big(\operatorname{sinc}(t) - \cos(t)\big)}.$$

5.2.3. Пусть далее $\mathcal{M} = \mathcal{M}_3$ и $w = w_{\mathcal{M}_3}$. С учетом (2.7), (2.23) и (1.9) для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ получаем $\omega^{w_{\mathcal{M}_3}}(f,t) = \omega_{\mathcal{M}_3}(f,t) = \omega_{\langle\prime\rangle}(f,t)$, $t \ge 0$. Используя (4.21) и (2.15), из следствия 2 в рассматриваемом случае для $t \in (0,\pi/\sigma]$ имеем

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{\alpha+1}\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^t \omega_{\langle\prime\rangle}^p(\mathcal{D}^\alpha f,\tau)\ \xi(\tau)\,d\tau\right\}^{1/p}} = \frac{\pi}{3\left\{\displaystyle\int_0^t \tau^p(1-\sigma\tau/(2\pi))^p\ \xi(\tau)\,d\tau\right\}^{1/p}}. \tag{5.16}$$

Как уже отмечалось, если $\xi(\tau) := \tau^m$, $m \in [0,\infty)$, то условие (5.7) имеет место при $p \in [(m+1)/\alpha; 2]$, $\alpha \in [(m+1)/2;\infty)$ и в формуле (5.16) можно использовать данную степенную функцию. Если же $p = 1$, то в силу (5.7) при $\alpha \in [m+1;\infty)$ равенство (5.16) при $0 < t \le \pi$ принимает вид

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})}\frac{\sigma^{\alpha-m-1}\mathcal{A}_\sigma(f)}{\displaystyle\int_0^{t/\sigma}\omega_{\langle\prime\rangle}(\mathcal{D}^\alpha f,\tau)\tau^m d\tau}=\frac{\pi}{3t^{m+2}}\left\{\frac{1}{m+2}-\frac{t}{2\pi(m+3)}\right\}^{-1}.$$

5.2.4. Рассмотрим еще один случай, когда $w=\widetilde{w}_m$, $m\in\mathbb{N}$. Тогда для произвольной функции $f\in L_2(\mathbb{R})$ имеем $\omega^{\widetilde{w}_m}(f,t)=\widetilde{\Omega}_m(f,t)$, $t>0$. Используя соотношение (4.21) и следствие 2, для $0<t\le t_*/\sigma$ получаем равенство (5.6), в котором $\sigma\in(0,\infty)$, $\alpha\in[1/2,\infty)$, а $p\in[1/\alpha,2]$ — такое число, для которого выполняется условие (5.7) при почти всех $\tau\in[0,t]$. Напомним, что в данном случае t_* — наименьший положительный корень уравнения $\mathrm{tg}(x)=x$, $4{,}49<t_*<4{,}51$ [25].

5.3. Полагаем $\xi:=\widetilde{\xi}$, где $\widetilde{\xi}(\tau)=\eta(\sigma\tau)$, $\sigma\in(0,\infty)$, $\tau\in(0,y/\sigma]$, $y\in(0,t_*]$. С учетом этого, обозначая $t=y/\sigma$, формулу (4.21) записываем в виде

$$\Xi_{u,p,\alpha,w}\left(\widetilde{\xi},\frac{y}{\sigma}\right)=|u|^\alpha\left\{\int\limits_0^{y/\sigma}\big|w(\tau u)\big|^p\eta(\sigma\tau)\,d\tau\right\}^{1/p}=$$

$$=\sigma^{\alpha-1/p}\left\{\frac{|u|^{\alpha p}}{\sigma}\int\limits_0^y\left|w\left(\frac{|u|}{\sigma}\tau\right)\right|^p\eta(\tau)\,d\tau\right\}^{1/p},\quad \sigma\le|u|<\infty. \tag{5.17}$$

Пусть $z=|u|/\sigma$, т. е. $1\le z<\infty$. Тогда из (5.17) получаем

$$\inf_{\sigma\le|u|<\infty}\Xi_{u,p,\alpha,w}\left(\widetilde{\xi},\frac{y}{\sigma}\right)\ge\sigma^{\alpha-1/p}\inf_{1\le z<\infty}\left\{z^{\alpha p}\int\limits_0^y|w(z\tau)|^p\eta(\tau)\,d\tau\right\}^{1/p}. \tag{5.18}$$

Обозначим

$$\overline{\Xi}_{p,\alpha,w}(\eta;y,z):=z^{\alpha p}\int\limits_0^y\big|w(z\tau)\big|^p\eta(\tau)\,d\tau. \tag{5.19}$$

Тогда из теоремы 2 и (5.17)–(5.19) получаем следующее утверждение.

Следствие **3.** *Пусть $\alpha,\sigma\in(0,\infty)$; $0<p\le2$, комплекснозначная функция $w:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ такова, что $|w|^2\in\mathbb{G}$ и $|w|^2$ удовлетворяет свойству A; $y\in[0,t_*]$, где число t_* определяется согласно* (4.1) *для функции $\varphi:=|w|^2$; η — измеримая, суммируемая на отрезке $[0,y]$ функция, которая неотрицательна и неэквивалентна нулю. Тогда выполняется двойное неравенство*

$$\frac{1}{\big\{\Xi_{p,\alpha,w}(\eta;y,1)\big\}^{1/p}}\le\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})}\frac{\sigma^\alpha\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^y(\omega^w(\mathcal{D}^\alpha f,\tau/\sigma))^p\eta(\tau)\,d\tau\right\}^{1/p}}\le$$

$$\le\frac{1}{\left\{\inf\limits_{1\le z<\infty}\overline{\Xi}_{p,\alpha,w}(\eta;y,z)\right\}^{1/p}}. \tag{5.20}$$

Если же функция η такова, что

$$\inf_{1\le z<\infty} \Xi_{p,\alpha,w}(\eta; y, z) = \Xi_{p,\alpha,w}(\eta; y, 1), \tag{5.21}$$

то справедливо равенство

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^\alpha \mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^y \left(\omega^w(\mathcal{D}^\alpha f, \tau/\sigma)\right)^p \eta(\tau)\,d\tau\right\}^{1/p}} = \frac{1}{\left\{\Xi_{p,\alpha,w}(\eta; y, 1)\right\}^{1/p}}. \tag{5.22}$$

Отметим, что в конкретном случае $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{2,\beta}$, $\beta \in (0,\infty)$, и $w = w_{\mathcal{M}_{2,\beta}}$ для характеристики гладкости функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ вида $\omega^{w_{\mathcal{M}_{2,\beta}}}(f,t) = \omega_{\mathcal{M}_{2,\beta}}(f,t) = \omega_\beta(f,t)$, $t \ge 0$, данное следствие было получено в работе [32].

5.4. В следующем утверждении устанавливаются условия на функцию η, при которых имеет место равенство (5.21).

***Следствие* 4.** *Пусть* $\alpha, \sigma \in (0,\infty)$; $0 < p \le 2$, $y \in [0, t_*]$; *комплекснозначная функция* $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *такова, что* $|w|^2 \in \mathbb{G}$ *и* $|w|^2$ *удовлетворяет свойству A*; $\widehat{\eta}(\tau) := \tau^{\alpha p-1}\widetilde{\eta}(\tau)$, *где* $\widetilde{\eta}$ — *измеримая, невозрастающая, суммируемая на множестве* $(0, y]$ *функция, которая является неотрицательной и неэквивалентной нулю. Тогда для* $\eta = \widehat{\eta}$ *справедливо равенство* (5.21) *и выполняется соотношение*

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^\alpha \mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^y \left(\omega^w(\mathcal{D}^\alpha f, \tau/\sigma)\right)^p \tau^{\alpha p-1}\widetilde{\eta}(\tau)\,d\tau\right\}^{1/p}} = \frac{1}{\{\Xi_{p,\alpha,w}(\widehat{\eta}; y, 1)\}^{1/p}}. \tag{5.23}$$

Доказательство. Рассматривая y как произвольное, но фиксированное число из множества $(0, t_*]$, доопределим функцию $\widetilde{\eta}$ следующим образом: $\widetilde{\eta}_y(\tau) := \{\widetilde{\eta}(\tau), \text{если}\, 0 < \tau \le y;\ \widetilde{\eta}(y), \text{если}\, y \le \tau < \infty\}$. Поскольку $\widetilde{\eta}$ является невозрастающей и неотрицательной функцией на множестве $(0, y]$, для произвольного значения $z \in [1,\infty)$ при $0 < \tau < zy$ имеем $\widetilde{\eta}(\tau/z) \ge \ge \widetilde{\eta}_y(\tau)$. Тогда, используя формулу (5.19), где $\eta = \widehat{\eta}$, получаем

$$\Xi_{p,\alpha,w}(\widehat{\eta}; y, z) = z^{\alpha p}\int_0^y |w(z\tau)|^p \tau^{\alpha p-1}\widetilde{\eta}(\tau)\,d\tau = \int_0^{zy} |w(\tau)|^p \tau^{\alpha p-1}\widetilde{\eta}(\tau/z)\,d\tau \ge$$

$$\ge \int_0^{zy} |w(\tau)|^p \tau^{\alpha p-1}\widetilde{\eta}_y(\tau)\,d\tau \ge \int_0^{y} |w(\tau)|^p \tau^{\alpha p-1}\widetilde{\eta}(\tau)\,d\tau = \Xi_{p,\alpha,w}(\widehat{\eta}; y, 1),$$

где $1 \le z < \infty$. Следовательно, для $\eta = \widehat{\eta}$ равенство (5.21) имеет место, а значит, справедливо и соотношение (5.22), которое в рассматриваемом случае принимает вид (5.23).

Следствие 4 доказано.

При конкретизациях следствия 4, когда $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{2,\beta}$, $\beta \in (0,\infty)$, $w = w_{\mathcal{M}_{2,\beta}}$, $\omega^{w_{\mathcal{M}_{2,\beta}}}(f,t) = = \omega_{\mathcal{M}_{2,\beta}}(f,t) = \omega_\beta(f,t)$, $t \ge 0$, и $w = \widetilde{w}_m$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega^{\widetilde{w}_m}(f,t) = \widetilde{\Omega}_m(f,t)$, $t \ge 0$, получаем результаты, приведенные в работах [32] и [25] соответственно.

5.4.1. Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{M}_4$ и $w = w_{\mathcal{M}_4}$. Тогда для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ имеем характеристику гладкости $\omega^{w_{\mathcal{M}_4}}(f,t) = \omega_{\mathcal{M}_4}(f,t) = \widehat{\omega}(f,t)$, $t \ge 0$, рассмотренную в [37]. Полагаем $\widetilde{\eta}(\tau) := \tau^{-\gamma}$, $0 < \tau \le y$. При этом считаем, что $\gamma \in (0,1)$, $\alpha \in (\gamma/2,\infty)$, $p \in (\gamma/\alpha, 2]$. Используя соотношения (2.16) и (5.20), из (5.23) имеем

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})}\frac{\sigma^\alpha\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^y\widehat{\omega}^p(\mathcal{D}^\alpha f,\tau/\sigma)\tau^{\alpha p-1-\gamma}\,d\tau\right\}^{1/p}}=\frac{\pi(p(1+\alpha)-\gamma)^{1/p}}{2y^{1+\alpha-\gamma/p}},\quad 0<y\le\pi.$$

5.4.2. Пусть теперь $\mathcal{M}=\mathcal{M}_3$ и $w=w_{\mathcal{M}_3}$. В этом случае для $f\in L_2(\mathbb{R})$ получаем характеристику гладкости $\omega^{w_{\mathcal{M}_3}}(f,t)=\omega_{\mathcal{M}_3}(f,t)=\omega_{\langle\prime\rangle}(f,t),\ t\ge 0$, исследовавшуюся в работе [31]. Используя функцию $\widetilde{\eta}(\tau)$, при указанных выше ограничениях на γ,α,p для $0<$ $<y\le\pi$ в силу (2.15) и (5.19) из (5.23) имеем

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})}\frac{\sigma^\alpha\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^y\omega_{\langle\prime\rangle}^p(\mathcal{D}^\alpha f,\tau/\sigma)\tau^{\alpha p-1-\gamma}\,d\tau\right\}^{1/p}}=$$

$$=\frac{\pi}{3}\left\{\int\limits_0^y\left(1-\frac{\tau}{2\pi}\right)^p\ \tau^{(1+\alpha)p-1-\gamma}\,d\tau\right\}^{-1/p}. \tag{5.24}$$

При $p=2$ и $0<y\le\pi$ из (5.24) получаем

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})}\frac{\sigma^\alpha\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\displaystyle\int_0^y\omega_{\langle\prime\rangle}^2(\mathcal{D}^\alpha f,\tau/\sigma)\tau^{2\alpha-1-\gamma}\,d\tau\right\}^{1/2}}=$$

$$=\frac{\pi}{3}y^{\gamma-2(\alpha+1)}\left\{\frac{1}{2(\alpha+1)-\gamma}-\frac{y}{\pi(2(\alpha+1)-\gamma+1)}+\frac{y^2}{4\pi^2(2(\alpha+1)-\gamma+2)}\right\}^{-1/2}.$$

Пусть теперь $\alpha\in(\gamma,\infty)$, где $\gamma\in(0,1)$. Полагая $p=1$, при $0<y\le\pi$ из (5.24) имеем

$$\sup_{f\in L_2^\alpha(\mathbb{R})}\frac{\sigma^\alpha\mathcal{A}_\sigma(f)}{\displaystyle\int_0^y\omega_{\langle\prime\rangle}(\mathcal{D}^\alpha f,\tau/\sigma)\tau^{\alpha-1-\gamma}\,d\tau}=\frac{\pi}{3}y^{\gamma-\alpha-1}\left\{\frac{1}{\alpha-\gamma+1}-\frac{y}{2\pi(\alpha-\gamma+2)}\right\}^{-1}.$$

Во второй части данной статьи будут рассмотрены экстремальные задачи, связанные с характеристикой гладкости (2.25), а также вычислены точные значения средних ν-поперечников классов функций, определенных с помощью ω^w и Λ^w.

Литература

1. *Бернштейн С. Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени (1912) // Собр. соч. – М.: АН СССР, 1952. – Т. 2. – С. 371 – 375.
2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 324 с.
3. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
4. *Тиман М. Ф.* Приближение функций, заданных на всей вещественной оси, целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика. – 1968. – № 2. – С. 89 – 101.
5. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
6. *Ибрагимов И. И., Насибов Ф. Г.* Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени // Докл. АН СССР. – 1970. – **194**, № 5. – С. 1013 – 1016.
7. *Насибов Ф. Г.* О приближении в L_2 целыми функциями // Докл. АН АзССР. – 1986. – **42**, № 4. – С. 3 – 6.
8. *Попов В. Ю.* О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 6. – С. 65 – 73.

9. *Пономаренко В. Г.* Интегралы Фурье и наилучшее приближение целыми функциями // Изв. вузов. Математика. – 1966. – № 3. – С. 109 – 123.
10. *Гаймназаров Г.* О модулях гладкости дробного порядка функций, заданных на всей вещественной оси // Докл. АН ТаджССР. – 1981. – **24**, № 3. – С. 148 – 150.
11. *Гаймназаров Г.* Некоторые соотношения для модулей гладкости дробного порядка в пространстве $L_p(-\infty,\infty)$ // Изв. АН ТаджССР. – 1985. – № 3. – С. 8 – 13.
12. *Stepanets A. I.* Classes of functions defined on the real line and their approximation by entire functions. I // Ukr. Math. J. – 1990. – **42**, № 1. – P. 93 – 102.
13. *Stepanets A. I.* Classes of functions defined on the real axis and their approximations by entire functions. II // Ukr. Math. J. – 1990. – **42**, № 2. – P. 186 – 197.
14. *Ligun A. A., Doronin V. G.* Exact constants in Jackson-type inequalities for L_2-approximation on an axis // Ukr. Math. J. – 2009. – **61**, № 1. – P. 112 – 120.
15. *Arestov V. V.* On Jackson inequalities for approximation in L^2 of periodic functions by trigonometric polynomials and of functions on the line by entire functions // Approxim. Theory (A volume dedicated to Borislaw Bojanov). – Sofia: Marin Drinov Acad. Publ. House, 2004. – P. 1 – 19.
16. *Бабенко А. Г.* Точное неравенство Джексона – Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 1998. – № 5. – С. 1 – 17.
17. *Васильев С. Н.* Неравенство Джексона в $L_2(\mathbb{R}^N)$ с обобщенным модулем непрерывности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2010. – **16**, № 4. – С. 93 – 99.
18. *Vakarchuk S. B.* Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2-approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes // East J. Approxim. – 2004. – **10**, № 1-2. – P. 27 – 39.
19. *Vakarchuk S. B., Doronin V. G.* Best mean-square approximations by entire functions of finite degree on a straight line and exact values of mean widths of functional classes // Ukr. Math. J. – 2011. – **62**, № 8. – P. 1199 – 1212.
20. *Vakarchuk S. B.* Best mean-square approximation of functions defined on the real axis by entire functions of exponential type // Ukr. Math. J. – 2012. – **64**, № 5. – P. 680 – 692.
21. *Vakarchuk S. B.* On some extremal problems of approximation theory of functions on the real axis. I // J. Math. Sci. – 2013. – **188**, № 2. – P. 146 – 166.
22. *Vakarchuk S. B.* On some extremal problems of approximation theory of functions on the real axis. II // J. Math. Sci. – 2013. – **190**, № 4. – P. 613 – 630.
23. *Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А.* О точных значениях средних ν-поперечников некоторых классов целых функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – **18**, № 4. – С. 315 – 327.
24. *Юсупов Г. А.* О наилучших среднеквадратических приближениях на всей оси целыми функциями экспоненциального типа // Докл. АН Республики Таджикистан. – 2013. – **56**, № 3. – С. 192 – 195.
25. *Vakarchuk S. B.* Jackson-type inequalities for the special moduli of continuity on the entire real axis and the exact values of mean ν-widths for the classes of functions in the space $L_2(\mathbb{R})$ // Ukr. Math. J. – 2014. – **66**, № 6. – P. 827 – 856.
26. *Vakarchuk S. B.* Best mean-square approximations by entire functions of exponential type and mean ν-widths of classes of functions on the line // Math. Notes. – 2014. – **96**, № 6. – P. 878 – 896.
27. *Vakarchuk S. B., Shabozov M. Sh., Langarshoev M. R.* On the best mean square approximations by entire functions of exponential type in $L_2(\mathbb{R})$ and mean ν-widths of some functional classes // Russian Math. – 2014. – **58**, № 7. – P. 25 – 41.
28. *Yanchenko S. Ya.* Approximations of classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of functions of many variables by entire functions in the space $L_q(\mathbb{R}^d)$ // Ukr. Math. J. – 2010. – **62**, № 1. – P. 136 – 150.
29. *Vakarchuk S. B.* Mean-square approximation of function classes, given on the all real axis $\mathbb{R}$ by the entire functions of exponential type // Int. J. Adv. Math. – 2016. – **6**. – P. 1 – 12.
30. *Vakarchuk S. B.* Exact constants in Jackson-type inequalities for the best mean square approximation in $L_2(\mathbb{R})$ and exact values of mean ν-widths of the classes of functions // J. Math. Sci. – 2017. – **224**, № 4. – P. 582 – 603.
31. *Artamonov S. Yu.* Nonperiodic modulus of smoothness corresponding to the Riesz derivative // Math. Notes. – 2016. – **99**, № 6. – P. 928 – 931.
32. *Vakarchuk S. B.* On the moduli of continuity and fractional-order derivatives in the problems of best mean-square approximations by entire functions of the exponential type on the entire real axis // Ukr. Math. J. – 2017. – **69**, № 5. – P. 599 – 623.

33. *Vakarchuk S. B.* Jackson-type inequalities with generalized modulus of continuity and exact values of the n-widths for the classes of (ψ, β)-differentiable functions in L_2. I // Ukr. Math. J. – 2016. – **68**, № 6. – P. 823 – 848.
34. *Vakarchuk S. B.* Jackson-type inequalities with generalized modulus of continuity and exact values of the n-widths for the classes of (ψ, β)-differentiable functions in L_2. II // Ukr. Math. J. – 2017. – **68**, № 8. – P. 1165 – 1183.
35. *Vakarchuk S. B.* Jackson-type inequalities with generalized modulus of continuity and exact values of the n-widths for the classes of (ψ, β)-differentiable functions in L_2. III // Ukr. Math. J. – 2017. – **68**, № 10. – P. 1495 – 1518.
36. *Ditzian Z., Totik V.* Moduli of smoothness. – New York: Springer-Verlag, 1987. – 228 p.
37. *Runovski K., Schmeisser H.-J.* On modulus of continuity related to Riesz derivative. – Jena, 2011. – (Preprint / Friedrich-Schiller-Univ. Jena).
38. *Boman J., Shapiro H. S.* Comparison theorems for a generalized modulus of continuity // Ark. Mat. – 1971. – **9**, № 1. – P. 91 – 116.
39. *Boman J.* Equivalence of generalized moduli of continuity // Ark. Mat. – 1980. – **18**, № 1. – P. 73 – 100.
40. *Васильев С. Н.* Точное неравенство Джексона – Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. АН. – 2002. – **385**, № 1. – С. 11 – 14.
41. *Васильев С. Н.* Поперечники некоторых классов функций в пространстве L_2 на периоде // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2013. – **19**, № 4. – С. 42 – 47.
42. *Kozko A. I., Rozhdestvenskii A. V.* On Jackson's inequality for generalized moduli of continuity // Math. Notes. – 2003. – **73**, № 5. – P. 736 – 741.
43. *Горбачев Д. В.* Оценка оптимального аргумента в точном многомерном L_2-неравенстве Джексона – Стечкина // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2014. – **20**, № 1. – С. 83 – 91.
44. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев С. И.* Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 798 с.
45. *Butzer P. L., Dyckhoff H., Gorlich E., Stens R. L.* Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipschitz classes // Canad. J. Math. – 1977. – **l29**, № 4. – P. 781 – 793.
46. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приближения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
47. *Butzer P. L., Westphal U.* An introduction to fractional calculus // Appl. Fractional Calculus in Physics. – Singapore: World Sci. Publ., 2000. – P. 1 – 85.
48. *Хургин Я. И., Яковлев В. П.* Финитные функции в физике и технике. – М.: Наука, 1971. – 408 с.
49. *Ахиезер Н. И.* Лекции об интегральных преобразованиях. – Харьков: Вища шк., 1984. – 120 с.

Получено 22.03.18