УДК 517.51

С. Я. Янченко (Ін-т математики НАН України, Київ),
О. Я. Радченко (Терноп. нац. пед. ун-т ім. В. Гнатюка)

АПРОКСИМАТИВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КЛАСІВ ФУНКЦІЙ НІКОЛЬСЬКОГО – БЄСОВА $S^{r}_{1,\theta}B\left(\mathbb{R}^d\right)$ *

We establish the exact-order estimates for the approximation of the classes $S^{r}_{1,\theta}B\left(\mathbb{R}^d\right)$ by entire functions of exponential type with supports of their Fourier transforms lying in a step hyperbolic cross. The error of approximation is estimated in the metric of the Lebesgue space $L_q\left(\mathbb{R}^d\right)$, $1 < q \leq \infty$.

Одержано точні за порядком оцінки наближення класів функцій $S^{r}_{1,\theta}B\left(\mathbb{R}^d\right)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті. Похибку наближення оцінено в метриці простору Лебега $L_q\left(\mathbb{R}^d\right)$, $1 < q \leq \infty$.

У даній роботі продовжено (див. [1 – 5]) вивчення апроксимативних характеристик класів функцій Нікольського – Бєсова $S^{r}_{p,\theta}B\left(\mathbb{R}^d\right)$ [6, 7] у просторі $L_q\left(\mathbb{R}^d\right)$. Встановлено точні за порядком оцінки наближення функцій із згаданих класів цілими функціями, зі спектром, зосередженим на множині, яка називається східчастим гіперболічним хрестом. Основну увагу приділено випадку $p = 1$.

1. Означення класів функцій та апроксимативних характеристик. Нехай $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ і $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_dy_d$. Нехай $L_q\left(\mathbb{R}^d\right)$, $1 \leq q \leq \infty$, — простір вимірних на $\mathbb{R}^d$ функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_q := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|^q d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \leq q < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|.$$

Для функції $f(\boldsymbol{x}) \in L_q\left(\mathbb{R}^d\right)$ визначимо різницю 1-го порядку з кроком h за змінною x_j таким чином:

$$\Delta_{h,j} f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_d) - f(\boldsymbol{x})$$

і, відповідно, l-го порядку, $l \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^{l}_{h,j} f(\boldsymbol{x}) = \overbrace{\Delta_{h,j} \ldots \Delta_{h,j}}^{l} f(\boldsymbol{x}).$$

Нехай задано вектори $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_d)$, $h_j \in \mathbb{R}$, і $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1, d}$. Тоді мішана різниця $\boldsymbol{k}$-го порядку з векторним кроком $\boldsymbol{h}$ визначається рівністю

$$\Delta^{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = \Delta^{k_1}_{h_1,1} \Delta^{k_2}_{h_2,2} \ldots \Delta^{k_d}_{h_d,d} f(\boldsymbol{x}).$$

* Частково підтримано грантом НАН України дослідницьким лабораторіям/групам молодих учених НАН України для проведення досліджень за пріоритетними напрямами розвитку науки і техніки (проекти № 16 – 10/2018 і № 04 – 02/2019).

Крім цього, покладемо $e_d = \{1, 2, \ldots, d\}$, $d \in \mathbb{N}$, і $e = \{j_1, \ldots, j_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \le d$, $1 \le j_1 < < j_2 < \ldots < j_m \le d$. Задамо вектори $\boldsymbol{r}^e = (r_{j_1}, \ldots, r_{j_m})$, $r_j \ge 0$, $j = \overline{1, d}$, і $\bar{\boldsymbol{r}}^e = (\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_d)$, де

$$\bar{r}_i = \begin{cases} r_i, & i \in e, \\ 0, & i \in e_d \backslash e. \end{cases}$$

Нерівності типу $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$) для векторів $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ і $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_d)$ будемо розуміти покоординатно, тобто $a_j \le b_j$ $(a_j > b_j)$, $j = \overline{1, d}$. Також будемо використовувати записи $\boldsymbol{t} \ge 0$, якщо $t_j \ge 0$, $j = \overline{1, d}$, і $\boldsymbol{a} \ne \boldsymbol{b}$, якщо $a_i \ne b_i$ хоча б для одного i, $i = \overline{1, d}$.

Простори $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B\left(\mathbb{R}^d\right)$, $1 \le p, \theta \le \infty$, де $\boldsymbol{r}$ — заданий вектор із невід'ємними координатами, означуються таким чином [7]:

1) якщо $1 \le \theta < \infty$, то

$$S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B\left(\mathbb{R}^d\right) = \left\{ f \in L_p\left(\mathbb{R}^d\right) : \|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B\left(\mathbb{R}^d\right)} < \infty \right\},$$

де норма задається рівністю

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B\left(\mathbb{R}^d\right)} = \|f\|_p + \sum_{\substack{e \subset e_d \\ e \ne \varnothing}} \left(\int\limits_0^2 \ldots \int\limits_0^2 \prod_{j \in e} h_j^{-\theta r_j - 1} \left\| \Delta^{\boldsymbol{k}^e}_{\boldsymbol{h}^e} f(\cdot) \right\|_p^\theta \prod_{j \in e} dh_j \right)^{\frac{1}{\theta}};$$

2) якщо $\theta = \infty$, то

$$S^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty} B\left(\mathbb{R}^d\right) = \left\{ f \in L_p\left(\mathbb{R}^d\right) : \|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty} B\left(\mathbb{R}^d\right)} < \infty \right\}$$

і

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty} B(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_p + \sum_{\substack{e \subset e_d \\ e \ne \varnothing}} \sup_{\boldsymbol{h} > 0} \prod_{j \in e} h_j^{-r_j} \left\| \Delta^{\boldsymbol{k}^e}_{\boldsymbol{h}^e} f(\cdot) \right\|_p,$$

де $k_j > r_j \ge 0$, $j = \overline{1, d}$. Зазначимо, що простори функцій $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B\left(\mathbb{R}^d\right)$ при значенні параметра $\theta = \infty$ збігаються з просторами $S^{\boldsymbol{r}}_p H\left(\mathbb{R}^d\right)$, які вперше розглянув С. М. Нікольський [6], а при $1 \le \theta < \infty$ вони були введені Т. І. Амановим [7].

Далі, замість $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B\left(\mathbb{R}^d\right)$ і $S^{\boldsymbol{r}}_p H\left(\mathbb{R}^d\right)$ часто будемо використовувати позначення $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B$ і $S^{\boldsymbol{r}}_p H$ відповідно.

У подальшому будемо вважати, що координати вектора $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$ впорядковано таким чином: $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_d$. Вектору $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$ поставимо у відповідність вектор $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, $\gamma_j = r_j / r_1$, $j = \overline{1, d}$, а вектору $\boldsymbol{\gamma}$, в свою чергу, — вектор $\boldsymbol{\gamma}'$, де $\gamma'_j = \gamma_j$ при $j = \overline{1, \nu}$ і $1 < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu + 1, d}$.

Також дамо означення просторів Нікольського – Бєсова функцій мішаної гладкості $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B\left(\mathbb{R}^d\right)$ опосередковано через так зване декомпозиційне зображення елементів цих просторів. Уперше декомпозиційне зображення та відповідне йому нормування з'явилося у роботі С. М. Нікольського та П. І. Лізоркіна [8] і, як з'ясувалося пізніше, відіграло ключову роль у дослідженнях, які пов'язані з апроксимацією класів функцій. Це зображення істотно використовується при доведенні одержаних результатів і базується на понятті перетворення Фур'є, яке можна означити, використавши узагальнені функції (див., наприклад, [9], [10] (гл. 2), [11] (гл. 11)). Наведемо спочатку необхідні означення і позначення.

Нехай $S = S\left(\mathbb{R}^d\right)$ — простір Шварца основних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^d$ комплекснозначних функцій φ, які спадають на нескінченності разом зі своїми похідними швидше за будь-який степінь функції $\left(x_1^2 + \ldots + x_d^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, що розглядається з відповідною топологією. Через S' позначимо простір лінійних неперервних функціоналів над S. Зазначимо, що елементами простору S' є узагальнені функції. Якщо $f \in S'$, $\varphi \in S$, то $\langle f, \varphi\rangle$ позначає значення f на φ.

Через $\mathfrak{F}\varphi$ і $\mathfrak{F}^{-1}\varphi$ будемо позначати відповідно пряме й обернене перетворення Фур'є функцій із просторів S і S'.

Носієм неперервної на $\mathbb{R}^d$ функції φ називається замикання множини точок $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, де $\varphi(\boldsymbol{x}) \neq 0$, і позначається $\operatorname{supp}\varphi$.

Кажуть, що узагальнена функція f дорівнює нулю на відкритій множині G, якщо $\langle f, \varphi\rangle = 0$ для всіх $\varphi \in S$ і $\operatorname{supp}\varphi \subset G$. Об'єднання всіх околів, у яких f дорівнює нулю, є відкритою множиною, яку називають нульовою множиною узагальненої функції f і позначають G_f. Носієм узагальненої функції називають доповнення множини G_f до $\mathbb{R}^d$, тобто замкнену множину $\operatorname{supp} f = \bar{G}_f$.

Зазначимо, що для $1 \leq p \leq \infty$ існує природне неперервне вкладення $L_p\left(\mathbb{R}^d\right)$ в S' і в цьому сенсі функції з $L_p\left(\mathbb{R}^d\right)$ ототожнюються з елементами з S'.

Далі, нехай $K_m(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} k_m(\lambda) e^{-2\pi i\lambda t} d\lambda,\ m \in \mathbb{Z}_+,\ K_{-1} \equiv 0$, де

$$k_m(\lambda) = \begin{cases} 1, & |\lambda| < 2^{m-1}, \\ 2\left(1 - \dfrac{|\lambda|}{2^m}\right), & 2^{m-1} \leq |\lambda| \leq 2^m, \\ 0, & |\lambda| > 2^m, \end{cases} \qquad k_0(\lambda) = \begin{cases} 1 - |\lambda|, & 0 \leq |\lambda| \leq 1, \\ 0, & |\lambda| > 1. \end{cases}$$

Для кожного вектора $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d),\ s_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = \overline{1, d}$, покладемо

$$A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \left(K_{s_j}(x_j) - K_{s_j-1}(x_j)\right), \tag{1}$$

$$A^*_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) * A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{y}) A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}.$$

Зауважимо, що $A^*_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x})$ — „блоки" Валле Пуссена функції f. Також для $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d_+$ розглянемо множини

$$Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}} = \left\{\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \colon \eta(s_j) 2^{s_j-1} \leq |\lambda_j| < 2^{s_j}, \lambda_j \in \mathbb{R},\ j = \overline{1, d}\right\},$$

$$\rho_+(\boldsymbol{s}) := \left\{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \colon \eta(s_j) 2^{s_j-1} \leq k_j < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = \overline{1, d}\right\},$$

де $\eta(0) = 0$ і $\eta(t) = 1,\ t > 0$.

Справедливим є таке твердження.

Лема A (див., наприклад, [2]). *Нехай $1 \leq p \leq \infty$, тоді для будь-якої функції $f \in L_p\left(\mathbb{R}^d\right)$ маємо*

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{s} A^*_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x})$$

і, крім того, $\operatorname{supp} \mathfrak{F} A_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) \subseteq Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}$.

Зауважимо, що $A^*_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x})$ є аналогами „блоків” сум Валле Пуссена періодичних функцій багатьох змінних.

У прийнятих позначеннях простори $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B\left(\mathbb{R}^d\right)$, $1 \le p,\ \theta \le \infty,\ \boldsymbol{r} > 0$, можна означити таким чином (див., наприклад, [2, 12]):

$$S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B := \left\{ f \in L_p\left(\mathbb{R}^d\right) : \|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B} < \infty \right\},$$

де

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s} \ge 0} 2^{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r})\theta} \left\| A^*_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot) \right\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{2}$$

при $1 \le \theta < \infty$ і

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p} H} \asymp \sup_{\boldsymbol{s} \ge 0} 2^{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r})} \left\| A^*_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot) \right\|_p. \tag{3}$$

Тут і далі по тексту для додатних величин A і B використовуємо запис $A \asymp B$, який означає, що існують такі додатні сталі C_1 і C_2, які не залежать від одного істотного параметра у величинах A і B (наприклад, у співвідношеннях (2), (3) — від функції f), що $C_1 A \le B \le C_2 A$. Якщо тільки $B \le C_2 A$ $(B \ge C_1 A)$, то пишемо $B \ll A$ $(B \gg A)$. Всі сталі $C_i,\ i = 1, 2, \ldots,$ які зустрічаються у роботі, залежать, можливо, лише від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій оцінюється похибка наближення, і розмірності простору $\mathbb{R}^d$.

Окрім цього нагадаємо, що у випадку $1 < p < \infty$ норму функцій із просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B\left(\mathbb{R}^d\right)$ можна означити в дещо іншій формі.

Нехай $A \subset \mathbb{R}^d$ — деяка вимірна множина. Позначимо через χ_A характеристичну функцію множини A і для $f \in L_p\left(\mathbb{R}^d\right)$ покладемо

$$\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = \mathfrak{F}^{-1}(\chi_{Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}} \cdot \mathfrak{F} f).$$

Тоді простори $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\boldsymbol{r} > 0$, можна означити таким чином [8]:

$$S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B := \left\{ f \in L_p\left(\mathbb{R}^d\right) : \|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B} < \infty \right\},$$

де

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s} \ge 0} 2^{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r})\theta} \left\| \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot) \right\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{4}$$

при $1 \le \theta < \infty$ і

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p} H} \asymp \sup_{\boldsymbol{s} \ge 0} 2^{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r})} \left\| \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot) \right\|_p. \tag{5}$$

Під класом $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$ будемо розуміти множину функцій $f \in L_p\left(\mathbb{R}^d\right)$, для яких $\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B} \le 1$, і при цьому збережемо для класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$ ті ж самі позначення, що і для просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$.

Як видно з (2) – (5), для $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B,\ 1 < p < \infty$, має місце співвідношення

$$\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p \asymp \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p\,. \tag{6}$$

Перейдемо до означення апроксимативних характеристик, які розглядаються у роботі.

Для $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d_+$ означимо множину $Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n$ таким чином:

$$Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n = \bigcup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}) \le n} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}},$$

де $n \in \mathbb{N}$. Множина $Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n$ називається східчастим гіперболічним хрестом, і при цьому $\operatorname{mes} Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n \asymp \asymp 2^n n^{d-1}$ (див., наприклад, [8]), де $\operatorname{mes} Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n$ позначає лебегову міру множини $Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n$.

Позначимо

$$G\left(Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n\right) = \left\{ f \in L_q\left(\mathbb{R}^d\right) : \operatorname{supp} \mathfrak{F} f \subseteq Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n \right\}.$$

Відомо, що елементами множини $G\left(Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n\right)$ є цілі функції експоненціального типу (див., наприклад, [13] (гл. 3)).

Для $f \in L_q\left(\mathbb{R}^d\right),\ 1 \le q \le \infty$, означимо величину

$$E\left(f, G\left(Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n\right)\right)_q := E_{Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n}(f)_q := \inf_{g \in G(Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n)} \|f(\cdot) - g(\cdot)\|_q,$$

яка називається найкращим наближенням функції f цілими функціями з множини $G\left(Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n\right)$. Якщо $F \subset L_q\left(\mathbb{R}^d\right)$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$E_{Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n}(F)_q = \sup_{f \in F} E_{Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n}(f)_q. \tag{7}$$

Крім того, для $f \in L_q\left(\mathbb{R}^d\right),\ 1 \le q \le \infty$, покладемо

$$S_{Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n} f(\boldsymbol{x}) = S_{Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n}(f,\boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}) \le n} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$

і означимо

$$\mathcal{E}_{Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n}(f)_q = \left\| f(\cdot) - S_{Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n} f(\cdot) \right\|_q, \quad \mathcal{E}_{Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n}(F)_q = \sup_{f \in F} \mathcal{E}_{Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n}(f)_q. \tag{8}$$

Величини (7) і (8) будемо досліджувати у випадку, коли $F = S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Насамперед зазначимо, що при $1 < q < \infty$ і $f \in L_q\left(\mathbb{R}^d\right)$ має місце співвідношення (див., наприклад, [8])

$$E_{Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n}(f)_q \le \mathcal{E}_{Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n}(f)_q \le C_3 E_{Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n}(f)_q, \tag{9}$$

де $C_3 \ge 1$ — деяка стала.

2. Допоміжні твердження.

Теорема А [7]**.** *Нехай* $1 \le p,\ \theta \le \infty,\ 1 \le p \le q \le \infty$ *і вектор* $\boldsymbol{\rho}$ *такий, що* $\rho_j = r_j - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0,\ j = \overline{1,d}$*. Тоді якщо* $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B\left(\mathbb{R}^d\right)$, *то* $f \in S^{\boldsymbol{\rho}}_{q,\theta}B\left(\mathbb{R}^d\right)$ *і*

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol{\rho}}_{q,\theta}B\left(\mathbb{R}^d\right)} \ll \|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B\left(\mathbb{R}^d\right)}.$$

Теорема Б [13, с. 150]**.** *Якщо* $1 \le p \le q \le \infty$, *то для цілої функції експоненціального типу* $g_{\boldsymbol{\nu}} \in L_p\left(\mathbb{R}^d\right)$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_d)$, $\nu_j \ge 0,\ j = \overline{1,d}$, *має місце нерівність (різних метрик)*

$$\|g_{\boldsymbol{\nu}}\|_{L_q\left(\mathbb{R}^d\right)} \le 2^d \left(\prod_{j=1}^{d} \nu_j\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|g_{\boldsymbol{\nu}}\|_{L_p\left(\mathbb{R}^d\right)}.$$

Теорема В (Літтлвуда – Пелі) (див., наприклад, [13, с. 81])**.** *Нехай задано* $1 < p < \infty$*. Існують такі додатні числа* C_4, C_5, *що для кожної функції* $f \in L_p\left(\mathbb{R}^d\right)$ *виконуються співвідношення*

$$C_4\|f\|_p \le \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{s} \ge 0} |\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \le C_5\|f\|_p.$$

Лема Б [1]**.** *Нехай задано* $1 < p < q < \infty$ *і* $f \in L_q\left(\mathbb{R}^d\right)$*. Тоді*

$$\|f\|_q \ll \left(\sum_{\boldsymbol{s} \ge 0} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|^q_p \, 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) q} \right)^{\frac{1}{q}},$$

де $\|\boldsymbol{s}\|_1 = s_1 + \ldots + s_d,\ s_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = \overline{1,d}$*.*

Лема Б є аналогом леми, яка вперше була доведена для періодичного випадку В. М. Темляковим (див., наприклад, [14, с. 25]).

Лема В [14, с. 11]**.** *Має місце оцінка*

$$\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}) \ge n} 2^{-\alpha(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})} \asymp 2^{-\alpha n} n^{d-1}, \quad \alpha > 0.$$

Лема Г [14, с. 11]**.** *Має місце оцінка*

$$\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}') \ge n} 2^{-\alpha(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})} \asymp 2^{-\alpha n} n^{\nu-1}, \quad \alpha > 0.$$

3. Наближення функцій із класів $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B\left(\mathbb{R}^d\right)$ цілими функціями з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті. Перш ніж перейти до формулювання та доведення основних результатів, встановимо кілька допоміжних тверджень.

Лема 1. *Справедливою є оцінка*

$$\|A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\|_\infty \asymp 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1}, \tag{10}$$

де $\|\boldsymbol{s}\|_1 = s_1 + \ldots + s_d,\ s_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = \overline{1,d}$*.*

Доведення. Врахувавши, що $A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x})$ визначається згідно з формулою (1), і провівши деякі перетворення для $K_{s_j}(x_j)$, отримаємо

$$A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \frac{2^{2-s_j}\sin^2 \pi 2^{s_j-2}x_j \left(2\cos \pi 2^{s_j-1}x_j + 1\right)}{\pi^2 x_j^2} \times$$

$$\times \left(\cos \pi 2^{s_j-1}x_j + \cos \pi 2^{s_j}x_j - 1\right) = \prod_{j=1}^{d} \mathfrak{I}_j(x_j).$$

Тоді для норми $A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x})$ у просторі $L_\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ можемо записати

$$\|A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\|_\infty = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} \left|\prod_{j=1}^{d} \mathfrak{I}_j(x_j)\right| = \prod_{j=1}^{d} \sup_{x_j\in\mathbb{R}} |\mathfrak{I}_j(x_j)|. \tag{11}$$

Таким чином, для оцінки норми $A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x})$ достатньо належним чином оцінити величини $\sup_{x_j\in\mathbb{R}} |\mathfrak{I}_j(x_j)|$, $j = \overline{1,d}$.

Встановимо спочатку оцінку зверху. Покладаючи $\pi 2^{s_j-2}x_j = t_j$, отримуємо

$$\sup_{x_j\in\mathbb{R}} |\mathfrak{I}_j(x_j)| = \sup_{t_j\in\mathbb{R}} \left|\frac{2^{s_j-2}\sin^2 t_j(2\cos 2t_j + 1)(\cos 2t_j + \cos 4t_j - 1)}{t_j^2}\right| \ll$$

$$\ll 2^{s_j} \sup_{t_j\in\mathbb{R}} \left|9\,\frac{\sin^2 t_j}{t_j^2}\right| \ll 2^{s_j}.$$

Використовуючи цю оцінку, на підставі (11) одержуємо

$$\|A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\|_\infty \ll \prod_{j=1}^{d} 2^{s_j} = 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1}.$$

Для оцінки знизу маємо

$$\sup_{x_j\in\mathbb{R}} |\mathfrak{I}_j(x_j)| = \sup_{t_j\in\mathbb{R}} \left|\frac{2^{s_j-2}\sin^2 t_j(2\cos 2t_j + 1)(\cos 2t_j + \cos 4t_j - 1)}{t_j^2}\right| \gg$$

$$\gg 2^{s_j} \left|\frac{\sin^2 \dfrac{\pi}{12}\left(2\cos\dfrac{\pi}{6} + 1\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{3} - 1\right)}{\left(\dfrac{\pi}{12}\right)^2}\right| \gg 2^{s_j}. \tag{12}$$

Підставляючи (12) в (11), отримуємо

$$\|A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\|_\infty \gg \prod_{j=1}^{d} 2^{s_j} = 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1}.$$

Отже, оцінку (10) встановлено.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай* $1 \le p < \infty$ *і* $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}_+^d$, *тоді має місце оцінка*

$$\|A_{\boldsymbol{s}}^*(\cdot)\|_p \asymp 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}. \tag{13}$$

Доведення. Згідно з позначеннями леми 1 можемо записати

$$\|A_{\boldsymbol{s}}^*(\cdot)\|_p = \left\|\prod_{j=1}^d \Im_j(\cdot)\right\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left|\prod_{j=1}^d \Im_j(x_j)\right|^p d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^d |\Im_j(x_j)|^p\, d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\prod_{j=1}^d \int\limits_{\mathbb{R}} |\Im_j(x_j)|^p dx_j\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^d \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\frac{2^{2-s_j}\sin^2\pi 2^{s_j-2}x_j\left(2\cos\pi 2^{s_j-1}x_j+1\right)}{\pi^2 x_j^2}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\cos\pi 2^{s_j-1}x_j+\cos\pi 2^{s_j}x_j-1\right)\right|^p dx_j\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{14}$$

Оцінимо зверху інтеграл у співвідношенні (14). Покладаючи $\pi 2^{s_j-2}x_j = t_j$, отримуємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\frac{2^{2-s_j}\sin^2\pi 2^{s_j-2}x_j\left(2\cos\pi 2^{s_j-1}x_j+1\right)\left(\cos\pi 2^{s_j-1}x_j+\cos\pi 2^{s_j}x_j-1\right)}{\pi^2 x_j^2}\right|^p dx_j \le$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{R}}\left|\frac{2^{2-s_j}\sin^2\pi 2^{s_j-2}x_j}{\pi^2 x_j^2}\right|^p dx_j = \int\limits_{\mathbb{R}}\frac{2^{(s_j-2)(p-1)}}{\pi}\left|\frac{\sin^2 t_j}{t_j^2}\right|^p dt_j \ll$$

$$\ll 2^{s_j(p-1)}. \tag{15}$$

Підставляючи (15) у (14), маємо

$$\|A_{\boldsymbol{s}}^*(\cdot)\|_p \ll \left(\prod_{j=1}^d 2^{s_j(p-1)}\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}.$$

Тепер оцінимо знизу інтеграл у співвідношенні (14). Виконуючи заміну $\pi 2^{s_j-2}x_j = t_j$, отримуємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\frac{2^{2-s_j}\sin^2\pi 2^{s_j-2}x_j\left(2\cos\pi 2^{s_j-1}x_j+1\right)\left(\cos\pi 2^{s_j-1}x_j+\cos\pi 2^{s_j}x_j-1\right)}{\pi^2 x_j^2}\right|^p dx_j =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} 2^{(s_j-2)(p-1)}\left|\frac{\sin^2 t_j(2\cos 2t_j+1)(\cos 2t_j+\cos 4t_j-1)}{t_j^2}\right|^p dt_j \gg$$

$$\gg 2^{(s_j-2)(p-1)}\int\limits_{\frac{5\pi}{12}}^{\frac{7\pi}{12}}\left|\frac{\sin^2 t_j(2\cos 2t_j+1)(\cos 2t_j+\cos 4t_j-1)}{t_j^2}\right|^p dt_j = J_1.$$

Враховуючи, що підінтегральна функція неперервна на проміжку $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$ і досягає свого найменшого значення (яке позначимо через m_j), одержуємо

$$J_1 \gg 2^{s_j(p-1)}\int\limits_{\frac{5\pi}{12}}^{\frac{7\pi}{12}} m_j dt_j \asymp 2^{s_j(p-1)}. \tag{16}$$

Використовуючи (16), маємо

$$\|A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\|_p \gg \left(\prod_{j=1}^d 2^{s_j(p-1)}\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}.$$

Отже, оцінку (13) встановлено.

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Справедливою є оцінка*

$$\left\|\sum_{(\boldsymbol{s},1)=n+1} A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\right\|_\infty \asymp 2^n n^{d-1}. \tag{17}$$

Доведення. Оцінка зверху в (17) безпосередньо випливає з (10) і нерівності Мінковського. Дійсно,

$$\left\|\sum_{(\boldsymbol{s},1)=n+1} A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\right\|_\infty \ll \sum_{(\boldsymbol{s},1)=n+1}\|A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\|_\infty \ll \sum_{(\boldsymbol{s},1)=n+1} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1} \asymp 2^n n^{d-1}.$$

Для оцінки знизу маємо

$$\left\|\sum_{(\boldsymbol{s},1)=n+1} A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\right\|_\infty = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d}\left|\sum_{(\boldsymbol{s},1)=n+1} A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x})\right| =$$

$$= \sup_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d}\left|\sum_{(\boldsymbol{s},1)=n+1}\prod_{j=1}^d \frac{2^{s_j-2}\sin^2 t_j\left(2\cos 2t_j+1\right)\left(\cos 2t_j+\cos 4t_j-1\right)}{t_j^2}\right| \gg$$

$$\gg \sum_{(\boldsymbol{s},1)=n+1}\prod_{j=1}^d 2^{s_j}\left|\frac{\sin^2\frac{\pi}{12}\left(2\cos\frac{\pi}{6}+1\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}-1\right)}{\left(\frac{\pi}{12}\right)^2}\right| \gg$$

$$\gg \sum_{(\boldsymbol{s},1)=n+1} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1} \asymp 2^n n^{d-1}.$$

Оцінку (17) встановлено.

Лему 3 доведено.

Теорема 1. *Нехай* $r_1 > 1$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тоді має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{Q_n^\gamma}\left(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B\right)_\infty = \sup_{f\in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B}\left\|f(\cdot) - S_{Q_n^\gamma}(f,\cdot)\right\|_\infty \asymp 2^{-n(r_1-1)}n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{18}$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху у співвідношенні (18). Нехай $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B$. Оскільки $r_1 > 1$, то на підставі теореми А можемо стверджувати, що $f \in S^{\boldsymbol{\rho}}_{q_0,\theta}B$ при деякому $1 < q_0 < \infty$, де $\rho_j = r_j - \left(1 - \dfrac{1}{q_0}\right) > 0$, $j = \overline{1,d}$. Тоді, використовуючи нерівності Мінковського і різних метрик (теорема Б), а також співвідношення (6), можемо записати

$$\left\|f(\cdot) - S_{Q_n^\gamma}(f,\cdot)\right\|_\infty = \left\|f(\cdot) - \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\le n}\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\right\|_\infty \le \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n}\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_\infty \ll$$

$$\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{q_0}}\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{q_0} \asymp \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{q_0}}\|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{q_0} \ll$$

$$\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{q_0}} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{q_0}\right)}\|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_1 = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1}\|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_1. \tag{19}$$

Щоб продовжити оцінку (19), розглянемо спочатку випадок, коли $1 \le \theta < \infty$. Тоді, застосовуючи нерівність Гельдера з відповідною модифікацією при $\theta = \infty$, маємо

$$\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1}\|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_1 \le \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta}\|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_1^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}-1)\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll \|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B}\left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}-1)\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{1-\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-(\boldsymbol{s},\bar{\boldsymbol{\gamma}})(r_1-1)\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{1-\frac{1}{\theta}} = J_2, \tag{20}$$

де $\bar{\boldsymbol{\gamma}} = (\bar\gamma_1,\ldots,\bar\gamma_d)$ — вектор із координатами $\bar\gamma_j = (r_j-1)/(r_1-1)$, $j=\overline{1,d}$, а $\boldsymbol{r}-1$ позначає вектор із координатами $r_j - 1$, $j = \overline{1,d}$. Якщо $j = \overline{1,\nu}$, то $\bar\gamma_j = \gamma_j$, і $1 < \gamma_j \le \bar\gamma_j$, якщо $j = \overline{\nu+1,d}$. Тому, використовуючи лему В, отримуємо

$$J_2 \ll 2^{-n(r_1-1)}n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{21}$$

Отже, зіставляючи (19) – (21), одержуємо

$$\sup_{f\in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B}\|f(\cdot) - S_{Q_n^\gamma}(f,\cdot)\|_\infty \ll 2^{-n(r_1-1)}n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Нехай тепер $\theta = \infty$. Тоді згідно з означенням класів $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B$ маємо $\left\|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\right\|_p \ll 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}$, а використовуючи лему В, для (19) можемо записати

$$\sum_{(\boldsymbol{s},\gamma)>n} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1}\left\|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\right\|_1 \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\gamma)>n} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}-1)} = \sum_{(\boldsymbol{s},\gamma)>n} 2^{-(\boldsymbol{s},\bar{\gamma})(r_1-1)} \ll 2^{-n(r_1-1)}n^{\nu-1}. \qquad (22)$$

Об’єднуючи (21) і (22), одержуємо оцінку зверху у співвідношенні (18).

Перейдемо до встановлення оцінки знизу, яку достатньо отримати для випадку $\nu = d$. Розглянемо функції

$$f_1(\boldsymbol{x}) = C_6 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{(\boldsymbol{s},1)=n+1} A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}), \quad C_6 > 0,$$

якщо $1 \le \theta < \infty$, і

$$f_2(\boldsymbol{x}) = C_7 2^{-nr_1} \sum_{(\boldsymbol{s},1)=n+1} A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}), \quad C_7 > 0,$$

якщо $\theta = \infty$.

Переконаємося, що дані функції належать класам $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B$ і $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\infty}B$ відповідно. Оскільки має місце оцінка $\|A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\|_1 \asymp C_8$, то

$$\|f_1\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B} \asymp \left(\sum_{(\boldsymbol{s},1)=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta}\left\|A^*_{\boldsymbol{s}}(f_1,\cdot)\right\|_1^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},1)=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta}\left\|A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\right\|_1^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},1)=n+1} 2^{r_1(\boldsymbol{s},1)\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll n^{-\frac{d-1}{\theta}}\left(\sum_{(\boldsymbol{s},1)=n+1} 1\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1.$$

Для f_2 маємо

$$\|f_2\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{1,\infty}} \asymp \sup_{(\boldsymbol{s},1)=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}\left\|A^*_{\boldsymbol{s}}(f_2,\cdot)\right\|_1 \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1} \sup_{(\boldsymbol{s},1)=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}\left\|A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\right\|_1 \asymp 2^{-nr_1} \sup_{(\boldsymbol{s},1)=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \ll 1.$$

Далі, враховуючи вибір функцій f_1 і f_2, отримуємо $S_{Q_n^\gamma}(f_1,\boldsymbol{x}) = 0$ і $S_{Q_n^\gamma}(f_2,\boldsymbol{x}) = 0$.

Таким чином, беручи до уваги оцінку (17), одержуємо

$$\left\|f_1(\cdot) - S_{Q_n^\gamma}(f,\cdot)\right\|_\infty = \|f_1(\cdot)\|_\infty \asymp 2^{-n(r_1-1)} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)},$$

$$\left\|f_2(\cdot) - S_{Q_n^\gamma}(f,\cdot)\right\|_\infty = \|f_2(\cdot)\|_\infty \asymp 2^{-n(r_1-1)} n^{d-1}.$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай* $1 < q < \infty$ *і* $r_1 > 1 - \dfrac{1}{q}$. *Тоді для* $1 \le \theta \le \infty$ *мають місце порядкові співвідношення*

$$E_{Q_n^\gamma}\left(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B\right)_q \asymp \mathcal{E}_{Q_n^\gamma}\left(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B\right)_q \asymp 2^{-n\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \qquad (23)$$

де $a_+ = \max\{a;0\}$.

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху. Оскільки $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B$ з деяким $\boldsymbol{r}$, $r_1 > 1 - \dfrac{1}{q}$, то згідно з теоремою А $f \in L_q\left(\mathbb{R}^d\right)$. Тоді для $1 < q_0 < q$, використовуючи лему Б, а потім застосовуючи нерівність різних метрик, отримуємо

$$\mathcal{E}_{Q_n^{\gamma}}(f)_q = \left\|f(\cdot) - S_{Q_n^{\gamma}}(f,\cdot)\right\|_q = \left\|\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\right\|_q \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^q_{q_0} 2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q}\right)q}\right)^{\frac{1}{q}} \asymp \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^q_{q_0} 2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q}\right)q}\right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^q_{1} 2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{q_0}\right)q} 2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q}\right)q}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^q_{1} 2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)q}\right)^{\frac{1}{q}} =: J_3.$$

Для того щоб продовжити оцінку J_3, розглянемо кілька випадків.

Нехай $1 < q < \theta < \infty$. Тоді, застосовуючи до J_3 нерівність Гельдера з показником $\dfrac{\theta}{q}$ і враховуючи, що $r_1 > 1 - \dfrac{1}{q}$, одержуємо

$$J_3 = \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^q_{1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})q} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})q} 2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)q}\right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^\theta_{1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \left(2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})q} 2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)q}\right)^{\frac{\theta}{\theta-q}}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \leq$$

$$\leq \|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \left(2^{-\left((\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})-\left(1-\frac{1}{q}\right)\|s\|_1\right)}\right)^{\frac{q\theta}{\theta-q}}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \left(2^{-\left(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}-\left(1-\frac{1}{q}\right)\right)}\right)^{\frac{q\theta}{\theta-q}}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} = \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-(\boldsymbol{s},\bar{\boldsymbol{\gamma}})\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)\frac{q\theta}{\theta-q}}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}},$$

де $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ — вектор із координатами $\bar{\gamma}_j = \dfrac{r_j - 1 + \dfrac{1}{q}}{r_j - 1 + \dfrac{1}{q}}$, $j = \overline{1,d}$. Легко переконатися, що $\bar{\gamma}_j = \gamma_j$ при $j = \overline{1,\nu}$ і $\bar{\gamma}_j \geq \gamma_j$ при $j = \overline{\nu+1,d}$. Застосовуючи до останньої суми лему Г, отримуємо

$$J_3 \ll 2^{-n\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

У випадку $1 \leq \theta \leq q < \infty,\ q \neq 1$, використавши нерівність

$$\left(\sum_k |a_k|^{v_2}\right)^{\frac{1}{v_2}} \leq \left(\sum_k |a_k|^{v_1}\right)^{\frac{1}{v_1}}, \quad 0 < v_1 \leq v_2 < \infty,$$

(див. [15, с. 43]), а також нерівність Гельдера і взявши до уваги, що $r_1 > 1 - \dfrac{1}{q}$, оцінку J_3 можемо продовжити таким чином:

$$J_3 \leq \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_1^{\theta}\, 2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} = \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_1^{\theta}\, 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} 2^{-(\boldsymbol{s},\bar{\boldsymbol{\gamma}})\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta}\, \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_1^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \sup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-(\boldsymbol{s},\bar{\boldsymbol{\gamma}})\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)} \leq$$

$$\leq \|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B} 2^{-n\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)} \leq 2^{-n\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)},$$

де, як і в попередньому випадку, вектор $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ визначається аналогічно і $\bar{\boldsymbol{\gamma}} \geq \boldsymbol{\gamma}$.

Нехай тепер $\theta = \infty$. Тоді для $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\infty}B$ згідно з (3) маємо

$$\|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_1 \ll 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}$$

і, використовуючи лему Г, отримуємо

$$J_1 \ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})q} 2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)q}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-(\boldsymbol{s},\bar{\boldsymbol{\gamma}})\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)q}\right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)} n^{\frac{\nu-1}{q}}.$$

Оцінки зверху в теоремі встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінок знизу. Для цього при певних значеннях параметрів q і θ достатньо вказати функції $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B$, для яких оцінки знизу величин $\mathcal{E}_{Q_n^{\gamma}}(f)_q$ збігаються за порядком з оцінками знизу величин $\mathcal{E}_{Q_n^{\gamma}}\left(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B\right)_q$ в (23). Зауважимо, що достатньо розглянути випадок $\nu = d$, тобто будемо вважати, що $\gamma_j = 1,\ j = \overline{1,d}$.

Нехай $1 \leq \theta \leq q,\ q \neq 1$. Розглянемо функцію

$$f_3(\boldsymbol{x}) = 2^{-r_1 n} A^*_{\tilde{\boldsymbol{s}}}(\boldsymbol{x}),$$

де $\|\tilde{\boldsymbol{s}}\|_1 = n + 1$.

Покажемо, що $f_3 \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B$. Маємо

$$\|f_3(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B} \asymp \left(\sum_{s\geq 0} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta}\, \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f_3,\cdot)\|_1^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-r_1 n} \left(2^{(\tilde{\boldsymbol{s}},\boldsymbol{r})\theta} \left\| A^*_{\tilde{\boldsymbol{s}}}(\cdot) \right\|_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 2^{-r_1 n} 2^{-r_1 n} = 1.$$

Оскільки для функцій $f_3(\boldsymbol{x})$ виконується співвідношення $S_{Q_n^\gamma}(f_3, \boldsymbol{x}) = 0$, то згідно з лемою 2 отримуємо

$$\mathcal{E}_{Q_n^\gamma} \left(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta} B \right)_q \gg \left\| f_3(\cdot) - S_{Q_n^\gamma}(f_3, \cdot) \right\|_q = \| f_3(\cdot) \|_q \asymp 2^{-nr_1} \left\| A^*_{\tilde{\boldsymbol{s}}}(\cdot) \right\|_q \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1} 2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)} = 2^{-n\left(r_1 - 1 + \frac{1}{q}\right)}.$$

У випадку $1 < q < \theta < \infty$ розглянемо функцію

$$f_4(\boldsymbol{x}) = 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 = n+1} A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}).$$

Покажемо, що $f_4 \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta} B$. Маємо

$$\| f_4(\cdot) \|_{S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta} B} \asymp \left(\sum_{s \geq 0} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \left\| A^*_{\boldsymbol{s}}(f_4, \cdot) \right\|_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 = n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \left\| A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot) \right\|_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 = n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1.$$

Врахувавши, що відповідно до вибору функцій f_4 виконується співвідношення $S_{Q_n^\gamma}(f_4, \boldsymbol{x}) = 0$, будемо мати

$$\mathcal{E}_{Q_n^\gamma} \left(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta} B \right)_q \gg \left\| f_4(\cdot) - S_{Q_n^\gamma}(f_4, \cdot) \right\|_q = \| f_4(\cdot) \|_q.$$

Оскільки, як було показано вище, $f_4 \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta} B$, а за умовами теореми $r_1 > 1 - \dfrac{1}{q}$, то згідно з теоремою A $f_4 \in L_q(\mathbb{R}^d)$. Для $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d_+$ покладемо

$$\Delta(\boldsymbol{s}) = \left\{ \boldsymbol{x} \colon 2^{-s_j - 1} \leq x_j < 2^{-s_j}, \ j = \overline{1, d} \right\},$$

$\Delta(\boldsymbol{s}) \cap \Delta(\boldsymbol{s}') = \varnothing$, якщо $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{s}'$, тоді за теоремою B (Літтлвуда – Пелі)

$$\| f_4(\cdot) \|_q \gg \left\| \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 = n+1} \left| \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_4, \cdot) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \geq \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 = n+1} \int\limits_{\Delta(\boldsymbol{s})} \left| \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_4, \boldsymbol{x}) \right|^q d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Використавши оцінку (15), останню оцінку можемо продовжити таким чином:

$$\| f_4(\cdot) \|_q \gg 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 = n+1} \int\limits_{\Delta(\boldsymbol{s})} \left| A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}) \right|^q d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{q}} \gg$$

$$\gg 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 = n+1} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 (q-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{n\frac{q-1}{q}} n^{\frac{d-1}{q}} = 2^{-n\left(r_1-\left(1-\frac{1}{q}\right)\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Насамкінець розглянемо випадок $\theta=\infty$ і, відповідно, функцію

$$f_5(\boldsymbol{x}) = 2^{-nr_1} \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1=n+1} A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}).$$

Покажемо, що $f_5 \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\infty}B$. Маємо

$$\|f_5(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{1,\infty}B} \asymp \sup_{s\geq 0} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}\|A^*_{\boldsymbol{s}}(f_5,\cdot)\|_1 = 2^{-nr_1} \sup_{\|\boldsymbol{s}\|_1=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}\,\|A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\|_1 \ll 1.$$

Враховуючи, що для функцій f_5 виконується співвідношення $S_{Q_n^\gamma}(f_5,\boldsymbol{x})=0$, як і в попередньому випадку, отримуємо

$$\mathcal{E}_{Q_n^\gamma}\left(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B\right)_q \gg \left\|f_5(\cdot) - S_{Q_n^\gamma}(f_5,\cdot)\right\|_q = \|f_5(\cdot)\|_q \gg$$

$$\gg \left\|\left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1=n+1} |\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_5,\cdot)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_q \geq \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1=n+1}\int\limits_{\Delta(\boldsymbol{s})} |\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_5,\boldsymbol{x})|^q\,d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1}\left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1=n+1}\int\limits_{\Delta(\boldsymbol{s})} |A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x})|^q\,d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{q}} \gg 2^{-nr_1}\left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1=n+1} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1(q-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1} 2^{n\frac{q-1}{q}} n^{\frac{d-1}{q}} = 2^{-n\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)} n^{\frac{d-1}{q}}.$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему 2 доведено.

Завершуючи роботу, прокоментуємо одержані результати.

Точні за порядком оцінки величини (7) для класів Нікольського $S^{\boldsymbol{r}}_1 H\left(\mathbb{R}^d\right)$ у метриці простору L_q при $1\leq q<\infty$ (теорема 2) встановлено в роботі [2]. Зауважимо, що методи, які використовувалися для встановлення оцінок у теоремі 2 при $\theta=\infty$, дещо відрізняються від методів, які застосовувались у [2]. Теорема 1 є новою і для класів Нікольського, тобто у випадку $\theta=\infty$.

Знаходженню точних за порядком оцінок величин (7), (8) у східчастому гіперболічному хресті для ряду інших значень параметрів p, θ і q присвячено роботи [1, 4, 5]. Дослідження класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B\left(\mathbb{R}^d\right)$ з точки зору знаходження оцінок інших апроксимативних характеристик проводилися, зокрема, у роботах [3, 12, 16, 17].

Зауважимо, що більш інтенсивно досліджуються класи Нікольського – Бєсова періодичних функцій як однієї, так і багатьох змінних. Так, порядкові оцінки наближення функцій із даних класів за допомогою тригонометричних поліномів із номерами гармонік із східчастого гіперболічного хреста встановлено в роботах [14, 18 – 22]. Більш детально з дослідженнями класів Нікольського – Бєсова періодичних функцій, з точки зору знаходження порядкових оцінок різних апроксимативних характеристик, можна ознайомитися в монографії [23], а також оглядовій статті [24].

На даний час також інтенсивно досліджуються й узагальнення класів Нікольського – Бєсова функцій із домінуючою мішаною похідною. У цьому напрямку відзначимо роботи [25 – 30].

Література

1. *Wang Heping, Sun Yongsheng.* Approximation of multivariate functions with certain mixed smoothness by entire functions // Northeast. Math. J. – 1995. – **11**, № 4. – P. 454 – 466.
2. *Wang Heping, Sun Yongsheng.* Approximation of functions in $\widetilde{S_1^r L}$, $S_1^r H$ by entire functions // Approxim. Theory and Appl. – 1999. – **15**, № 4. – P. 88 – 93.
3. *Янченко С. Я.* Наближення класів $S^r_{p,\theta}B\left(\mathbb{R}^d\right)$ функцій багатьох змінних цілими функціями спеціального вигляду // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 8. – С. 1124 – 1138.
4. *Янченко С. Я.* Наближення функцій з класів $S^r_{p,\theta}B$ у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 5. – С. 698 – 705.
5. *Янченко С. Я.* Оцінки апроксимативних характеристик класів функцій $S^r_{p,\theta}B\left(\mathbb{R}^d\right)$ у рівномірній метриці // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 1. – С. 328 – 340.
6. *Никольский С. М.* Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сиб. мат. журн. – 1963. – **4**, № 6. – С. 1342 – 1364.
7. *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B\left(\mathbb{R}_n\right)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$ $(0 \le x_j \le 2\pi,\ j = 1,\ldots,n)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **77**. – С. 5 – 34.
8. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
9. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1969. – **105**. – С. 89 – 167.
10. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
11. *Березанський Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функціональний аналіз. – Львів: І. Е. Чижиков [вид.], 2014. – 558 с.
12. *Wang Heping.* Quadrature formulas for classes of functions with bounded mixed derivative or difference // Sci. China (Ser. A). – 1997. – **40**, № 5. – P. 449 – 458.
13. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
14. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
15. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
16. *Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate function with bounded mixed smoothness by hyperbolic wavelets // J. Math. Anal. and Appl. – 2004. – **291**. – P. 698 – 715.
17. *Hans-Jurgen Schmeisser, Winfried Sickel.* Spaces of functions of mixed smoothness and approximation from hyperbolic crosses // J. Approxim. Theory. – 2004. – **128**. – P. 115 – 150.
18. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **189**. – С. 138 – 168.
19. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1398 – 1408.
20. *Романюк А. С.* Приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения // Мат. сб. – 2004. – **195**, № 2. – С. 91 – 116.
21. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике // Мат. заметки. – 2007. – **82**, № 2. – С. 247 – 261.
22. *Галеев Э. М.* Приближение классов периодических функций нескольких переменных ядерными операторами // Мат. заметки. — 1990. — **47**, № 3. – С. 32 – 41.
23. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **93**. – 352 с.
24. *Dinh Dũng, Temlyakov V. N., Tino Ullrich.* Hyperbolic cross approximation // arXiv:1601.03978v3 [math.NA] 21 Apr. 2017.

25. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. – 1994. – **20**. — P. 35 – 48.
26. *Пустовойтов Н. Н.* Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Мат. заметки. – 1999. – **65**, № 1. – С. 107 – 117.
27. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1997. – **219**. – С. 356 – 377.
28. *Стасюк С. А.* Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 11. – С. 1557 – 1568.
29. *Stasyuk S. A., Yanchenko S. Ya.* Approximation of functions from Nikolskii – Besov type classes of generalized mixed smoothness // Anal. Math. – 2015. – **41**. – P. 311 – 334.
30. *Янченко С. Я.* Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ функцій багатьох змінних цілими функціями у просторі $L_q\left(\mathbb{R}^d\right)$ // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 123 – 135.

Одержано 06.03.19