УДК 517.925.5:519.216

М. И. Тлеубергенов, Г. Т. Ибраева

(Ин-т математики и мат. моделирования М-ва образования и науки Республики Казахстан, Алматы)

О РАЗРЕШИМОСТИ ОСНОВНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Using the quasi-inversion method we obtain necessary and sufficient conditions for the solvability of the main (according to Galiullin's classification) inverse problem in the class of first-order Itô stochastic differential systems with random perturbations from the class of processes with independent increments, with diffusion degenerate in a part of variables and with given properties, depending on a part of variables.

Методом квазіобернення отримано необхідні та достатні умові розв'язності основної за класифікацією А. С. Галіулліна оберненої задачі у класі стохастичних диференціальних рівнянь Іто першого порядку з випадковими збуреннями із класу процесів із незалежними приростами, з вироджуваною відносно частини змінних дифузією й заданими властивостями, що залежать від частини змінних.

Введение. Теория обратных задач дифференциальных систем и общие методы их решения достаточно полно разработаны в [1 – 7] для детерминированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Так, в работе [1] построено множество ОДУ по заданной интегральной кривой. Впоследствии эта работа оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ. В работах [2 – 7] изложены постановка, классификация обратных задач дифференциальных систем и их решение в классе ОДУ. Также в классе ОДУ в работах [8 – 10] рассмотрены обратные задачи динамики систем автоматического управления. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ — метод квазиобращения, позволяющий получить необходимые и достаточные условия разрешимости, предложен в работе [3]. Обобщению и развитию методов решения обратных задач в классе дифференциальных уравнений в частных производных посвящены работы [11 – 13].

В работах [14 – 16] обратные задачи динамики рассматриваются при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов и, в частности, методом квазиобращения решены: 1) *основная обратная задача динамики*, в которой надо построить множество стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, имеющих заданное интегральное многообразие; 2) *задача восстановления уравнений движения*, в которой надо построить множество управляющих параметров, входящих в заданную систему стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, по заданному интегральному многообразию и 3) *задача замыкания уравнений движения*, в которой надо построить множество замыкающих стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданной системе уравнений и заданному интегральному многообразию.

В работах [17, 18] рассматривается одна из обратных задач — задача построения множества стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка с вырождающейся диффузией по заданному интегральному многообразию в предположении, что: 1) заданное интегральное многообразие зависит от всех переменных и 2) случайные возмущения принадлежат классу независимых винеровских процессов (как частный случай процессов с независимыми приращениями). В [17] поставленная задача решается методом квазиобращения [3, с. 12, 13], а в [18] — методом разделения [3, с. 21].

В настоящей работе в отличие от [17, 18] предполагается, что, во-первых, заданное интегральное многообразие зависит лишь от части переменных и, во-вторых, случайные возмущения допускаются из более общего класса, а именно из класса процессов с независимыми приращениями.

1. Постановка общей задачи построения стохастических дифференциальных систем с вырождающейся по части переменных диффузией и с заданными свойствами, зависящими от части переменных, и ее решение. Пусть задано множество

$$\Lambda(t)\colon \lambda(y,t)=0, \quad \text{где} \quad \lambda\in R^m. \tag{1}$$

Требуется построить уравнение движения в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка вида

$$\begin{aligned} &\dot y = f_1(y,z,t),\\ &\dot z = f_2(y,z,t)+\sigma(y,z,t)\dot\xi_0+\int c(x,t)\dot P^0(t,dx) \end{aligned} \tag{2}$$

так, чтобы множество (1) было интегральным многообразием уравнения (2).

Здесь $y\in R^l$, $z\in R^p$, $l+p=n$; $\sigma(y,z,t)$ — матрица размерности $(p\times k)$; $c(x,t)\in R^p$; $\xi_0\in R^k$ — векторный винеровский процесс; P^0 — пуассоновский процесс; $P^0(t,dx)$ — число скачков процесса P^0 в интервале $[0,t]$, попадающих на множество dx, где $x=\left(y^T,z^T\right)^T$.

Будем говорить, что некоторая функция $g(y,z,t)$ из класса K, $(g\in K)$, если g непрерывна по t, липшицева по y и z во всем пространстве $R^n\ni x$ и удовлетворяет условию линейного роста по x $\parallel g(x,t)\parallel\le M(1+\parallel x\parallel)$ с некоторой константой M.

Предположим, что:

(i) *вектор-функция λ имеет все свои непрерывные вторые производные (включая и смешанные)*;

(ii) *искомые множества вектор-функций $\{f_1\}$, $\{f_2\}$ и множество матриц $\{\sigma\}$ принадлежат классу K.*

И так как вектор-функции f_1, f_2 и $(p\times k)$-матрица σ предполагаются из класса K, то это, следуя [19], обеспечивает в R^n существование и единственность с точностью до стохастической эквивалентности решения $\left(y(t)^T,z(t)^T\right)^T$ уравнения (2) с начальным условием $\left(y(t_0)^T,z(t_0)^T\right)^T=\left(y_0^T,z_0^T\right)^T$, являющегося с вероятностью 1 строго марковским процессом.

Поставленная задача:

1) в случае отсутствия случайных возмущений $(\sigma\equiv 0)$ достаточно полно исследована в работах [2 – 7];

2) обобщает рассмотренную в [14] задачу построения стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка

$$\ddot x = f(x,\dot x,t)+\sigma(x,\dot x,t)\dot\xi \tag{$2'$}$$

по заданному множеству

$$\Lambda(t)\colon \lambda(x,\dot x,t)=0, \quad \text{где} \quad \lambda\in R^m, \quad \lambda=\lambda(x,\dot x,t)\in C^{121}_{x\dot x t}, \tag{$1'$}$$

так, чтобы множество $(1')$ было интегральным многообразием уравнения $(2')$ со случайными возмущениями из класса винеровских процессов;

3) со случайными возмущениями из класса винеровских процессов исследована методом квазиобращения в [17] и методом разделения в [18]; при этом заданные интегральные многообразия в [17, 18] зависят от всех переменных.

В данной работе стохастическая основная обратная задача — задача построения стохастического дифференциального уравнения первого порядка типа Ито по заданным свойствам движения — решается методом квазиобращения. В терминах коэффициентов получены необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия у построенного множества стохастических дифференциальных уравнений.

Для решения поставленной задачи используется метод квазиобращения [4, 5], основанный на следующей лемме.

Лемма 1 [4, c. 12, 13]**.** *Совокупность всех решений линейной системы*

$$Hv = g, \quad H = (h_{\mu k}), \quad v = (v_k), \quad g = (g_\mu) \quad \mu = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}, \quad m \le n, \tag{3}$$

где ранг матрицы H *равен* m, *определяется выражением*

$$v = sv^\tau + v^\nu. \tag{4}$$

Здесь s — *произвольная скалярная величина,*

$$v^\tau = [HC] = [h_1 \dots h_m c_{m+1} \dots c_{n-1}] = \begin{vmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

— *векторное произведение векторов* $h_\mu = (h_{\mu k})$ *и произвольных векторов* $c_\rho = (c_{\rho k})$, $\rho = \overline{m+1, n-1}$, e_k — *единичные орты пространства* R^n, $v^\tau = \left(v_k^\tau\right)$, *где*

$$v_k^\tau = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ h_{11} & \dots & h_{1k} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mk} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,k} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}, \quad v^\nu = H^+ g,$$

$H^+ = H^T \left(HH^T\right)^{-1}$, H^T — *матрица, транспонированная к* H.

Для решения поставленной задачи построения множества систем уравнений вида (2) по заданному интегральному многообразию (1) продифференцируем вектор-функцию $\lambda = \lambda(y, t)$ по правилу Ито дифференцирования сложной функции в случае процесса с независимыми приращениями [19, c. 201]:

$$\ddot{\lambda} = M_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial z} f_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial z} \sigma \dot{\xi}_0 + S_3, \tag{5}$$

где

$$M_1 = \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial t} + 2\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial t} f_1 + f_1^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial y} f_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial y} f_1 + S_1 + S_2,$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial^2 f_1}{\partial z\partial z} : \sigma\sigma^T,$$

$$S_2 = \int\left\{\frac{\partial\lambda}{\partial y}\left[f_1(y, z + c(x,t), t) - f_1(y,z,t) + \frac{\partial f_1}{\partial z} c(x,t)\right]\right\} dx,$$

$$S_3 = \int\frac{\partial\lambda}{\partial y}\left[f_1(y, z + c(x,t), t) - f_1(y,z,t)\right]\dot{P}^0(t,dx),$$

а под $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial z\partial z} : D$, следуя [19], понимается вектор, элементами которого являются следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $f_{1\mu}(y,z,t)$ вектора $f_1(y,z,t)$ по компонентам z на матрицу D

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial z\partial z} : D = \begin{bmatrix} \operatorname{tr}\left(\dfrac{\partial^2 f_{11}}{\partial z\partial z} D\right) \\ \vdots \\ \operatorname{tr}\left(\dfrac{\partial^2 f_{1m}}{\partial z\partial z} D\right) \end{bmatrix}.$$

Далее, вводятся произвольные типа Н. П. Еругина [1]: m-мерные вектор-функции $A_1(\lambda,\dot{\lambda},y,z,t)$, $A_2(\lambda,\dot{\lambda},y,z,t)$ и $(m\times k)$-матрица $B(\lambda,\dot{\lambda},y,z,t)$, имеющие свойство $A_1(0,0,y,z,t)\equiv 0$, $A_2(0,0,y,z,t)\equiv 0$, $B(0,0,y,z,t)\equiv 0:$

$$\ddot{\lambda} = A_1(\lambda,\dot{\lambda},y,z,t) + B(\lambda,\dot{\lambda},y,z,t)\dot{\xi}_0 + \int A_2(\lambda,\dot{\lambda},x,t)\dot{P}^0(t,dx). \tag{6}$$

Сравнивая уравнения (5) и (6), получаем соотношения

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z} f_2 = A_1 - M_1, \tag{7}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z}\sigma = B, \tag{8}$$

$$c^*(x,t) = A_2, \tag{9}$$

где $c^*(x,t) = \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\left[f(y, z + c(x,t), t) - f_1(y,z,t)\right].$

Теперь предположим, что наряду с условиями (i) и (ii) выполняется также условие

(iii) *множество искомых вектор-функций* $\{f_1\}$ *линейно по* z *и имеет вид*

$$f_1 = \alpha(y,t) + \beta(t)z, \tag{10}$$

где $\alpha(y,t)$ *— произвольно заданная вектор-функция из класса* K, $\alpha\in K$, *а* $\beta(t)$ *— произвольно заданная непрерывная по* t *матрица порядка* $(l\times p)$.

Из условия (iii) следует, что в формуле (5) $S_1 \equiv 0$, $S_2 \equiv 0$, а S_3 принимает вид

$$S_3 = \int \frac{\partial \lambda}{\partial y} \beta(t) c(x,t) P^0(t, dx).$$

Тогда, используя обозначения

$$\widetilde{G} = \frac{\partial \lambda}{\partial y} \beta, \quad \widetilde{M_1} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \beta}{\partial t} z \right) +$$

$$+2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial t} (\alpha + \beta z) + \left(\alpha^T + z^T \beta^T \right) \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial y} (\alpha + \beta z) + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial y} (\alpha + \beta z),$$

соотношения (7) – (9) записываем в виде

$$\widetilde{G} f_2 = A_1 - \widetilde{M_1}, \tag{11}$$

$$\widetilde{G} \sigma = B, \tag{12}$$

$$\widetilde{G} c = A_2. \tag{13}$$

Из соотношений (11) – (13) методом квазиобращения определяем множества $\{f_2(y,z,t)\}$, $\{\sigma(y,z,t)\}$, $\{c(x,t)\}$ по произвольно заданной линейной по z вектор-функции f_1 (10) из класса K.

Действительно, из соотношений (11) – (13) по формуле (4) имеем

$$f_2 = s_1 \big[\widetilde{G} \widetilde{C} \big] + \big(\widetilde{G} \big)^+ \widetilde{A}_1, \tag{14}$$

$$\sigma_i = s_{2i} \big[\widetilde{G} \widetilde{\widetilde{C}} \big] + \big(\widetilde{G} \big)^+ B_i, \tag{15}$$

$$c = s_3 \big[\widetilde{G} \widetilde{C} \big] + \big(\widetilde{G} \big)^+ A_2, \tag{16}$$

где $\widetilde{A_1} = A_1 - \widetilde{M_1}$, $\sigma_i = (\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \ldots, \sigma_{ni})^T$ — i-й столбец матрицы $\sigma = (\sigma_{\nu j})$, $\nu = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k}$; $B_i = (B_{1i}, B_{2i}, \ldots, B_{mi})^T$ — i-й столбец матрицы $B = (B_{\mu l})$, $\mu = \overline{1,m}$, $l = \overline{1,k}$, а матрицы $\widetilde{C}$ и $\widetilde{\widetilde{C}}$ имеют соответственно вид

$$\widetilde{C} = \begin{bmatrix} \widetilde{c}_{m+1,1} & \ldots & \widetilde{c}_{m+1,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \widetilde{c}_{p-1,1} & \ldots & \widetilde{c}_{p-1,p} \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{\widetilde{C}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\widetilde{c}}_{m+1,1} & \ldots & \widetilde{\widetilde{c}}_{m+1,k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \widetilde{\widetilde{c}}_{k-1,1} & \ldots & \widetilde{\widetilde{c}}_{k-1,k} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (i) — (iii). *Тогда для того чтобы дифференциальное уравнение типа Ито* (2) *имело заданное интегральное многообразие* (1), *необходимо и достаточно, чтобы множества вектор-функций* $\{f_2(y,z,t)\}$, $\{c(x,t)\}$ *и столбцы* σ_i *множества матриц* $\{\sigma(y,z,t)\}$ *имели соответственно вид* (14) – (16).

2. Скалярный случай общей задачи (стохастическая задача Еругина на плоскости с вырождающейся диффузией)**.** Пусть интегральная кривая задана в виде

$$\Lambda(t) : \eta(y,t) = 0, \quad \text{где} \quad \eta \in R^1, \quad \eta \in C^{22}_{yt}. \tag{17}$$

По этой кривой требуется построить систему уравнений вида

$$\begin{aligned}&\dot{y} = g_1(y, z, t),\\&\dot{z} = g_2(y, z, t) + \gamma(y, z, t)\dot{\zeta}_0 + \int c_1(x, t, \mu)\dot{P}^0(t, dx),\end{aligned} \tag{18}$$

где $\zeta_0 = \zeta_0(t, \omega)$ — скалярный винеровский процесс, а P^0 — скалярный пуассоновский процесс [19].

Задача заключается в определении на плоскости (y, z) скалярных функций g_1, g_2, γ и c_1 по заданной скалярной функции η так, чтобы множество (17) было интегральным многообразием уравнения (18).

Пусть для системы двух скалярных уравнений (18) выполнены условия (i) — (iii) и соответственно функция g_1 имеет вид $g_1 = \alpha_1(y, t) + \beta_1(t)z$.

Дифференцируя сложную функцию $\eta = \eta(y, t)$ по правилу стохастического дифференцирования Ито [13, с. 201] в случае процесса с независимыми приращениями получаем

$$\ddot{\eta} = m_1 + \frac{\partial\eta}{\partial y}\,\beta_1 g_2 + \frac{\partial\eta}{\partial y}\,\beta_1\gamma\dot{\zeta}_0 + \int c_1^*(x, t)\dot{P}^0(t, dx), \tag{19}$$

где

$$c_1^* = \frac{\partial\eta}{\partial y}\,\beta_1 c_1, \quad m_1 = \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial t\partial y}\,(\alpha_1 + \beta_1 z) +$$
$$+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\,(\alpha_1 + \beta_1 z)^2 + \frac{\partial\eta}{\partial y}\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial\beta_1}{\partial t}\,z\right) + \frac{\partial\eta}{\partial y}\,\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\,(\alpha_1 + \beta_1 z).$$

Далее, следуя методу Еругина [1], введем скалярные функции $a_1 = a_1(\eta, \dot{\eta}, y, z, t)$, $a_2 = a_2(\eta, \dot{\eta}, y, z, t)$ и $b = b(\eta, \dot{\eta}, y, z, t)$ такие, что $a_1(0, 0, y, z, t) \equiv a_2(0, 0, y, z, t) \equiv b(0, 0, y, z, t) \equiv 0$ и справедливо равенство

$$\ddot{\eta} = a_1 + b\dot{\zeta}_0 + \int a_2(\eta, \dot{\eta}, x, t)\dot{P}^0(t, dx). \tag{20}$$

Из (19) и (20) следуют соотношения

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\eta}{\partial y}\,\beta_1 g_2 = a_1 - m_1,\\&\frac{\partial\eta}{\partial y}\,\beta_1\gamma = b,\\&\frac{\partial\eta}{\partial y}\,\beta_1 c = a_2.\end{aligned} \tag{21}$$

Обозначим $\widetilde{a} = a_1 - m_1$ и предположим, что $\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\beta_1\right)^{-1} \neq 0$. Тогда из (21) следует решение стохастической задачи Еругина с вырождающейся диффузией на плоскости в виде соотношений

$$g_2 = \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\,\beta_1\right)^{-1} \widetilde{a},$$

$$\gamma = \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\,\beta_1\right)^{-1} b,$$

$$c = \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\,\beta_1\right)^{-1} a_2.$$

Таким образом, в основной обратной задаче динамики при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями в общем, а также скалярном случаях построены множества стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка с вырождающейся по части переменных диффузией, имеющих заданное интегральное многообразие, которое зависит лишь от части переменных.

Литература

1. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикл. математика и механика. – 1952. – **10**, вып. 6. – С. 659 – 670.
2. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. – М.: Наука, 1986. – 224 с.
3. *Галиуллин А. С.* Построение поля сил по заданному семейству траекторий // Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 8. – С. 1487 – 1489.
4. *Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.* Уравнения программных движений. – М., 1986. – 88 с.
5. *Мухарлямов Р. Г.* О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 3. – С. 343 – 353.
6. *Мухарлямов Р. Г.* Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2015. – № 1. – С. 15 – 28.
7. *Mukharlyamov R. G., Amabili M., Garziera R., Riabova K.* Stability of non-linear vibrations of doubly cured shallow shells // Вестн. Рос. ун-та дружбы народов. Сер. Математика. Информатика. Физика. – 2016. – № 2. – С. 53 – 63.
8. *Жуматов С. С.* Асимптотическая устойчивость неявных дифференциальных систем в окрестности программного многообразия // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 4. – С. 558 – 565.
9. *Жуматов С. С.* Экспоненциальная устойчивость программного многообразия систем непрямого управления // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 6. – С. 784 – 790.
10. *Жуматов С. С.* Устойчивость программного многообразия систем управления с локально квадратичными связями // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 3. – С. 418 – 424.
11. *Budochkina S. A., Savchin V. M.* An operator equation with the second time derivative and Hamilton-admissible equations // Dokl. Math. – 2016. – **94**, № 2. – P. 487 – 489.
12. *Savchin V. M., Budochkina S. A.* Nonclassical Hamilton's actions and the numerical performance of variational methods for some dissipative problems // Springer, Cham, Commun. Comput. and Inform. Sci. – 2016. – **678**. – P. 624 – 634.
13. *Savchin V. M., Budochkina S. A.* Invariance of functionals and related Euler – Lagrange equations // Russian Math. – 2017. – **61**, № 2. – P. 49 – 54.
14. *Тлеубергенов М. И.* Об обратной задаче динамики при наличии случайных возмущений // Изв. МН-АН РК. Сер. физ.-мат. – 1998. – № 3. – С. 55 – 61.
15. *Tleubergenov M. I.* An inverse problem for stochastic differential systems // Different. Equat. – 2001. – **37**, № 5. – P. 751 – 753.
16. *Тлеубергенов М. И.* Об обратной стохастической задаче замыкания // Докл. МН-АН РК. – 1999. – № 1. – С. 53 – 60.
17. *Ибраева Г. Т., Тлеубергенов М. И.* Об основной обратной задаче дифференциальных систем с вырождающейся по части переменных диффузией // Мат. журн. – 2004. – **4**, № 4(14). – С. 86 – 92.
18. *Ibraeva G. T., Tleubergenov M. I.* Main inverse problem for differential systems with degenerate diffusion // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 5. – P. 787 – 792.
19. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990. – 632 с.

Получено 05.05.16,
после доработки — 29.05.18