УДК 517.542

Р. В. Бородич (Гомел. гос. ун-т им. Ф. Скорины, Беларусь)

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

We establish the structure of normghal subgroups in θ-Frattini extensions, where θ is a subgroup functor. For a local Fitting structure $\mathfrak{F}$ containing all nilpotent groups, it is shown that, in a solvable group, the crossing of $\mathfrak{F}$-abnormal maximal θ-subgroups not containing $\mathfrak{F}$-radicals and not belonging to $\mathfrak{F}$ coincides with the crossing of $\mathfrak{F}$-abnormal maximal θ-subgroups and belongs to the structure of $\mathfrak{F}$.

Встановлено будову нормальних підгруп у θ-фраттінієвих розширеннях, де θ — підгруповий функтор. Для локальної формації Фіттінга $\mathfrak{F}$, що містить усі нільпотентні групи, показано, що у розв'язуваній групі перетин $\mathfrak{F}$-абнормальних максимальних θ-підгруп, що не містять $\mathfrak{F}$-радикала і не належать $\mathfrak{F}$, збігається з перетином $\mathfrak{F}$-абнормальних максимальних θ-підгруп і належить формації $\mathfrak{F}$.

1. Введение. В теории конечных групп хорошо известна классическая работа Фраттини [1], получившая свое развитие в различных направлениях. В работе [2] Гашюцем исследовались пересечения абнормальных максимальных подгрупп. Дескинс [3] описал пересечения максимальных подгрупп с ограничениями на индексы. Пересечение всех ненильпотентных максимальных подгрупп изучал Л. И. Шидов [4]. В. А. Ведерников и Н. Г. Дука [5] установили строение пересечения всех абнормальных ненильпотентных максимальных подгрупп группы. В. С. Монахов [6] исследовал пересечение максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга.

Следующий этап в исследовании данного направления связан с развитием теории формаций и введением понятия $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппы [7, 8]. Пересечения таких максимальных подгрупп для разрешимых групп изучил В. В. Шлык [9], а для произвольных групп — Л. А. Шеметков [8] и М. В. Селькин [10]. Далее пересечения различных $\mathfrak{F}$-абнормальных подгрупп группы были детально рассмотрены Л. А. Шеметковым и А. Н. Скибой [11], М. В. Селькиным [10], Баллестером-Болинше и Перес-Рамош [12] и др.

Дальнейшее развитие теории пересечений максимальных подгрупп связано с применением функторного метода (см. [10, 13–15]).

Данная работа посвящена объединению формационного и функторного методов в исследовании пересечений максимальных подгрупп.

2. Определения и обозначения. Подгруппа H группы G называется:

пронормальной, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x\rangle$;

абнормальной, если $x \in \langle H, H^x\rangle$ для любого $x \in G$.

Формацией называют класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольный непустой класс групп. Сопоставим с любой группой $G \in \mathfrak{X}$ некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Согласно [14] будем говорить, что τ — подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор (подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$), если для любого эпиморфизма $\phi\colon A \mapsto B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^{\phi} \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \tau(A)$ и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$.

© Р. В. БОРОДИЧ, 2019

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ — класс всех групп, то подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор называют просто подгрупповым функтором.

В дальнейшем функтор θ будем называть:

1) абнормально полным, если для любой группы G среди множества $\theta(G)$ содержатся все абнормальные подгруппы группы G;

2) абнормальным, если $\theta(G)\backslash\{G\}$ совпадает с множеством всех абнормальных подгрупп;

3) тривиальным, если функтор θ выделяет в группе G все ее подгруппы;

4) N-свободным, если в группе G функтор θ выделяет все подгруппы группы G вместе с самой группой, не содержащие нормальную подгруппу N группы G.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (т. е. пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

Максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение конечных групп. Рассмотрим максимальные подгруппы среди подгрупп, имеющих заданное свойство, и изучим их пересечения и влияние на строение группы.

В дальнейшем для каждой группы G будем фиксировать некоторую ее группу операторов. Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Подгруппа H группы G называется максимальной A-допустимой подгруппой в G, если H является A-допустимой и любая собственная A-допустимая подгруппа из G, содержащая H, совпадает с H.

Пусть θ — подгрупповой функтор. Обозначим $\Phi_\theta(G, A) = \cap M_G$, где M пробегает множество всех максимальных A-допустимых θ-подгрупп из G. Если в G таких подгрупп нет, то положим $\Phi_\theta(G, A) = G$.

В случае, когда θ — тривиальный функтор, подгруппа $\Phi_\theta(G, A)$ совпадает с подгруппой $\Phi(G, A)$, некоторые свойства которой были описаны в [18]. Если функтор θ абнормальный, то подгруппу $\Phi_\theta(G, A)$ будем обозначать $\Delta(G, A)$ (операторный аналог подгруппы Гашюца $\Delta(G)$, введенной в [2]).

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (т. е. пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

Необходимо отметить, что не всегда множество всех максимальных подгрупп группы G будет совпадать со множеством всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G относительно некоторой группы операторов A (см. работу [19]).

Все рассматриваемые группы конечны. В дальнейшем будем использовать терминологию, принятую в монографиях [10, 13, 14, 16].

Если θ — некоторый подгрупповой функтор, то через $\bar{\theta}$ будем обозначать дополнительный к θ функтор, т. е. $M \in \bar{\theta}(G)$ тогда и только тогда, когда максимальная подгруппа M группы G не входит в $\theta(G)$ и всегда $G \in \bar{\theta}(G)$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначим $\mathfrak{F}$-корадикал группы G — пересечение всех нормальных подгрупп N группы, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ — формация, замкнутая относительно произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, то наибольшую нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу называют $\mathfrak{F}$-радикалом группы G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Главный фактор H/K группы G называется фраттиниевым, если $H/K \subseteq \Phi(G/K)$. Главный фактор H/K группы G называется $\mathfrak{X}$-центральным [11], если

$[H/K](G/C_G(H/K) \in \mathfrak{X}$. Произведение всех нормальных подгрупп из G, у которых G-главные факторы являются $\mathfrak{X}$-центральными в G, называется $\mathfrak{X}$-гиперцентром группы G и обозначается через $Z_{\mathfrak{X}}(G)$.

Формация Фиттинга — это нормально наследственная в смысле А. И. Мальцева формация $\mathfrak{F}$, замкнутая относительно произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп.

Формацию $\mathfrak{F}$ называют насыщенной, если всегда из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$.

Введем следующие обозначения:

$\overline{\Phi}_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G, A) = \cap \{M_G \mid M \not\supseteq G^{\mathfrak{F}},\ M \notin \mathfrak{F},\ M \in \theta(G),\ M - A\text{-допустимая подгруппа}\}$;

$\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G, A) = \cap \{M_G \mid M \not\supseteq G^{\mathfrak{F}},\ M \in \theta(G),\ M - A\text{-допустимая подгруппа}\}$;

$\Phi_{\theta}(G, A) = \cap \{M_G \mid M \in \theta(G),\ M - A\text{-допустимая подгруппа}\}$.

Рассмотрим частные случаи. В случае тривиальности группы операторов A определенные выше подгруппы превращаются соответственно в $\overline{\Phi}_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G)$, $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G)$, $\Phi_{\theta}(G)$.

Пересечение всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных θ-подгрупп группы G (и не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$) обозначаем $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G)$ $\left(\overline{\Phi}_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G)\right)$ [17].

Подгруппу $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G)$ в случае, когда θ — абнормальный функтор, обозначим $\Phi_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G)$ [17]. Если вместо функтора θ рассматривать тривиальный функтор, то подгруппа $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G)$ совпадает с подгруппой $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ [10, 13, 14], а если к тому же $\mathfrak{F}$ — формация всех нильпотентных групп, то подгруппа $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G)$ совпадает с подгруппой Гашюца $\Delta(G)$ [2], равной пересечению всех абнормальных максимальных подгрупп группы G.

Всегда полагаем, что пересечение пустого множества подгрупп из G совпадает с самой группой G.

В общем случае подгруппа $\Phi_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ отлична от подгруппы $\Delta^{\mathfrak{F}}(G, A)$.

Пример. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация единичных групп, A — единичная группа операторов, G — группа, в которой $\Delta(G) \neq \Phi(G)$. Тогда в группе G существуют как $\mathfrak{N}$-нормальные, так и $\mathfrak{N}$-абнормальные $\mathfrak{F}$-абнормальные подгруппы группы G.

3. Вспомогательные результаты.

Лемма 3.1 [18, с. 64]**.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $\big(|G|, |A|\big) = 1$. Если G имеет свойство C_π, то G содержит A-допустимую S_π-подгруппу.*

Лемма 3.2 [16, с. 179]**.** *Если подгруппа H пронормальна в G, то подгруппа $N_G(H)$ абнормальна в G.*

Лемма 3.3. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $\big(|G|, |A|\big) = 1$, θ — абнормально полный подгрупповой функтор, $K \subseteq N \triangleleft G$, $K \triangleleft G$, N — A-допустимая подгруппа группы G и $K \subseteq \Phi_\theta(G, A)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если N/K π-замкнута, то и N π-замкнута*;

2) $O_{p'}(N/K) = O_{p'}(N)/K$.

Доказательство. Пусть N/K имеет нормальную S_π-подгруппу H/K. Нетрудно заметить, что $S_{\pi'}$-подгруппа R из K является $S_{\pi'}$-подгруппой в H. По лемме 3.1 H содержит A-допустимую S_π-подгруппу S и любые две такие подгруппы сопряжены в H. По обобщенной лемме Фраттини $G = N_G(S)H$. С учетом того, что $H = SR$, получаем $G = N_G(S)R$. Тогда по лемме 3.2 подгруппа $N_G(S)$ является абнормальной подгруппой группы G. Следовательно, $N_G(S)$ содержится в некоторой максимальной θ-подгруппе M из G. Поэтому $G = MR$. Так как $R \subseteq \Phi_\theta(G, A) \subseteq M$, то $G = M$. Получили противоречие. Следовательно, S нормальна в G.

Второе утверждение леммы является следствием первого при $\pi = p'$.

Лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4 [16, с. 38]**.** *Пусть f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.*

Теорема 3.1 [16, с. 96]**.** *Для любой группы G и любой ступенчатой формации $\mathfrak{F}$ имеет место равенство $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi(G) = Z_{\mathfrak{F}}(G/\Phi(G))$.*

Теорема 3.2 [16, с. 41]**.** *Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ S-замкнута (S_n-замкнута) тогда и только тогда, когда для любого простого p формация $f(p)$ S-замкнута (S_n-замкнута).*

Лемма 3.5. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $\big(|G|, |A|\big) = 1$, $\mathfrak{F}$ — ступенчатая формация, θ — абнормально полный регулярный функтор, K — некоторая нормальная A-допустимая подгруппа группы G. Пусть каждая максимальная θ-подгруппа группы G, не содержащая K, является $\mathfrak{F}$-нормальной. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_\theta(G, A)$;

2) $K/K \cap \Phi_\theta(G, A) \subseteq Z_{\mathfrak{F}}\Big(G/\big(K \cap \Phi_\theta(G, A)\big)\Big)$.

Доказательство. Очевидно, $K \cap G^{\mathfrak{F}}$ содержится во всех максимальных θ-подгруппах, содержащих $G^{\mathfrak{F}}$ и не содержащих $G^{\mathfrak{F}}$, а следовательно, и в $\Phi_\theta(G, A)$.

Пусть R/S — главный фактор группы G, причем $R \subseteq K$, $K \cap \Phi_\theta(G, A) \subseteq S$. Поскольку

$$R \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq S,$$

то имеем G-изоморфизм

$$RG^{\mathfrak{F}}/SG^{\mathfrak{F}} \simeq R/(R \cap SG^{\mathfrak{F}}) = R/S(R \cap G^{\mathfrak{F}}) = R/S.$$

Так как $G/SG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то $RG^{\mathfrak{F}}/SG^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-централен в $G/SG^{\mathfrak{F}}$, а значит, и в G. Но тогда R/S $\mathfrak{F}$-централен в G.

Лемма 3.5 доказана.

Лемма 3.6. *Пусть группа G имеет группу операторов A, θ — подгрупповой функтор и $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Тогда $\Delta^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \Phi^{\mathfrak{F}}(G, A) \subseteq \Phi^{\mathfrak{F}}_\theta(G, A)$.*

Доказательство. Второе включение очевидно. Докажем первое. Предположим, что $\Delta^{\mathfrak{F}}(G) \nsubseteq \Phi^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Тогда существует максимальная A-допустимая подгруппа M, не содержащая $G^{\mathfrak{F}}$, такая, что $M \nsupseteq \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$. Так как $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ является характеристической подгруппой, то $M\Delta^{\mathfrak{F}}(G) = G$. Поскольку M — максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая $G^{\mathfrak{F}}$, то она содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе K группы G. Тогда получаем

$$G = M\Delta^{\mathfrak{F}}(G) = K\Delta^{\mathfrak{F}}(G) = K.$$

Полученное противоречие и доказывает лемму.

Лемма 3.7. *Пусть группа G имеет группу операторов A, θ — подгрупповой функтор, N — нормальная A-допустимая подгруппа из G и $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\Phi^{\mathfrak{F}}_\theta(G, A)N/N \subseteq \Phi^{\mathfrak{F}}_\theta(G/N, A)$;

2) *если* $N \subseteq \Phi^{\mathfrak{F}}_\theta(G, A)$, *то* $\Phi^{\mathfrak{F}}_\theta(G, A)/N = \Phi^{\mathfrak{F}}_\theta(G/N, A)$.

Доказательство. Пусть N — нормальная A-допустимая подгруппа группы G. Так как θ — подгрупповой функтор, то из $M \in \theta(G)$ следует, что $MN/N \in \theta(G/N)$. Если M — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа группы G, то MN/N — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа группы G/N.

Допустим, что N — A-допустимая нормальная подгруппа группы G и $N \subseteq \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Поскольку θ — подгрупповой функтор, то из того, что M/N — $\mathfrak{F}$-абнормальная A-допустимая максимальная θ-подгруппа группы G/N, следует, что M — $\mathfrak{F}$-абнормальная A-допустимая θ-подгруппа группы G.

Лемма 3.7 доказана.

4. О пересечении A-допустимых максимальных подгрупп.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $\big(|G|, |A|\big) = 1$, θ — абнормально полный подгрупповой функтор, N — нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi_\theta(G, A) \in \mathfrak{F}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям*:

1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $N_2 \subseteq \Phi_\theta(G, A)$.

Доказательство. Пусть $D = N \cap \Phi_\theta(G, A)$, $\omega = \pi(\mathfrak{F})$. Поскольку N/D является ω-группой, то по лемме 3.7 подгруппа N представима в виде $N = N_1 \times N_2$, где N_1 — S_ω-подгруппа из N. Так как $N_2 \subseteq \Phi_\theta(G, A)$, то $N/D \simeq N_1/D_1 \in \mathfrak{F}$, где $D_1 = N_1 \cap \Phi_\theta(G, A)$. Пусть $p \in \omega$. Так как $N_1/D_1 \in \mathfrak{F}$, то, используя леммы 3.3 и 3.4, получаем

$$(N_1/D_1)/F_p(N_1/D_1) = N_1/D_1/F_p(N_1)/D_1 \simeq N_1/F_p(N_1) \in f(p).$$

Поскольку последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 3.4 подгруппа N_1 входит в $\mathfrak{F}$.

Теорема 4.1 доказана.

***Следствие* 4.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, группа G имеет группу операторов A такую, что $\big(|G|, |A|\big) = 1$, θ — абнормально полный подгрупповой функтор. Если N — нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi_\theta(G, A) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.*

***Следствие* 4.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $\big(|G|, |A|\big) = 1$, N — нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, где $N_1 \in \mathfrak{F}$, $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$, $N_2 \subseteq \Delta(G, A)$.*

***Следствие* 4.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, группа G имеет группу операторов A такую, что $\big(|G|, |A|\big) = 1$. Если N — нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.*

***Следствие* 4.4** [20, с. 65]**.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $\big(|G|, |A|\big) = 1$, N — нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi(G, A) \in \mathfrak{F}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, где $N_1 \in \mathfrak{F}$, $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$, $N_2 \subseteq \Phi(G, A)$.*

***Следствие* 4.5.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, θ — абнормально полный подгрупповой функтор, N — нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, где $N_1 \in \mathfrak{F}$, $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$, $N_2 \subseteq \Phi_\theta(G)$.*

***Следствие* 4.6.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, θ — абнормально полный подгрупповой функтор. Если N — нормальная подгруппа группы G и $N/N\cap\Phi_\theta(G)\in\mathfrak{F}$, то $N\in\mathfrak{F}$.*

***Следствие* 4.7** [16, с. 38]**.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая насыщенная формация, N — нормальная подгруппа группы G и $N/N\cap\Phi(G)\in\mathfrak{F}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N=N_1\times N_2$, где $N_1\in\mathfrak{F}$, $\pi(N_2)\cap\pi(\mathfrak{F})=\varnothing$, $N_2\subseteq\Phi(G)$.*

Теорема 4.2. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $\bigl(|G|,|A|\bigr)=1$, $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, θ — подгрупповой функтор. Тогда*

$$\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)=Z_{\mathfrak{F}}\bigl(G/\Phi_\theta(G,A)\bigr).$$

Доказательство. Несложно заметить, что $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap G^{\mathfrak{F}}$ содержится во всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных A-допустимых θ-подгруппах и $\mathfrak{F}$-нормальных максимальных A-допустимых θ-подгруппах, а следовательно, в $\Phi_\theta(G,A)$.

Пусть R/S — главный фактор группы G, причем $R\subseteq\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)$, $S\supseteq\Phi_\theta(G,A)$. Поскольку $R\cap G^{\mathfrak{F}}\subseteq\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap G^{\mathfrak{F}}\subseteq S$, то имеем G-изоморфизм

$$RG^{\mathfrak{F}}/SG^{\mathfrak{F}}\simeq R/(R\cap SG^{\mathfrak{F}})=R/S(R\cap G^{\mathfrak{F}})=R/S.$$

Так как $G/SG^{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{F}$, то $RG^{\mathfrak{F}}/SG^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-централен в $G/SG^{\mathfrak{F}}$, а значит, и в G. Но тогда R/S $\mathfrak{F}$-централен в G. Отсюда заключаем, что $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)\subseteq Z_{\mathfrak{F}}\bigl(G/\Phi_\theta(G,A)\bigr)$.

Докажем обратное включение. Поскольку подгруппа Фраттини фактор-группы $G/\Phi_\theta(G,A)$ единична, то, применяя теорему 3.1 и леммы 3.6, 3.7, получаем

$$\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)=\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}\bigl(G/\Phi_\theta(G,A),A\bigr)\supseteq D^{\mathfrak{F}}(G/\Phi_\theta(G,A),A)=Z_{\mathfrak{F}}\bigl(G/\Phi_\theta(G,A)\bigr).$$

Теорема 4.2 доказана.

***Следствие* 4.8.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $\bigl(|G|,|A|\bigr)=1$, $\mathfrak{F}$ — S_n-замкнутая насыщенная формация, θ — подгрупповой функтор. Тогда $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)\in\mathfrak{F}$.*

Теорема 4.3. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $\bigl(|G|,|A|\bigr)=1$, $\mathfrak{F}$ — S_n-замкнутая насыщенная формация, θ — абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)=A\times B$, где $A\in\mathfrak{F}$, $B\subseteq\Phi_\theta(G,A)$, $\pi(B)\cap\pi(\mathfrak{F})=\varnothing$.*

Доказательство. Согласно теореме 4.2, $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)$ является $\mathfrak{F}$-гиперцентром в $G/\Phi_\theta(G,A)$. По следствию 4.8 $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)\in\mathfrak{F}$. Теперь остается применить теорему 4.1.

***Следствие* 4.9.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $\bigl(|G|,|A|\bigr)==1$, $\mathfrak{F}$ — S_n-замкнутая насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, θ — абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)\in\mathfrak{F}$ для любой группы G.*

***Следствие* 4.10** [16, с. 96]**.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — S_n-замкнутая насыщенная формация. Тогда $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)=A\times B$, где $A\in\mathfrak{F}$, $B\subseteq\Phi(G)$, $\pi(B)\cap\pi(\mathfrak{F})=\varnothing$.*

Теорема 4.4. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $\bigl(|G|,|A|\bigr)=1$, $\mathfrak{F}$ — S_n-замкнутая насыщенная формация, θ — абнормально полный подгрупповой функтор, N — нормальная подгруппа группы G. Если $N/N\cap\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)\in\mathfrak{F}$, то N представима в виде прямого произведения $N=N_1\times N_2$, множители которого удовлетворяют условиям:*

1) $N_1\in\mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $N_2 \subseteq \Phi_\theta(G, A)$.

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G. Предположим, что $\Phi_\theta(G, A) \neq 1$. Тогда для $G/\Phi_\theta(G, A)$ теорема справедлива и $N/\Phi_\theta(G, A) = N_1/\Phi_\theta(G, A) \times \times N_2/\Phi_\theta(G, A)$. Остается показать, что $N_1 \in \mathfrak{F}$. Пусть $p \in \pi(N_1)$. Так как $N_1/\Phi_\theta(G, A) \in \mathfrak{F}$, то, используя леммы 3.3 и 3.4, получаем

$$\big(N_1/\Phi_\theta(G, A)\big)/F_p\big(N_1/\Phi_\theta(G, A)\big) = N_1/\Phi_\theta(G, A)/F_p(N_1)/\Phi_\theta(G, A) \simeq$$

$$\simeq N_1/F_p(N_1) \in f(p).$$

Поскольку последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 3.4 подгруппа N_1 входит в $\mathfrak{F}$.

В результате индуктивных рассуждений можно считать, что $\pi(N_1) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $N_2 = 1$. Поэтому достаточно доказать, что $N = N_1 \in \mathfrak{F}$.

Пусть $K = N \cap \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Каждая максимальная θ-подгруппа, не содержащая K, содержит $G^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, в силу леммы 3.5 имеем

$$K/K \cap \Phi_\theta(G, A) \subseteq Z_\infty^{\mathfrak{F}}\big(G/K \cap \Phi_\theta(G, A)\big).$$

Если $K \cap \Phi_\theta(G, A) \neq 1$, то по индукции $N/K \cap \Phi_\theta(G, A) \in \mathfrak{F}$, а значит, согласно теореме 4.1, $N \in \mathfrak{F}$.

Пусть $K \cap \Phi_\theta(G, A) = 1$. Тогда подгруппа K $\mathfrak{F}$-гиперцентральна в группе G. Докажем, что K $\mathfrak{F}$-гиперцентральна и в подгруппе N. Пусть L/S — G-главный pd-фактор группы K. Тогда $G/C \in f(p)$, где $C = C_G(L/S)$, f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Так как по теореме 3.2 формация $f(p)$ является нормально наследственной, то

$$NC/C \simeq N/C_N(L/S) \in f(p).$$

Следовательно, подгруппа N f-стабилизирует G-главный ряд группы K. Это означает, что $K \subseteq Z_\infty^{\mathfrak{F}}(N)$. Отсюда и из $N/K \in \mathfrak{F}$ следует, что $N \in \mathfrak{F}$.

Теорема 4.4 доказана.

***Следствие* 4.11.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $\big(|G|, |A|\big) = = 1$, $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, θ — абнормально полный подгрупповой функтор, N — нормальная подгруппа группы G. Если $N/N \cap \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.*

***Следствие* 4.12.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $\big(|G|, |A|\big) = 1$, $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная насыщенная формация, N — нормальная подгруппа группы G. Если $N/N \cap \Phi_\Delta^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$, то N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, где $N_1 \in \mathfrak{F}$, $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$, $N_2 \subseteq \Delta(G, A)$.*

В случае, когда функтор является тривиальным, из теоремы 4.4 следует результат работы [10].

Замечание. Условие нормальной наследственности локальной формации в теореме является существенным, и его отбросить нельзя. Действительно, если формация $\mathfrak{F}$ не является нормально наследственной, то в ней найдется такая группа G, у которой некоторая нормальная подгруппа N не входит в $\mathfrak{F}$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G, A) = G$. Поэтому $N/N \cap \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G, A) = = N/N \in \mathfrak{F}$. Но отсюда не следует, что $N \in \mathfrak{F}$.

Теорема 4.5. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $\big(|G|,|A|\big) = 1$, $\mathfrak{F}$ — формация, θ — абнормально полный подгрупповой функтор. Если в группе G существуют $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные θ-подгруппы, не принадлежащие $\mathfrak{F}$, то пересечение всех таких подгрупп совпадает с $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)$.*

Доказательство. Предположим, что пересечение $\overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)$ всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных θ-подгрупп группы G, не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$, совпадает с подгруппой $\Phi_\theta(G,A)$. Так как $\Phi_\theta(G,A) \subseteq \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A) \subseteq \overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)$, то $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A) = \overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)$.

Пусть $\overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)$ не совпадает с подгруппой $\Phi_\theta(G,A)$. Тогда $G = M\overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)$, где M — некоторая максимальная A-допустимая θ-подгруппа группы G. Если $M \in \mathfrak{F}$, то $G/\overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A) \in$ $\in \mathfrak{F}$. Отсюда $\overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)$ содержится только в тех максимальных A-допустимых θ-подгруппах, которые содержат $G^{\mathfrak{F}}$, что невозможно. Поэтому M не входит в $\mathfrak{F}$ и является максимальной A-допустимой θ-подгруппой, содержащей $G^{\mathfrak{F}}$. Итак, любая максимальная A-допустимая θ-подгруппа, не содержащая $\overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)$, содержит $G^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $\overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A) \subseteq \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)$.

Теорема 4.5 доказана.

***Следствие* 4.13.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $\big(|G|,|A|\big) = 1$, $\mathfrak{F}$ — S_n-замкнутая насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, θ — абнормально полный подгрупповой функтор. Если в группе G существуют $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные θ-подгруппы, не принадлежащие $\mathfrak{F}$, то пересечение всех таких подгрупп $\overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)$ принадлежит $\mathfrak{F}$.*

В случае, когда θ — тривиальный функтор, из теоремы 4.5 получаем результат работы [10].

5. О пересечении A-допустимых максимальных подгрупп, не содержащих $\mathfrak{F}$-радикал. Введем в рассмотрение подгруппу

$$\overline{\Phi}_{\theta_{\overline{N}}}^{\mathfrak{F}}(G,A) = \cap\big\{M_G \mid M \not\supseteq N,\ M \not\supseteq G^{\mathfrak{F}},\ M \notin \mathfrak{F},\ M \in \theta(G),\ M \text{ — } A\text{-допустимая подгруппа}\big\}.$$

Будем рассматривать случай, когда $N = G_{\mathfrak{F}}$, где $\mathfrak{F}$ — формация, замкнутая относительно произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. В этом случае подгруппу $\overline{\Phi}_{\theta_{\overline{N}}}^{\mathfrak{F}}(G,A)$ будем обозначать $\overline{\Phi}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G,A)$. В случае тривиальности группы операторов A определенная подгруппа превращается в $\overline{\Phi}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)$.

Если в качестве функтора θ рассмотреть тривиальный функтор, то $\overline{\Phi}_{\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$ — пересечение всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп группы G, не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$ и не содержащих нормальную подгруппу N. В случае, когда $\mathfrak{F}$ — формация единичных групп, строение указанной подгруппы исследовалось в работах [10, 17].

Подгруппа $\Phi_{\theta_{\overline{N}}}^{\mathfrak{F}}(G)$ совпадает с пересечением $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных θ-подгрупп группы, не содержащих нормальную подгруппу N. В случае, когда N совпадает с $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G, строение указанной подгруппы рассматривалось в работе [18].

Теорема 5.1. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $\big(|G|,|A|\big) = 1$, $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы, θ — абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$; *если G — разрешимая неединичная группа, то* $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A) < G_{\mathfrak{F}}$;

2) $(G/\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A))_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}/\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)$.

Доказательство. Из следствия 4.9 получаем, что $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A) \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Пусть G — разрешимая неединичная группа. Тогда $G/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$ разрешима и неединична. Пусть $K/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$ — минимальная нормальная подгруппа в $G/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$. Так как $K/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$ — p-группа для некоторого простого p, а $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, то по теореме 4.4 $K \in \mathfrak{F}$, а это значит, что $K \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

Если $\big(G/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)\big)_{\mathfrak{F}} = K/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$, то на основании теоремы 4.4 $K \in \mathfrak{F}$, поэтому $K \subseteq G$ и $\big(G/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)\big)_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$. Обратное включение следует из определения $\mathfrak{F}$-радикала.

***Следствие* 5.1.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $\big(|G|,|A|\big) = 1$, $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\Phi^{\mathfrak{F}}(G,A) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$; *если G — разрешимая неединичная группа, то* $\Phi^{\mathfrak{F}}(G,A) < G_{\mathfrak{F}}$;
2) $\big(G/\Phi^{\mathfrak{F}}(G,A)\big)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}/\Phi^{\mathfrak{F}}(G,A)$.

***Следствие* 5.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\Phi^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$; *если G — разрешимая неединичная группа, то* $\Phi^{\mathfrak{F}}(G) < G_{\mathfrak{F}}$;
2) $\big(G/\Phi^{\mathfrak{F}}(G)\big)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}/\Phi^{\mathfrak{F}}(G)$.

Теорема 5.2. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $\big(|G|,|A|\big) = 1$, $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы, G — разрешимая группа, θ — абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда справедливы следующие утверждения*: $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G,A) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$, *а если G — не $\mathfrak{F}$-группа, то* $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G,A) \in \mathfrak{F}^2$.

Доказательство. Подгруппы $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G,A)$ и $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G,A)$ являются характеристическими в G и $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G,A) \cap \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G,A) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$.

Для фактор-группы $G/\Phi_{\theta}(G,A)$ выполняется $\big(G/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)\big)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$. Поэтому $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}\big(G/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)\big) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G)/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$. Предположим, что $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G,A)/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A) \neq 1$. Пусть $K/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$ — минимальная нормальная подгруппа в $G/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$, содержащаяся в $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G,A)/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$. Так как $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$, то $K/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A) \in \mathfrak{F}$ и по теореме 4.4 $K \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $K \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Тогда $K \subseteq \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G,A) \cap \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G,A)$. Получили противоречие. Значит, допущение ошибочно и $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G,A)/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A) = 1$, а значит, $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G,A) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$.

Пусть G — разрешимая не $\mathfrak{F}$-группа. Из того, что $G_{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G,A)G_{\mathfrak{F}}$ и $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G,A)/G_{\mathfrak{F}} = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G/G_{\mathfrak{F}},A)$, следует, что подгруппа $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G,A) \in \mathfrak{F}^2$.

***Следствие* 5.3.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $\big(|G|,|A|\big) = 1$, $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы, θ — абнормально полный подгрупповой функтор, G — разрешимая группа. Тогда* $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G,A) \in \mathfrak{F}$.

***Следствие* 5.4.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $\big(|G|,|A|\big) = 1$, $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы. Тогда для разрешимой группы G справедливы следующие утверждения*:

1) $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G,A) = D^{\mathfrak{F}}(G,A)$;
2) *если $G \notin \mathfrak{F}$, то* $\Phi^{\mathfrak{F}}_{G_{\mathfrak{F}}}(G,A) \in \mathfrak{F}^2$.

***Следствие* 5.5.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $\big(|G|,|A|\big) = 1$, $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы. Тогда в разрешимой группе G подгруппа $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G,A)$ принадлежит $\mathfrak{F}$.*

***Следствие* 5.6.** *В разрешимой группе G пересечение абнормальных максимальных подгрупп, не содержащих $F(G)$, совпадает с $\Delta(G)$, а пересечение абнормальных максимальных подгрупп, содержащих $F(G)$, метанильпотентно.*

Теорема 5.3. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $\big(|G|,|A|\big) = 1$, $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы, θ — абнормально полный подгрупповой функтор, G — разрешимая группа. Если $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G,A) \neq G$, то $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G,A) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A) \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть G имеет $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные θ-подгруппы, не принадлежащие $\mathfrak{F}$ и не содержащие $\mathfrak{F}$-радикал. Несложно заметить, что $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A) \subseteq \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A) \subseteq \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G,A)$ и согласно теореме 4.5 $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A) = \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$.

Пусть подгруппа $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G,A)$ не совпадает с подгруппой $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$. Тогда $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G,A)/\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A) \neq 1$. Пусть $K/\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$ — минимальная нормальная подгруппа в $G/\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$, содержащаяся в $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G,A)/\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$. Так как $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$, то $K/\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A) \in \mathfrak{F}$. Тогда из теорем 4.4, 4.5 следует, что $K \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $K \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Тогда $K \subseteq \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G,A) \cap \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G,A)$. Получили противоречие. Значит, допущение ошибочно и $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G,A)/\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A) = 1$. Следовательно, $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G,A) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$. Применяя теорему 4.3, получаем, что $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G,A) \in \mathfrak{F}$.

***Следствие* 5.7.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $\big(|G|,|A|\big) = 1$, $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы, G — разрешимая группа. Если $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G,A) \neq G$, то $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G,A) = D^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$.*

***Следствие* 5.8.** *Пусть G — разрешимая группа. Если в группе G существуют ненильпотентные абнормальные максимальные подгруппы, не содержащие подгруппу Фиттинга $F(G)$, то пересечение всех таких подгрупп совпадает с подгруппой Гашюца $\Delta(G)$.*

Литература

1. *Frattini G.* Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni // Atti Accad. Lincei. – 1885. – **1**. – P. 281 – 285.
2. *Gaschütz W.* Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. – 1953. – № 58. – S. 160 – 170.
3. *Deskins W. E.* A condition for the solvability of a finite group // Ill. J. Math. – 1961. – **5**, № 2. – P. 306 – 313.
4. *Шидов Л. И.* О максимальных подгруппах конечных групп // Сиб. мат. журн. – 1971. – **12**, № 3. – С. 682 – 683.
5. *Ведерников В. А., Дука Н. Г.* Конечные группы с обобщенной подгруппой Фраттини // Материалы IX Всесоюз. алгебр. коллок., Гомель, 1968 г. – Гомель, 1968 г. – С. 44.
6. *Монахов В. С.* Замечания о максимальных подгруппах конечных групп // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – **47**, № 4. – С. 31 – 33.
7. *Carter R., Hawkes T.* The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group // J. Algebra. – 1967. – **5**, № 2. – P. 175 – 202.
8. *Шеметков Л. А.* Ступенчатые формации групп // Мат. сб. – 1974. – **94**, № 4. – С. 628 – 648.
9. *Шлык В. В.* О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах // Мат. заметки. – 1973. – **14**, № 3. – С. 429 – 439.
10. *Селькин М. В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. – Минск: Беларус. навука, 1997. – 144 с.

11. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. – М.: Наука, 1989. – 253 с.
12. *Ballester-Bolinches A., Perez-Ramos M. D.* On $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups and Frattini-like subgroups of a finite group // Glasgow Math. J. – 1994. – **36**. – P. 241 – 247.
13. *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. – Минск: Беларус. навука, 2003. – 254 с.
14. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. – Минск: Беларус. навука, 1997. – 240 с.
15. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н.* О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы: материалы междунар. алгебр. конф., Киев, 1993 г. – Киев, 1993. – С. 27 – 54.
16. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 267 с.
17. *Бородич Е. Н., Бородич Р. В.* О пересечении $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных θ-подгрупп // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 2007. – № 3. – С. 47 – 52.
18. *Поляков Л. Я.* О конечных группах с заданной группой операторов // Вопросы алгебры. – 1987. – Вып. 3. – С. 63 – 67.
19. *Бородич Р. В., Бородич Е. Н., Селькин М. В.* Об $\mathfrak{F}$-достижимых подгруппах в группах с операторами // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 33 – 39.

Получено 29.11.17