УДК 517.956.32, 517.955.2

В. А. Літовченко (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

ГІПЕРБОЛІЧНІ СИСТЕМИ У ПРОСТОРАХ ГЕЛЬФАНДА І ШИЛОВА

For systems hyperbolic in Shilov's sense with time-dependent coefficients, the properties of the Green function are studied in the S-type spaces. For systems of this kind in the indicated spaces, we establish the correct solvability of the Cauchy problem. It is shown that, for each $\beta > 1$, the space $S_0^{\beta'}$ of Gelfand and Shilov distributions is the class of well-posedness of this problem.

Для гіперболічних за Шиловим систем із неперервно залежними від часу коефіцієнтами досліджено властивості функції Гріна у просторах типу S. Для таких систем у цих просторах встановлено коректну розв'язність задачі Коші та доведено, що простір $S_0^{\beta'}$ розподілів Гельфанда і Шилова при кожному $\beta > 1$ є класом коректності цієї задачі.

1. Вступ. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\partial_t u(t;x) = P(t; i\partial_x)u(t;x), \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]} := (0;T] \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

у якій $u = \operatorname{col}(u_1; \ldots ; u_m)$ — невідома функція, $P(t; i\partial_x)$ — матричний диференціальний вираз порядку p з неперервно залежними від t комплекснозначними коефіцієнтами, а

$$\partial_x^k \cdot := \frac{\partial^{|k|}\cdot}{\partial_{x_1}^{k_1} \ldots \partial_{x_n}^{k_n}}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Вважатимемо, що система (1) гіперболічна за Шиловим на множині $\Pi_{(0;T]}$. Якщо коефіцієнти системи сталі, тобто $P(t; i\partial_x) \equiv P(i\partial_x)$, це означає, що функція

$$\Lambda(s) := \max_j \operatorname{Re} \lambda_j(s), \quad s \in \mathbb{C}^n,$$

де $\lambda_j(\cdot)$ — власні числа матричного символу $P(\cdot)$, задовольняє такі умови:

1) її степеневий порядок зростання у комплексному просторі $\mathbb{C}^n$ не більший за $1 : \Lambda(s) \leq$ $\leq a\|s\| + b$;

2) при дійсних значеннях $s = \xi \in \mathbb{R}^n$ ця функція обмежена: $\Lambda(\xi) \leq c$.

У загальному випадку гіперболічність за Шиловим системи (1) означає виконання для матриціанта $\theta_\tau^t(\cdot)$ її двоїстої за Фур'є системи оцінок [1]:

1) $|\theta_\tau^t(s)| \leq c(1 + \|s\|)^\gamma e^{\delta(t-\tau)\|s\|}$, $s \in \mathbb{C}^n$, $0 \leq \tau < t \leq T$;

2) $|\theta_\tau^t(\xi)| \leq c_0\big(1 + \|\xi\|\big)^\gamma$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \tau < t \leq T$

(тут c_0, c, δ — додатні сталі, не залежні від t і τ, а $\gamma := p(m-1)$).

У роботі [1] наведено приклади гіперболічних за Шиловим систем та обґрунтовано, що кожна гіперболічна за Петровським система (1) є гіперболічною за Шиловим і кожне гіперболічне за Гордінгом рівняння зі сталими коефіцієнтами зводиться до гіперболічної за Шиловим системи.

Гіперболічність системи не забезпечує необхідного спадання на нескінченності матриціанта $\theta_\tau^t(\cdot)$, тому класичний метод перетворення Фур'є розв'язування системи (1), який є ефективним у параболічному випадку, виявився недієвим для таких систем. У зв'язку з цим різними дослідниками розроблялися інші методи розв'язування гіперболічних рівнянь і систем другого та вищих порядків, зокрема методи характеристик, відокремлення змінних, скінченних різниць, побудови функції Рімана – Адамара, які дозволили одержати ряд важливих результатів про коректну розв'язність задачі Коші та крайових задач у різних функціональних просторах [2 – 9], а також дослідити властивості розв'язків (див., наприклад, [10, 11]).

Із розвитком теорії узагальнених функцій метод перетворення Фур'є вдалося поширити і на випадок гіперболічних систем [1, 12]. У роботі [1], трактуючи розв'язок системи (1) у слабкому розумінні, встановлено, що простір S_0' розподілів Дірака є класом єдиності задачі Коші для гіперболічних за Шиловим систем, а також у термінах показника коректності системи описано умови гладкості на початкову вектор-функцію, за яких відповідна задача Коші коректно розв'язна і має класичний розв'язок. Крім цього, поширено відомий результат І. Г. Петровського про коректну розв'язність задачі Коші для гіперболічних за Петровським систем [2] на випадок систем, гіперболічних за Шиловим: *задача Коші лише для гіперболічних систем* (1) *коректно розв'язна з довільними достатньо гладкими початковими даними без будь-яких обмежень на їхнє зростання на нескінченності.*

У даній роботі з'ясовується питання про коректну розв'язність задачі Коші для гіперболічних за Шиловим систем (1) у просторах типу S і S' основних і узагальнених функцій Гельфанда і Шилова. Досліджуються властивості функції Гріна у цих просторах, встановлено існування й єдиність у кожному просторі типу S класичного розв'язку задачі Коші для гіперболічних систем (1) із граничними значеннями на початковій гіперплощині із цих просторів та розширено клас єдиності S_0' Гельфанда і Шилова для таких систем до простору $S_0^{\beta\,\prime}$, $\beta > 1$, а також доведено, що $S_0^{\beta\,\prime}$ є класом коректності задачі Коші для гіперболічних за Шиловим систем. Одержані результати проілюстровано на прикладі рівняння коливання необмеженої струни.

2. Необхідні відомості. Нехай S — простір Шварца швидкоспадних на $\mathbb{R}^n$ функцій. Для $\alpha \geq 0$ і $\beta \geq 0$ покладемо [13]

$$S_\alpha := \Big\{\varphi(\cdot) \in S \mid \exists A > 0 \;\; \forall q \in \mathbb{Z}_+^n \;\; \exists c_q > 0 \;\; \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n : |x^k \partial^q \varphi(x)| \leq c_q A^{|k|} k^{\alpha k}\Big\},$$

$$S^\beta := \Big\{\varphi(\cdot) \in S \mid \exists B > 0 \;\; \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \;\; \exists c_k > 0 \;\; \forall q \in \mathbb{Z}_+^n \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n : |x^k \partial^q \varphi(x)| \leq c_k B^{|q|} q^{\beta q}\Big\},$$

$$S_\alpha^\beta := \Big\{\varphi(\cdot) \in S \mid \exists A > 0 \;\; \exists B > 0 \;\; \exists c > 0 \;\; \forall \{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+^n$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^n : |x^k \partial^q \varphi(x)| \leq c A^{|k|} B^{|q|} k^{\alpha k} q^{\beta q}\Big\}.$$

Із відповідними топологіями ці простори є об'єднанням зліченно нормованих повних досконалих просторів, збіжність у яких характеризується таким критерієм [13]: *граничне співвідношення* $\varphi_\nu(\cdot) \xrightarrow[\nu\to\infty]{W} 0$ *виконується тоді й лише тоді, коли*:

А) $\partial^q \varphi_\nu(x) \underset{\nu\to\infty}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0 \;\; \forall \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n \;\; \forall q \in \mathbb{Z}_+^n$ (*йдеться про рівномірну збіжність щодо* x *на компакті* $\mathbb{K}$);

Б) *послідовність* $\varphi_\nu(\cdot)$ *обмежена у просторі* W, *де* $W \in \big\{S_\alpha, S^\beta, S_\alpha^\beta\big\}$.

Простори S_α, S^β і S_α^β називають ще просторами типу S основних функцій Гельфанда і Шилова.

У [13] доведено, що простори S_β і S^β нетривіальні при кожному $\beta \geq 0$, а простір S_α^β — лише при $\alpha + \beta \geq 1$, якщо $\alpha \cdot \beta \neq 0$, і при $\alpha + \beta > 1$ у випадку, коли $\alpha \cdot \beta = 0$. Крім цього, виконується топологічна рівність $S_\alpha^\beta = S_\alpha \cap S^\beta$ [14].

При $\alpha = 0$ елементи простору S_0 фінітні нескінченно диференційовні на $\mathbb{R}^n$ функції; при $\beta < 1$ елементи $\varphi(\cdot) \in S^\beta$ і $\psi(\cdot) \in S_\alpha^\beta$, $\alpha > 0$, допускають аналітичне продовження у комплексний простір $\mathbb{C}^n$ до цілих функцій таких, що

$$\left|x^k \varphi(x+iy)\right| \leq c_k e^{\delta \|y\|^{\frac{1}{1-\beta}}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, \qquad \left|\psi(x+iy)\right| \leq c e^{-\delta_0 \|x\|^{\frac{1}{\alpha}} + \delta_1 \|y\|^{\frac{1}{1-\beta}}}.$$

Оператор перетворення Фур'є F між просторами S_α і S^β встановлює взаємно однозначну і неперервну відповідність, при цьому мають місце топологічні рівності $F[S_\alpha] = S^\alpha$, $F[S^\beta] = S_\beta$ і $F[S_\alpha^\beta] = S_\beta^\alpha$.

Нехай W — один із просторів типу S, W' — топологічно спряжений простір із W, а $F[W]$ — простір фур'є-образів елементів простору W. Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in W'$ визначається так [13]:

$$\left\langle F[f], F[\varphi] \right\rangle := (2\pi)^n \langle f, \varphi \rangle, \quad \varphi \in W,$$
$$\left\langle F^{-1}[g], F^{-1}[\psi] \right\rangle := (2\pi)^{-n} \langle g, \psi \rangle, \qquad g \in F[W], \quad \psi \in F[W]$$

(тут кутовими дужками позначено дію узагальненої функції на основну).

У просторах типу S визначено і неперервний оператор τ_h звичайного зсуву на крок $h \in \mathbb{R}^n$: $\tau_h \varphi(x) = \varphi(x+h)$. Це дозволяє визначити згортку елементів $\{f, g\} \subset W'$ рівністю

$$\langle g * f, \varphi \rangle = \left\langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \right\rangle \quad \forall \varphi \in W.$$

Згортка $g * f$ існує, якщо g — згортувач у просторі W, тобто такий функціонал із W', що $(g * \varphi)(\cdot) := \left\langle g(x), \varphi(x + \cdot) \right\rangle \in W \;\; \forall \varphi \in W$, причому оператор згортки $g*$ неперервний у W. Якщо g — згортувач у просторі W, то справджуються рівності [13]

$$F[g * f] = F[g] F[f] \quad \forall f \in W', \qquad F[g * \varphi] = \overline{F[g]} F[\varphi] \quad \forall \varphi \in W. \tag{2}$$

З останньої рівності випливає, що перетворення Фур'є згортувача g, тобто $F[g]$, — мультиплікатор у відповідному просторі $F[W]$. Очевидно, правильним є і зворотне твердження.

Для всіх $0 \leq \alpha_j \leq \alpha_{j-1}$ і $0 \leq \beta_j \leq \beta_{j-1}$, $j \in \{1; 2\}$, мають місце неперервні вкладення [13]

$$S_{\alpha_2}^{\beta_2} \subset S_{\alpha_1}^{\beta_1} \subset \begin{Bmatrix} S_{\alpha_1} \subset S_{\alpha_0} \\ S^{\beta_1} \subset S^{\beta_0} \end{Bmatrix} \subset S \subset L_2(\mathbb{R}^n) \subset S' \subset \begin{Bmatrix} S_{\alpha_0}{}' \subset S_{\alpha_1}{}' \\ S^{\beta_0}{}' \subset S^{\beta_1}{}' \end{Bmatrix} \subset S_{\alpha_1}^{\beta_1}{}' \subset S_{\alpha_2}^{\beta_2}{}'$$

(тут $L_2(\mathbb{R}^n)$ — простір Лебега сумовних у квадраті на $\mathbb{R}^n$ функцій).

Говоритимемо, що параметрична функція $g(t; \cdot) \in W'$, $t \in [a; b]$, слабко диференційовна у просторі W' за параметром t у точці $t_0 \in [a; b]$, якщо для кожного елемента $\varphi(\cdot)$ з W існує скінченна границя

$$\lim_{\triangle t \longrightarrow 0} \left\langle (g(t_0 + \triangle t; \xi) - g(t_0; \xi)) / \triangle\, t, \varphi(\xi) \right\rangle = c_\varphi(t_0)$$

і для всіх $\varphi_\nu(\cdot) \xrightarrow[\nu \to \infty]{W} 0$ відповідні числові послідовності

$$\hat{c}_\nu(t_0) := \lim_{\triangle t \longrightarrow 0} \big\langle (g(t_0 + \triangle t; \xi) - g(t_0; \xi)) / \triangle\, t, \varphi_\nu(\xi) \big\rangle \underset{\nu \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

При цьому узагальнену функцію $\partial_t g(t_0; \cdot)$ з W', яка на елементах $\varphi(\cdot) \in W$ визначається рівністю $\big\langle \partial_t g(t_0; \xi), \varphi(\xi) \big\rangle = c_\varphi(t_0)$, назвемо слабкою похідною функції $g(t; \cdot)$ у просторі W' за параметром t у точці t_0. Функція $g(t; \cdot)$ слабко диференційовна по t на $[a; b]$ у просторі W', якщо вона слабко диференційовна по t у W' в кожній точці проміжку $[a; b]$.

Позначимо через $\mathbb{W}'$ векторний аналог простору W'. Якщо $f \in \mathbb{W}'$, $\varphi \in \mathbb{W}$, то $f = \mathrm{col}(f_1; \ldots; f_m)$ і $\varphi = \mathrm{col}(\varphi_1; \ldots; \varphi_m)$, причому $\langle f, \varphi \rangle = \sum_{j=1}^m \langle f_j, \varphi_j \rangle$, крім цього, $\mathcal{A} * \varphi = \mathrm{col}\Big(\sum_{j=1}^m a_{lj} * \varphi_j \Big)_{l=1}^m$, якщо $\mathcal{A} = \big(a_{lj}\big)_{l,j=1}^m$.

Означення. *Узагальнена вектор-функція $u(t; \cdot) \in \mathbb{W}'$, $t \in (0; T]$, називається слабким розв'язком системи* (1) *у просторі $\mathbb{W}'$, якщо $u(t; \cdot)$ слабко диференційовна по t на $(0; T]$ у $\mathbb{W}'$ і для кожного елемента $\varphi \in \mathbb{W}$ виконується рівність*

$$\big\langle \partial_t u(t; x), \varphi(x) \big\rangle = \big\langle P(t; i\partial_x) u(t; x), \varphi(x) \big\rangle.$$

У роботі [1] методом перетворення Фур'є узагальнених функцій побудовано функцію Гріна гіперболічної системи (1) у вигляді $G(t, \tau; \cdot) = F^{-1}[\theta_\tau^t(\xi)](t, \tau; \cdot)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, де

$$\theta_\tau^t(\xi) = E + \int\limits_\tau^t P(t_1; \xi)\, dt_1 + \int\limits_\tau^t \left(P(t_1; \xi) \int\limits_\tau^{t_1} P(t_2; \xi)\, dt_2 \right) dt_1 + \ldots \tag{3}$$

— матрицант відповідної двоїстої за Фур'є з (1) системи

$$\partial_t v(t; \xi) = P(t; \xi) v(t; \xi), \quad (t; \xi) \in \Pi_{(\tau; T]} \tag{4}$$

(тут E — одинична матриця порядку m). Досліджено властивості функційної матриці $G(t, \tau; \cdot)$, зокрема, обґрунтовано належність її компонент до простору S_0' та доведено, що ці компоненти є згортувачами у просторі S_0 (див. [1, с. 69]). При цьому, використовуючи умови з означення гіперболічності системи (1) і застосовуючи послідовно теореми $1''$, $2''$ з [13, с. 256, 258], встановлено оцінку

$$\big| \theta_\tau^t(\xi + i\eta) \big| \leq c \big(1 + \|\xi\| \big)^\gamma e^{\delta \|\eta\|}, \qquad \xi + i\eta \in \mathbb{C}^n, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \tag{5}$$

з $c > 0$ і $\delta > 0$, не залежними від t і τ.

3. Властивості функції Гріна. Правильним є таке допоміжне твердження.

Лема 1. *Існують додатні сталі c і B такі, що для всіх $q \in \mathbb{Z}_+^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $0 \leq \tau < t \leq T$ виконується оцінка*

$$\big| \partial_\xi^q \theta_\tau^t(\xi) \big| \leq c B^{|q|} \big(1 + \|\xi\| \big)^\gamma. \tag{6}$$

Доведення. Для спрощення викладок розглянемо випадок $n = 1$ (випадок $n > 1$ розглядається аналогічно).

Згідно з формулою Коші та оцінкою (5) маємо

$$\big| \partial_\xi^q \theta_\tau^t(\xi) \big| \leq \frac{q!}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_r} \frac{|\theta_\tau^t(z)|}{|z - \xi|^{q+1}} dz \leq c q! \frac{e^{\delta r}}{r^q} (1 + |\xi + r|)^\gamma, \qquad q \in \mathbb{Z}_+, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T,$$

де Γ_r — коло радіуса r з центром у точці ξ. Звідси, поклавши $r = q/\delta$, знайдемо

$$\left|\partial_\xi^q \theta_\tau^t(\xi)\right| \leq c(e\delta)^q \bigl(1+|\xi+q/\delta|\bigr)^\gamma \leq c(e\delta)^q \bigl((1+|\xi|)+2^q/\delta\bigr)^\gamma \leq c(1+1/\gamma\delta)^\gamma (e\delta 2^\gamma)^q (1+|\xi|)^\gamma.$$

Лему доведено.

Оцінка (6) похідних матрицанта $\theta_\tau^t(\cdot)$ на дійсній гіперплощині $\mathbb{R}^n$ дозволяє обґрунтувати правильність наступного твердження.

Теорема 1. *Нехай система* (1) *гіперболічна за Шиловим, тоді відповідна функційна матриця* $\theta_\tau^t(\cdot)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, — *мультиплікатор у кожному векторному просторі типу* S.

Доведення зводиться до перевірки виконання умов з означення мультиплікатора у просторі $\mathbb{W}$ основних функцій:

1) $\forall \varphi \in \mathbb{W} : \theta_\tau^t(\cdot)\varphi(\cdot) \in \mathbb{W}$, $0 \leq \tau < t \leq T$;

2) якщо $\varphi_\nu(\cdot) \xrightarrow[\nu\to\infty]{W} 0$, то $\theta_\tau^t(\cdot)\varphi_\nu(\cdot) \xrightarrow[\nu\to\infty]{W} 0$ при $0 \leq \tau < t \leq T$.

Використавши формулу Лейбніца диференціювання добутку, оцінку (6) та нерівність

$$\bigl(1+\|\xi\|\bigr)^\gamma |\xi|^k \leq \bigl(2\sqrt{n}\bigr)^\gamma \left(|\xi|^k + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{k_j+\gamma}\right), \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

для $\varphi \in \mathbb{W}$, $\{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $0 \leq \tau < t \leq T$ отримаємо

$$\left|\xi^k \partial_\xi^q (\theta_\tau^t(\xi)\varphi(\xi))\right| \leq c\bigl(2\sqrt{n}\bigr)^\gamma (2B)^{|q|} \left(|\xi|^k + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{k_j+\gamma}\right) \sum_{|l|=0}^{|q|} \left|\partial^l \varphi(\xi)\right|. \tag{7}$$

Звідси, враховуючи означення просторів типу S (див. п. 2), переконуємось у справедливості твердження 1).

Покажемо, що твердження 2 також є справедливим. Для цього, згідно з критерієм збіжності у просторах типу S, достатньо показати, що

а) $\forall \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n \ \ \forall q \in \mathbb{Z}_+^n : \partial_\xi^q\bigl(\theta_\tau^t(\xi)\varphi_\nu(\xi)\bigr) \underset{\nu\to\infty}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0$, $0 \leq \tau < t \leq T$;

б) послідовність $\theta_\tau^t(\cdot)\varphi_\nu(\cdot)$ обмежена в $\mathbb{W}$ при довільно фіксованих t і τ таких, що $0 \leq$ $\leq \tau < t \leq T$.

З оцінки (6) і співвідношення $\varphi_\nu(\cdot) \xrightarrow[\nu\to\infty]{W} 0$ (див. твердження А) з п. 2) випливає а). Дійсно,

$$\left|\partial_\xi^q\bigl(\theta_\tau^t(\xi)\varphi_\nu(\xi)\bigr)\right| \leq c_q \bigl(1+\|\xi\|\bigr)^\gamma \sum_{|l|=0}^{|q|} |\partial^l \varphi_\nu(\xi)| \underset{\nu\to\infty}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0, \qquad q \in \mathbb{Z}_+^n, \quad 0 \leq \tau < t \leq T.$$

Далі, обмеженість послідовності $\varphi_\nu(\cdot)$, $\nu \geq 1$, у просторі $\mathbb{S}_\alpha^\beta$ означає, що

$$\exists A_0 > 0 \quad \exists B_0 > 0 \quad \exists c_0 > 0 \quad \forall \{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n \quad \forall \nu \geq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n :$$

$$|\xi^k \partial^q \varphi_\nu(\xi)| \leq c_0 A_0^{|k|} B_0^{|q|} k^{\alpha k} q^{\beta q}.$$

Враховуючи це, з відповідної нерівності (7) для всіх $\{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\nu \geq 1$ і $0 \leq \tau < t \leq T$ знаходимо

$$\left|\partial_\xi^q\big(\theta_\tau^t(\xi)\varphi_\nu(\xi)\big)\right| \le c\big(2\sqrt{n}\,\big)^\gamma (2B)^{|q|}\left(|\xi|^k + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{k_j+\gamma}\right)\sum_{|l|=0}^{|q|} |\partial^l \varphi_\nu(\xi)| \le$$

$$\le c_1 A_1^{|k|} B_1^{|q|}\left(k^{\alpha k} + \sum_{j=1}^n (k_j+\gamma)^{\alpha(k_j+\gamma)}\right)\sum_{|l|=0}^{|q|} l^{\beta l} \le c_2 A_2^{|k|} B_2^{|q|} k^{\alpha k} q^{\beta q}.$$

Отже, умова б) при $\mathbb{W} = \mathbb{S}_\alpha^\beta$ виконується.

Аналогічно переконуємось у виконанні умови б) при $\mathbb{W} = \mathbb{S}_\alpha$ та $\mathbb{W} = \mathbb{S}^\beta$.

Теорему доведено.

Зважаючи тепер на властивості перетворення Фур'є у просторах типу S, безпосередньо з теореми 1 та рівності (2) одержуємо таке твердження.

Теорема 2. *Функція Гріна $G(t,\tau;\cdot)$, $0 \le \tau < t \le T$, гіперболічної за Шиловим системи* (1) *є згортувачем у кожному векторному просторі типу S, при цьому*

$$(G * \varphi)(t,\tau;\cdot) = F^{-1}\big[\,\overline{\theta_\tau^t(\xi)}F[\varphi](\xi)\big](t,\tau;\cdot) \quad \forall \varphi \in \mathbb{W}.$$

4. Задача Коші у просторах типу S. Нехай, як і раніше, $\mathbb{W}$ — один із векторних просторів типу S. Зафіксуємо φ з $\mathbb{W}$ і для системи (1) задамо початкову умову

$$u(t;\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{W} \varphi(\cdot). \tag{8}$$

Задача полягає у знаходженні класичних розв'язків системи (1) у просторі $\mathbb{W}$, які задовольняють початкову умову (8) і неперервно залежать від початкових даних.

Теорема 3. *Задача Коші для гіперболічної системи* (1) *з початковою умовою* (8) *коректно розв'язна на множині $\Pi_{(0;T]}$. Її класичний розв'язок зображується формулою*

$$u(t;x) = \overline{G(t,0;x)} * \varphi(x), \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]},$$

і при кожному фіксованому $t \in [0;T]$ є елементом простору $\mathbb{W}$.

Доведення. Оскільки нас цікавлять розв'язки системи (1), які швидко спадають на нескінченності, то, подіявши на (1) класичним перетворенням Фур'є, одержимо відповідну двоїсту систему (4), в якій $v = F[u] \equiv \tilde{u}$. Зважаючи на властивості оператора F (див. п. 2), приходимо до висновку, що питання про розв'язність системи (1) у просторі $\mathbb{W}$ рівносильне питанню про розв'язність (4) у просторі $F[\mathbb{W}]$.

Розв'язавши систему (4) методом побудови матриціанта, одержимо її загальний розв'язок $v(t;\cdot) = \theta_0^t(\cdot)c(\cdot)$, $t \in (0;T]$. Звідси, згідно з класичною теоремою Коші, знаходимо, що функція

$$v(t;\cdot) = \theta_0^t(\cdot)\tilde{\varphi}(\cdot), \quad t \in (0;T],$$

— єдиний розв'язок системи (4), який задовольняє початкову умову

$$v(t;\cdot)\,\big|_{t=0} = \tilde{\varphi}(\cdot).$$

Далі, згідно з теоремою 1, цей розв'язок при кожному фіксованому t з $(0;T]$ належить простору $F[\mathbb{W}]$ і неперервно залежить від початкових даних у $F[\mathbb{W}]$.

Обґрунтуємо тепер виконання граничного співвідношення

$$v(t;\cdot) \underset{t\to+0}{\overset{F[W]}{\longrightarrow}} \tilde{\varphi}(\cdot). \tag{9}$$

Для цього, згідно з критерієм збіжності у просторах типу S, достатньо встановити такі твердження:

1) $\forall \mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n\ \forall q\in\mathbb{Z}_+^n : \partial_\xi^q v(t;\xi) \underset{t\to+0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} \partial_\xi^q\tilde{\varphi}(\xi)$;

2) функція $v(t;\cdot)$ обмежена у просторі $F[\mathbb{W}]$ за параметром t при $0<t<1$.

Використовуючи формулу Лейбніца диференціювання добутку, отримуємо

$$\partial_\xi^q v(t;\xi) = \theta_0^t(\xi)\partial^q\tilde{\varphi}(\xi) + \sum_{l<q} C_q^l \partial_\xi^{q-l}\theta_0^t(\xi)\partial^l\tilde{\varphi}(\xi).$$

Звідси, на підставі співвідношень

$$\theta_0^t(\xi) \underset{t\to+0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} E, \qquad \sup_{t\in(0;1),\,\xi\in\mathbb{K}} \Big\{ t^{-1}\big|\partial_\xi^{q-l}\theta_0^t(\xi)\big|\,\big|\partial^l\tilde{\varphi}(\xi)\big|\Big\} < +\infty \quad \text{при} \quad l\neq q,$$

які одержуються безпосередньо з рівності (3), твердження про почленне диференціювання рівномірно збіжних рядів та властивості про середнє значення визначеного інтеграла від неперервної функції, переконуємось у справедливості твердження 1.

Щодо твердження 2, то у випадку $\mathbb{W}=\mathbb{S}_\alpha^\beta$ воно набирає вигляду

$$\exists A>0 \quad \exists B>0 \quad \exists c>0 \quad \forall\{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n \quad \forall t\in(0;1) \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n :$$
$$\big|\xi^k\partial_\xi^q v(t;\xi)\big| \le cA^{|k|}B^{|q|}k^{\alpha k}q^{\beta q}.$$

Оскільки $\tilde{\varphi}\in\mathbb{S}_\alpha^\beta$, то

$$\big|\xi^k\partial^q\tilde{\varphi}(\xi)\big| \le c_0A_0^{|k|}B_0^{|q|}k^{\alpha k}q^{\beta q}, \qquad \{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n, \quad \xi\in\mathbb{R}^n.$$

Тоді на підставі леми 1 для $\{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ і $t\in(0;1)$ з оцінки (7) знаходимо

$$\big|\xi^k\partial_\xi^q v(t;\xi)\big| \le c\big(2\sqrt{n}\big)^\gamma(2B)^{|q|}\sum_{|l|=0}^{|q|}\left(|\xi^k\partial^l\tilde{\varphi}(\xi)| + \sum_{j=1}^n|\xi_j^{k_j+\gamma}\partial^l\tilde{\varphi}(\xi)|\right) \le$$
$$\le cc_0\big(2\sqrt{n}\big)^\gamma(2BB_0)^{|q|}q^{\alpha q}\sum_{|l|=0}^{|q|}\left(A_0^{|k|}k^{\beta k} + \sum_{j=1}^n A_0^{k_j+\gamma}(k_j+\gamma)^{\beta(k_j+\gamma)}\right) \le$$
$$\le c_1A_1^{|k|}B_1^{|q|}k^{\beta k}q^{\alpha q}$$

(тут додатні сталі $c_1,\ A_1$ і B_1 не залежать від t і ξ).

Отже, у випадку $\mathbb{W}=\mathbb{S}_\alpha^\beta$ твердження 2 справджується.

Справедливість твердження 2 при $\mathbb{W}=\mathbb{S}_\alpha$ і $\mathbb{W}=\mathbb{S}^\beta$ встановлюється аналогічно.

Враховуючи тепер теорему 2, приходимо до твердження теореми 3.

Теорему доведено.

Висновок. Еволюційні процеси з відсутнім зовнішнім впливом, які описуються гіперболічними за Шиловим системами в рамках просторів типу S, з плином часу спроможні щодо просторової змінної зберігати ті якісні характеристики, які вони мали на початковому етапі еволюції.

5. Класи коректності задачі Коші. Розглянемо питання про коректну розв'язність задачі Коші для гіперболічної систем (1) з початковою умовою

$$u(t;\cdot)|_{t=0} = f, \qquad f \in \mathbb{S}_0^{\beta\prime}, \quad \beta > 1, \tag{10}$$

яка розуміється у сенсі слабкої збіжності у просторі $\mathbb{S}_0^{\beta\prime}$.

Нам знадобляться такі допоміжні твердження.

Лема 2. *Нехай* $\theta_\tau^t(\cdot)$ *— матрицант системи* (4), *тоді функційна матриця* $\overline{\theta}_\tau^{t\,\circ}(\cdot)$ *— матрицант системи*

$$\partial_t v(t;\xi) = v(t;\xi)\overline{P}^{\circ}(t;\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \le \tau < t \le T$$

(*тут індекс* $\circ$ *означає операцію транспонування*).

Доведення. Враховуючи, що

$$\overline{a \pm b} = \bar{a} \pm \bar{b}, \qquad \overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b}, \qquad (\mathcal{A} \pm \mathcal{B})^{\circ} = \mathcal{A}^{\circ} \pm \mathcal{B}^{\circ}, \qquad (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})^{\circ} = \mathcal{B}^{\circ} \cdot \mathcal{A}^{\circ},$$

де $\{a, b\} \subset \mathbb{C}$, а $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ — матриці, безпосередньо з рівності (3) знаходимо

$$\overline{\theta}_\tau^{t\,\circ}(\cdot) = E + \int_\tau^t \overline{P}^{\circ}(t_1;\cdot)\,dt_1 + \int_\tau^t \left(\int_\tau^{t_1} \overline{P}^{\circ}(t_2;\cdot)dt_2 \overline{P}^{\circ}(t_1;\cdot) \right) dt_1 + \ldots .$$

Звідси одержуємо твердження леми 2.

Лема 3. *Для кожного* φ *з* $\mathbb{S}_0^\beta$, $\beta > 1$, *функція*

$$\psi(t;\cdot) = G^{\circ}(t,0;\cdot) * \varphi(\cdot), \quad t \in (0;T],$$

сильно диференційовна по t *на множині* $(0;T]$ *у просторі* $\mathbb{S}_0^\beta$. *При цьому функційна матриця* $\partial_t G^{\circ}(t,0;\cdot)$ *— згортувач у* $\mathbb{S}_0^\beta$ *і справджується рівність*

$$\partial_t \psi(t;\cdot) = \partial_t G^{\circ}(t,0;\cdot) * \varphi(\cdot), \quad t \in (0;T].$$

Доведення. З огляду на неперервність відображення $F: S_\alpha^\beta \to S_\beta^\alpha$ достатньо довести сильну диференційовність за параметром t у просторі $\mathbb{S}_\beta^0$ функції $\tilde{\psi}(t;\cdot)$ на множині $(0;T]$, тобто встановити граничне співвідношення

$$\frac{\tilde{\psi}(t+\triangle t;\cdot) - \tilde{\psi}(t;\cdot)}{\triangle t} \xrightarrow[\triangle t \to 0]{S_\beta^0} \partial_t \tilde{\psi}(t;\cdot), \quad t \in (0;T]. \tag{11}$$

Згідно з (2), диференційовністю матрицанта $\overline{\theta}_0^{t\,\circ}(\cdot)$ за змінною t у звичайному розумінні і теоремою Лагранжа про скінченні прирости, маємо

$$\partial_t \tilde{\psi}(t;\cdot) = \partial_t \overline{\theta}_0^{t\,\circ}(\cdot)\tilde{\varphi}(\cdot), \qquad \frac{\tilde{\psi}(t+\triangle t;\cdot) - \tilde{\psi}(t;\cdot)}{\triangle t} = \partial_t \overline{\theta}_0^{t+\varsigma\triangle t\,\circ}(\cdot)\tilde{\varphi}(\cdot), \quad \varsigma \in (0;1).$$

Звідси, зважаючи на лему 2, приходимо до рівносильності граничного співвідношення (11) із

$$\left(\overline{\theta}_0^{t+\varsigma\triangle t^\circ}(\cdot)\overline{P}^\circ(t+\varsigma\triangle t;\cdot)-\overline{\theta}_0^{t^\circ}(\cdot)\overline{P}^\circ(t;\cdot)\right)\tilde{\varphi}(\cdot)\ \underset{\triangle t\to 0}{\overset{S_\beta^0}{\longrightarrow}}\ 0. \qquad (12)$$

Оскільки

$$\overline{\theta}_0^{t+\varsigma\triangle t^\circ}(\cdot)\overline{P}^\circ(t+\varsigma\triangle t;\cdot)-\overline{\theta}_0^{t^\circ}(\cdot)\overline{P}^\circ(t;\cdot)=\varsigma\triangle t\overline{\theta}_0^{t+\varsigma_1\triangle t^\circ}(\cdot)\overline{P}^\circ(t+\varsigma_1\triangle t;\cdot)+$$

$$+\overline{\theta}_0^{t^\circ}(\cdot)\left(\overline{P}^\circ(t+\varsigma\triangle t;\cdot)-\overline{P}^\circ(t;\cdot)\right),\quad \{\varsigma,\varsigma_1\}\subset(0;1),$$

то (12) виконуватиметься, якщо:

а) вираз $\overline{\theta}_0^{t+\varsigma\triangle t^\circ}(\cdot)\overline{P}^\circ(t+\varsigma\triangle t;\cdot)$ обмежений у просторі $\mathbb{S}_\beta^0$ щодо $\triangle t\in(0;1)$, тобто

$$\exists A>0\quad \exists B>0\quad \exists c>0\quad \forall\{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n\quad \forall\triangle t\in(0;1)\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n:$$

$$|\xi^k\partial_\xi^q\big(\overline{\theta}_0^{t+\varsigma\triangle t^\circ}(\xi)\overline{P}^\circ(t+\varsigma\triangle t;\xi)\big)|\le cA^{|k|}B^{|q|}k^{\beta k};$$

б) $\big(\overline{P}^\circ(t+\varsigma\triangle t;\cdot)-\overline{P}^\circ(t;\cdot)\big)\tilde{\varphi}(\cdot)\ \underset{\triangle t\to 0}{\overset{S_\beta^0}{\longrightarrow}}\ 0.$

Безпосередньо зі структури елементів матриці $\overline{P}(t+\varsigma\triangle t;\cdot)$, обмеженості коефіцієнтів системи (1) на $[0;T]$, оцінки

$$\big|(\xi^p)^{(q)}\big|\le p!(1+|\xi|)^p,\qquad \xi\in\mathbb{R},\quad \{p,q\}\subset\mathbb{Z}_+,$$

і належності $\tilde{\varphi}(\cdot)$ до $\mathbb{S}_\beta^0$ випливає обмеженість виразу $\overline{P}^\circ(t+\varsigma\triangle t;\cdot)\tilde{\varphi}(\cdot)$ щодо $\triangle t\in(0;1)$ у просторі $\mathbb{S}_\beta^0$:

$$\big|\xi^k\partial_\xi^q\big(\overline{P}^\circ(t+\varsigma\triangle t;\xi)\tilde{\varphi}(\xi)\big)\big|\le c_0A_0^{|k|}B_0^{|q|}k^{\beta k},\qquad t\in(0;T],\quad \{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n,\quad \xi\in\mathbb{R}^n \qquad (13)$$

(тут величини $c_0,\ A_0$ і B_0 не залежать від $\xi,\ t,\ \triangle t,\ k$ і q).

Звідси та з леми 1, враховуючи при цьому рівність $\big|\partial_\xi^q\theta_0^t(\xi)\big|=\big|\partial_\xi^q\overline{\theta}_0^{t^\circ}(\xi)\big|$, приходимо до твердження а).

Щодо твердження б), то з огляду на критерій збіжності у просторах типу S і на оцінку (13) його доведення зводиться до обґрунтування граничного співвідношення

$$\partial_\xi^q\big(\overline{P}^\circ(t+\varsigma\triangle t;\xi)-\overline{P}^\circ(t;\xi)\big)\ \underset{\triangle t\to 0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}}\ q\in\mathbb{Z}_+^n,$$

яке стає очевидним, якщо врахувати неперервність коефіцієнтів системи (1) і зображення $P(t;\xi)=\sum_{|k|\le p}\mathcal{A}_k(t)\xi^k$ із відповідними матричними коефіцієнтами $\mathcal{A}_k$.

Згідно з лемою 2, виконується рівність

$$\partial_t\overline{\theta}_0^{t^\circ}(\cdot)=\overline{\theta}_0^{t^\circ}(\cdot)\overline{P}^\circ(t;\cdot),\quad t\in(0;T].$$

Враховуючи тепер теорему 1 і те, що елементи матриці $\overline{P}(t;\cdot)$ щодо просторової змінної — мультиплікатори у кожному просторі типу S, приходимо до висновку, що $\partial_t\overline{\theta}_0^{t^\circ}(\cdot),\ t\in(0;T]$, — також мультиплікатор у кожному векторному просторі типу S. Тоді функційна матриця $\partial_tG^\circ(t,0;\cdot)$ — згортувач у $\mathbb{S}_0^\beta$.

Лему доведено.

З твердження леми 3 випливає очевидний наслідок.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $\varphi \in \mathbb{S}^0_\beta$, $\beta > 1$, *тоді вираз* $\overline{\theta}_0^{t\,\circ}(\cdot)\varphi(\cdot)$ *є сильно диференційовним за параметром* t *на* $(0;T]$ *у просторі* $\mathbb{S}^0_\beta$.

Правильним є таке твердження.

Теорема 4. *Нехай* $f \in \mathbb{S}_0^{\beta'}$, $\beta > 1$, *тоді гіперболічна система* (1) *у просторі* $\mathbb{S}_0^{\beta'}$ *має єдиний слабкий розв'язок* u, *який задовольняє відповідну початкову умову* (10) *і неперервно залежить від початкових даних із цього простору. Цей розв'язок зображується формулою*

$$u(t;x) = G(t,0;x) * f, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}. \tag{14}$$

Доведення. Оскільки $G(t,0;\cdot)$ при кожному фіксованому t з $(0;T]$ — згортувач у просторі $\mathbb{S}_0^\beta$ (див. теорему 2), то функціонал $u(t;\cdot)$, $t \in (0;T]$, що визначається рівністю (14), є узагальненою параметричною функцією з простору $\mathbb{S}_0^{\beta'}$, якщо $f \in \mathbb{S}_0^{\beta'}$. Покажемо, що функція $u(t;\cdot)$ за параметром t слабко диференційовна на множині $(0;T]$ у просторі $\mathbb{S}_0^{\beta'}$. Для фіксованих t з $(0;T]$ і $\varphi \in \mathbb{S}_0^\beta$ маємо

$$\big\langle u(t+\triangle t;x) - u(t;x), \varphi(x)\big\rangle = \big\langle f, (G(t+\triangle t,0;x) - G(t,0;x))^\circ * \varphi(x)\big\rangle.$$

Звідси, згідно з неперервністю функціонала $f \in \mathbb{S}_0^{\beta'}$ та лемою 3, одержуємо

$$\lim_{\triangle t \to 0} \left\langle \frac{u(t+\triangle t;x) - u(t;x)}{\triangle t}, \varphi(x) \right\rangle = \langle f, \partial_t G^\circ(t,0;x) * \varphi(x)\rangle \equiv \big\langle \partial_t G(t,0;x) * f, \varphi(x)\big\rangle.$$

Далі, якщо $\varphi_\nu(\cdot) \xrightarrow[\nu\to\infty]{S_0^\beta} 0$, то $\partial_t G^\circ(t,0;\cdot) * \varphi_\nu(\cdot) \xrightarrow[\nu\to\infty]{S_0^\beta} 0$, оскільки $\partial_t G^\circ(t,0;\cdot)$ — згортувач у просторі $\mathbb{S}_0^\beta$. Тоді

$$\lim_{\nu\to\infty} \big\langle f, \partial_t G^\circ(t,0;x) * \varphi_\nu(x)\big\rangle = \Big\langle f, \lim_{\nu\to\infty} (\partial_t G^\circ(t,0;x) * \varphi_\nu(x))\Big\rangle = 0.$$

Отже, узагальнена функція $u(t;\cdot)$ слабко диференційовна по t на $(0;T]$ у просторі $\mathbb{S}_0^{\beta'}$, при цьому справджується рівність

$$\partial_t u(t;\cdot) = \partial_t G(t,0;\cdot) * f, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}.$$

Обґрунтуємо тепер виконання у просторі $\mathbb{S}_0^{\beta'}$ рівності

$$F[\partial_t u] = \partial_t F[u], \quad t \in (0;T].$$

Безпосередньо з означення перетворення Фур'є узагальненої функції, наслідку 1 та рівності (2) при $t \in (0;T]$ і $\varphi \in \mathbb{S}_0^\beta$ знаходимо

$$\big\langle F[\partial_t u], F[\varphi](\xi)\big\rangle = (2\pi)^n \big\langle \partial_t u, \varphi(x)\big\rangle =$$
$$= (2\pi)^n \lim_{\triangle t\to 0} \big\langle f, (G(t+\triangle t,0;x) - G(t,0;x))^\circ / \triangle t * \varphi(x)\big\rangle =$$
$$= \lim_{\triangle t\to 0} \Big\langle F[f], (\overline{\theta}_0^{t+\triangle t}(\xi) - \overline{\theta}_0^{t}(\xi))^\circ / \triangle t \cdot F[\varphi](\xi)\Big\rangle = \Big\langle F[f], \partial_t \overline{\theta}_0^{t\,\circ}(\xi) F[\varphi](\xi)\Big\rangle =$$
$$= \big\langle \partial_t \theta_0^t(\xi) F[f], F[\varphi](\xi)\big\rangle = \big\langle \partial_t F[G(t,0;x)] F[f], F[\varphi](\xi)\big\rangle = \big\langle \partial_t F[u], F[\varphi](\xi)\big\rangle.$$

Зважаючи на все це, отримуємо

$$\langle \partial_t u, \varphi(x)\rangle = (2\pi)^{-n}\big\langle \partial_t F[u], F[\varphi](\xi)\big\rangle = (2\pi)^{-n}\big\langle \partial_t \theta_0^t(\xi)F[f], F[\varphi](\xi)\big\rangle =$$
$$= (2\pi)^{-n}\Big\langle F[f], \partial_t \overline{\theta}_0^{t\,\circ}(\xi)F[\varphi](\xi)\Big\rangle = (2\pi)^{-n}\Big\langle F[f], \overline{\theta}_0^{t\,\circ}(\xi)\overline{P}^{\circ}(t;\xi)F[\varphi](\xi)\Big\rangle =$$
$$= (2\pi)^{-n}\Big\langle \theta_0^t(\xi)F[f], \overline{P}^{\circ}(t;\xi)F[\varphi](\xi)\Big\rangle = (2\pi)^{-n}\Big\langle F[u], F[\overline{P}^{\circ}(t;i\partial_x)\varphi(x)]\Big\rangle =$$
$$= \Big\langle u, \overline{P}^{\circ}(t;i\partial_x)\varphi(x)\Big\rangle = \big\langle P(t;i\partial_x)u, \varphi(x)\big\rangle, \qquad t\in(0;T], \quad \varphi\in\mathbb{S}_0^{\beta}.$$

Таким чином, ми встановили, що узагальнена функція u, яка визначається рівністю (14), є слабким розв'язком системи (1) на множині $(0;T]$ у просторі $\mathbb{S}_0^{\beta\,\prime}$.

Цей розв'язок задовольняє початкову умову (10). Дійсно, оскільки (див. п. 4)

$$G^{\circ}(t,0;\cdot)*\varphi(\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{S_0^{\beta}} \varphi(\cdot), \quad \varphi\in\mathbb{S}_0^{\beta},$$

то, згідно з неперервністю функціонала f,

$$\lim_{t\to+0}\langle u,\varphi(x)\rangle = \lim_{t\to+0}\big\langle f, G^{\circ}(t,0;x)*\varphi(x)\big\rangle =$$
$$= \Big\langle f, \lim_{t\to+0}(G^{\circ}(t,0;x)*\varphi(x))\Big\rangle = \langle f,\varphi(x)\rangle \quad \text{для} \quad \varphi\in\mathbb{S}_0^{\beta}.$$

Для обґрунтування єдиності розв'язку задачі Коші (1), (10) достатньо показати, що розв'язком цієї задачі з нульовою початковою фунцією $f=0$ у просторі $\mathbb{S}_0^{\beta\,\prime}$ може бути лише $u=0$. Скористаємось тут принципом Хольмгрена [15]. Розглянемо відповідну спряжену задачу Коші у просторі $\mathbb{S}_0^{\beta}$:

$$\partial_t u^*(t;x) = -\overline{P}^{\circ}(t;i\partial_x)u^*(t;x), \quad 0\le t<\tau\le T, \tag{15}$$

$$u^*(t;\cdot) \xrightarrow[t\to\tau-0]{S_0^{\beta}} \varphi(\cdot), \quad \varphi\in\mathbb{S}_0^{\beta} \tag{16}$$

(тут τ і φ — довільно фіксовані величини). Як і при доведенні теореми 3 і леми 3, переконуємося в існуванні розв'язку u^* задачі Коші (15), (16), який при кожному фіксованому $t\in[0;\tau)$ належить простору $\mathbb{S}_0^{\beta}$ і в цьому просторі сильно диференційовний по t на $[0;\tau)$. Оскільки при кожному t з $[0;\tau)$ розв'язок $u(t;\cdot)$ вихідної задачі (1), (10) належить простору $\mathbb{S}_0^{\beta\,\prime}$, а розв'язок $u^*(t;\cdot)$ спряженої задачі (15), (16) — простору $\mathbb{S}_0^{\beta}$, то виразом $\big\langle u(t;\cdot), u^*(t;\cdot)\big\rangle$ на множині $(0;\tau)$ коректно визначено функцію $\eta(\cdot)$:

$$\eta(t) = \big\langle u(t;\cdot), u^*(t;\cdot)\big\rangle, \quad t\in(0;\tau).$$

Функція $\eta(\cdot)$ диференційовна на інтервалі $(0;\tau)$. Справді, із слабкої диференційовності функції $u(t;\cdot)$ у просторі $\mathbb{S}_0^{\beta\,\prime}$ і сильної диференційовності $u^*(t;\cdot)$ у $\mathbb{S}_0^{\beta}$ за параметром t на $(0;\tau)$ випливає, що

$$\eta'(t) = \lim_{\triangle t\to0}\triangle\eta(t)/\triangle t = \lim_{\triangle t\to0}\Big(\big\langle u(t+\triangle t;\cdot), u^*(t+\triangle t;\cdot)\big\rangle - \big\langle u(t;\cdot), u^*(t;\cdot)\big\rangle\Big)/\triangle t =$$

$$= \lim_{\triangle t \to 0} \left\langle \frac{u(t+\triangle t;\cdot) - u(t;\cdot)}{\triangle t}, u^*(t+\triangle t;\cdot) \right\rangle + \lim_{\triangle t \to 0} \left\langle u(t;\cdot), \frac{u^*(t+\triangle t;\cdot) - u^*(t;\cdot)}{\triangle t} \right\rangle =$$

$$= \big\langle \partial_t u(t;\cdot), u^*(t;\cdot) \big\rangle + \big\langle u(t;\cdot), \partial_t u^*(t;\cdot) \big\rangle, \quad t \in (0;\tau).$$

Звідси, згідно з означенням розв'язку системи, отримуємо

$$\eta'(t) = \big\langle \partial_t u(t;x), u^*(t;x) \big\rangle - \Big\langle u(t;x), \overline{P}^{\circ}(t;i\partial_x) u^*(t;x) \Big\rangle =$$

$$= \big\langle P(t;i\partial_x) u(t;x), u^*(t;x) \big\rangle - \big\langle P(t;i\partial_x) u(t;x), u^*(t;x) \big\rangle = 0, \quad t \in (0;\tau).$$

Отже, функція $\eta(\cdot)$ є сталою на $(0;\tau)$, тобто

$$\big\langle u(t;x), u^*(t;x) \big\rangle = c \quad \forall t \in (0;\tau). \tag{17}$$

Спрямовуючи t до $+0$ і враховуючи при цьому початкову умову (10) та рівність $f = 0$, дістаємо

$$c = \lim_{t \to +0} \big\langle u(t;x), u^*(t;x) \big\rangle = \big\langle f, u^*(0;x) \big\rangle = 0.$$

Тоді рівність (17) набирає вигляду

$$\big\langle u(t;x), u^*(t;x) \big\rangle = 0 \quad \forall t \in [0;\tau).$$

Спрямовуючи тепер t до $\tau - 0$ і зважаючи на співвідношення (16), приходимо до рівності

$$\big\langle u(\tau;x), \varphi(x) \big\rangle = 0 \quad \forall \tau \in (0;T] \quad \forall \varphi \in \mathbb{S}_0^{\beta},$$

яка з огляду на довільність τ і φ означає рівність $u(t;\cdot) = 0$ на $(0;T]$ у просторі $\mathbb{S}_0^{\beta\prime}$.

Єдиність розв'язку задачі Коші (1), (10) доведено.

На завершення обґрунтуємо неперервну залежність розв'язку задачі Коші (1), (10) від початкових даних у просторі $\mathbb{S}_0^{\beta\prime}$. Розглянемо послідовність $\{f_\nu, \nu \ge 1\} \subset \mathbb{S}_0^{\beta\prime}$, яка слабко прямує до нуля в $\mathbb{S}_0^{\beta\prime}$:

$$\big\langle f_\nu, \varphi(x) \big\rangle \underset{\nu \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{S}_0^{\beta}. \tag{18}$$

Нехай $\{u_\nu, \nu \ge 1\}$ — відповідна послідовність розв'язків задачі Коші (1), (10):

$$u_\nu(t;x) = G(t,0;x) * f_\nu, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}.$$

Оскільки $\psi(t;\cdot) = G^{\circ}(t,0;x) * \varphi(\cdot) \in \mathbb{S}_0^{\beta}$, $t \in (0;T]$, для $\varphi \in \mathbb{S}_0^{\beta}$, то безпосередньо з (18) знаходимо

$$\big\langle u_\nu(t;x), \varphi(x) \big\rangle = \big\langle f_\nu, \psi(t;x) \big\rangle \underset{\nu \to \infty}{\longrightarrow} 0, \qquad t \in (0;T], \quad \varphi \in \mathbb{S}_0^{\beta}.$$

Теорему доведено.

Наслідок 2. *Кожен векторний простір* $\mathbb{S}_0^{\beta\prime}$, $\beta > 1$, *є класом коректності задачі Коші для гіперболічної за Шиловим системи* (1).

Приклад. Розглянемо класичне рівняння коливання необмеженої струни

$$\partial_t^2 u(t;x) = a^2 \partial_x^2 u(t;x), \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (t;x) \in (0;T] \times \mathbb{R},$$

яке шляхом уведення функцій $u_1 = u$ і $u_2 = \partial_t u$ зводиться до гіперболічної системи (1) зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} &\partial_t u_1(t;x) = u_2(t;x), \\ &\partial_t u_2(t;x) = a^2 \partial_x^2 u_1(t;x), \quad (t;x) \in (0;T] \times \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{19}$$

Матрицант відповідної двоїстої за Фур'є системи є таким [1]:

$$\theta_\tau^t(\xi) = \begin{pmatrix} \cos(a(t-\tau)\xi) & \dfrac{\sin(a(t-\tau)\xi)}{a\xi} \\ a\xi \sin(a(t-\tau)\xi) & \cos(a(t-\tau)\xi) \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \tau < t \le T, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Згідно з теоремою 1, елементи матриці $\theta_\tau^t(\cdot)$ — мультиплікатори у кожному просторі типу S. Тоді існує обернене перетворення Фур'є елементів матриці $\theta_\tau^t(\cdot)$ у кожному просторі типу S', причому

$$G(t,\tau;x) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\big(\delta(x - a(t-\tau)) + \delta(x + a(t-\tau))\big) & \dfrac{1}{2a}\theta(a(t-\tau) - |x|) \\ \dfrac{a}{2}\big(\delta(x - a(t-\tau)) - \delta(x + a(t-\tau))\big)'_x & \dfrac{1}{2}\big(\delta(x - a(t-\tau)) + \delta(x + a(t-\tau))\big) \end{pmatrix}$$

(тут $\delta(\cdot)$ — дельта-функція Дірака, а $\theta(\cdot)$ — тета-функція Хевісайда; обчислення $F^{-1}[\theta_\tau^t(\xi)]$ у просторі розподілів Дірака наведено у [12]). Елементи матриці $G(t,\tau;\cdot)$ — згортувачі у просторах типу S (див. теорему 2).

Для системи (19) задамо початкову умову

$$u_j(t;\cdot) \xrightarrow[t \to +0]{W} \varphi_j(\cdot), \qquad \varphi_j(\cdot) \in W, \quad j \in \{1;2\} \tag{20}$$

(тут W — один із просторів типу S).

Як стверджується в теоремі 3, задача Коші (19), (20) коректно розв'язна, компоненти $u_j(t;\cdot)$ її розв'язку при кожному $t \in (0;T]$ належать простору W і мають вигляд

$$u_1(t;x) = \frac{1}{2}\left(\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at) + \frac{1}{a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi_2(\xi)\,d\xi\right),$$

$$u_2(t;x) = \frac{1}{2}\Big(a\big(\varphi_1(x+at) - \varphi_1(x-at)\big)'_x + \varphi_2(x+at) - \varphi_2(x-at)\Big).$$

Зокрема, якщо $W = S_{1/2}^{1/2}$, а $\varphi_1(x) = e^{-x^2}$ і $\varphi_2(x) = 2xe^{-x^2}$, то відповідна задача Коші (19), (20) у просторі $S_{1/2}^{1/2}$ має такий розв'язок:

$$u_1(t;x) = \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{a}\right)e^{-(x+at)^2} + \left(1 + \frac{1}{a}\right)e^{-(x-at)^2}\right),$$

$$u_2(t;x) = (1-a)(x+at)e^{-(x+at)^2} + (1+a)(x-at)e^{-(x-at)^2}.$$

Далі, для системи (19) у просторі $\mathbb{S}_0^{\beta'}$, $\beta > 1$, розглянемо задачу Коші із початковими умовами

$$u_1(t;\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{S_0^{\beta'}} f_{x_0}^{\gamma}, \qquad u_2(t;\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{S_0^{\beta'}} |\cdot|', \tag{21}$$

у яких $f_{x_0}^{\gamma}(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^{\gamma k}} \delta^{(k)}(\cdot - x_0)$ — узагальнена функція з $S_0^{\beta'}$ з фіксованими параметрами $x_0 \in \mathbb{R}$ та $\gamma > \beta$ (зазначимо, що $f_{x_0}^{\gamma} \overline{\in} S_0'$).

Згідно з твердженням теореми 4, задача Коші (19), (21) коректно розв'язна у просторі $\mathbb{S}_0^{\beta'}$, її слабким розв'язком є

$$u_1(t;x) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|) * |x|' + \frac{1}{2}\big(\delta(x-at) + \delta(x+at)\big) * f_{x_0}^{\gamma},$$

$$u_2(t;x) = \frac{1}{2}\big(\delta(x-at) + \delta(x+at)\big) * |x|' + \frac{a}{2}\big(\delta(x-at) - \delta(x+at)\big)'_x * f_{x_0}^{\gamma},$$

або, що те саме,

$$u_1(t;x) = \frac{1}{2a}\big(|x+at| - |x-at|\big) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\gamma k}} \big(\delta(x-x_0-at) + \delta(x-x_0+at)\big)_x^{(k)},$$

$$u_2(t;x) = \frac{1}{2}\big(|x-at| + |x+at|\big)'_x + \frac{a}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\gamma k}} \big(\delta(x-x_0-at) - \delta(x-x_0+at)\big)_x^{(k+1)}.$$

Література

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
2. *Petrowsky I.* Über das Cauchysche Problem für System von partiellen Differentialgleichungen // Mat. Sb. – 1937. – **2**, № 44. – P. 815 – 870.
3. *Leray J.* Hyperbolic differential equations. – Princeton, 1952. – 238 p.
4. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – 5-е изд. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
6. *Ладыженская О. А.* Смешанная задача Коши для гиперболических уравнений. – М.: Гостехиздат, 1953. – 279 с.
7. *Гординг Л.* Задача Коши для гиперболических уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 122 с.
8. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 428 с.
9. *Каленюк П., Нитребич З.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Львів. політехніка, 2002. – 292 с.
10. *Елтышева Н. А.* О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости // Мат. сб. – 1988. – **135**, № 2. – С. 186 – 209.
11. *Филиновский А. В.* Стабилизация решений первой смешанной задачи для волнового уравнения в областях с некомпактными границами // Мат. сб. – 2002. – **193**, № 9. – С. 107 – 138.
12. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – 2-е изд. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
13. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
14. *Кашпировский А. И.* О совпадении пространств $S_\alpha \cap S^\beta$ и S_α^β // Функцион. анализ и его прил. – 1980. – **14**, № 2. – С. 60.
15. *Шубин М. А.* Лекции об уравнениях математической физики. – 2-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2003. – 303 с.

Одержано 18.11.18