УДК 514.772

Ю. А. Аминов (Физ.-техн. ин-т низких температур НАН Украины, Харьков)

ДВУМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В ТРЕХ- И ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ: РЕЗУЛЬТАТЫ И НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

We present a survey of the results obtained for 2-dimensional surfaces in E^3 and E^4 and connected with the Gaussian curvature and Gaussian torsion. In this connection, we consider the Monge – Ampére equations, obtain the generalizations of Bernstein's integral formula, and establish some lower estimates for the exterior diameter of surfaces in E^3.

Наведено огляд результатів щодо двовимірних поверхонь у три- та чотиривимірних евклідових просторах, пов'язаних з гауссовою кривизною та гауссовим скрутом. При цьому розглянуто рівняння Монжа – Ампера, дано узагальнення інтегральної формули С. Н. Бернштейна та отримано оцінки знизу зовнішнього діаметра поверхонь в E^3.

1. Введение. В прошлом веке было уделено много внимания исследованиям двумерных поверхностей в трех- и четырехмерном евклидовых пространствах (см., например, работы Н. В. Ефимова [1], Э. Г. Позняка [4], Э. Р. Розендорна [3]). В какой-то мере это был итог развития московской школы геометрии „в целом" двумерных поверхностей, не превзойденный в мировой литературе.

Очень насыщенны информацией статьи по геометрии поверхностей Ю. Д. Бураго [27], Э. Р. Розендорна [28], а также недавно появившаяся статья И. Х. Сабитова [46].

В настоящем обзоре мы приводим результаты, не вошедшие в указанные выше работы. Приведены и сравнительно новые результаты в пункте 3 (В. А. Топоногова), в пункте 4 (Ю. А. Аминова), в пункте 15 (И. Х. Сабитова). Рассматривается поведение поверхностей „в целом" в зависимости от ограничений на гауссову кривизну. Сначала мы рассматриваем поверхности, заданные в явном виде в E^4, устанавливаем простые формулы для гауссовой кривизны K и гауссова кручения $\varkappa_\Gamma$. Несмотря на то, что в E^4 для двумерной поверхности больше „свободы" или, иначе говоря, выше произвол задания, пока неизвестно можно ли построить поверхность в E^4 с регулярной взаимно однозначной проекцией на всю плоскость (x, y) и с гауссовой кривизной $K \leq -K_0^2 < 0$, где K_0 — постоянное число.

Напомним, что Э. Р. Розендорн в 1961 г. построил в E^4 замкнутую регулярную поверхность с гауссовой кривизной $K \leq -K_0^2 < 0$ (см. подробное описание в [3]). Г. Я. Перельман построил в [5] полную регулярную седловую поверхность с отделенной от нуля гауссовой кривизной и с однозначной проекцией на плоскость (x, y), за исключением счетного неограниченного множества точек, в которых поверхность не определена. Известно также построение Д. Блануши в [6] изометрического вложения всей плоскости Лобачевского в E^6. Эта поверхность взаимно однозначно проектируется на плоскость (x, y). Используя функции, введенные Д. Бланушем, Э. Р. Розендорн построил в [7] изометрическое погружение плоскости Лобачевского в E^5. В этом случае поверхность имеет самопересечения и не проектируется взаимно однозначно на плоскость (x, y). И. Х. Сабитов в [8] построил кусочно-аналитическое погружение плоскости

Лобачевского в E^4 со счетным дискретным числом особых линий, где поверхность принадлежит классу Липшица $C^{0,1}$.

Таким образом, остается открытым вопрос: *можно ли вложить или погрузить изометрически плоскость Лобачевского в* E^4 *в виде регулярной поверхности*?

Заметим, что в работах С. Б. Кадомцева [29], Ю. А. Аминова [30, 31], F. Xavier [32], Л. А. Масальцева [33], Ю. А. Николаевского [34] и Д. В. Болотова [35] доказаны теоремы о невозможности некоторых специальных изометрических погружений пространства Лобачевского в евклидовы пространства. Но мы не ставим здесь перед собой задачу анализа этих работ. Обширный обзор по изометрическим погружениям пространственных форм в римановы и псевдоримановы пространства приведен в статье А. А. Борисенко [42]. Свойства двумерных поверхностей в евклидовых пространствах отражены также в монографиях [41, 43].

В геометрии важную роль играют уравнения Монжа – Ампера. В данном обзоре уделено много внимания оператору Монжа – Ампера на римановом многообразии, приведено очень полезное обобщение интегральной формулы С. Н. Бернштейна. В частном случае, когда это риманово многообразие является плоскостью, формулу С. Н. Бернштейна использовал Хайнц, который дал с ее помощью аналитическое доказательство оценки Н. В. Ефимова размеров круга или квадрата, над которыми в E^3 определена поверхность $z = z(x, y)$ с гауссовой кривизной $K \leq -K_0^2 < 0$.

Другое важное использование обобщенной формулы С. Н. Бернштейна — это применение ее к оценкам внешнего диаметра поверхности в E^3 в зависимости от гауссовой кривизны, которые были получены в работах автора. Впервые такого вида оценки установлены Ю. Д. Бураго более сложными методами с помощью приближений поверхностей многогранниками. Обобщенная формула С. Н. Бернштейна и другие близкие родственные формулы, приведенные в обзоре, значительно упрощают и облегчают рассмотрение указанных вопросов.

Ранее во многих работах доказывались общие теоремы о существовании решений проблемы Дирихле для эллиптического уравнения Монжа – Ампера, но конкретные решения не приводились. В настоящем обзоре приведены недавно доказанные теоремы о построении полиномиальных решений простейшего уравнения Монжа – Ампера $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = f(x, y)$ в случае, когда $f(x, y)$ — полином. Первоначальное исследование в случае, когда $f(x, y)$ — квадратичный полином, было проведено автором с группой турецких геометров и опубликовано в работе [20].

Необычное строение поверхностей $z(x, y)$, определенных на всей плоскости (x, y), но с особенностями в отдельных точках, в случае, когда $f(x, y) \equiv 0$, дает теорема И. Х. Сабитова [24], которая явилась определенным итогом обсуждений в рамках украинского-российского совместного исследования „Изометрические погружения метрик и внешне-геометрические свойства поверхностей в пространствах постоянной кривизны” в 2012 – 2013 гг. В случае, когда особые точки являются вершинами выпуклого многоугольника, теорема доказана автором данной статьи.

Автором и В. А. Горькавым в [17] с целью построения поверхностей F^2 в E^4, заданных над замкнутыми поверхностями M^2 в E^3 сложного топологического вида, найдены простые алгебраические поверхности в E^3 с симметриями, названные „симметронами”. Построенная Э. Р. Розендорном замкнутая поверхность в E^4 с $K < 0$ имеет род 7. Поэтому было бы интересно построить в E^4 поверхность с $K < 0$ меньшего рода с помощью „симметронов”. Выведены формулы, выражающие гауссову кривизну поверхности F^2 в E^4 через кривизну M^2 и значение оператора Монжа – Ампера от функции на M^2, задающей поверхность F^2. Компьютерными методами было проанализировано поведение гауссовой кривизны для конкретных видов „симметронов” и задающих функций.

Автор благодарен И. Х. Сабитову за полезное обсуждение работы и В. А. Александрову за информацию о работах В. А. Топоногова.

2. Гауссова кривизна двумерной поверхности в E^4, заданной в явном виде. Пусть на плоскости с координатами x_1, x_2 заданы две регулярные функции $u(x_1, x_2)$, $v(x_1, x_2)$. Тогда можем считать, что в E^4 задана двумерная поверхность с радиусом-вектором

$$r(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u(x_1, x_2) \\ v(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Поскольку пространство евклидово, то метрика этой поверхности имеет вид

$$ds^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (du)^2 + (dv)^2 = E(dx_1)^2 + 2F dx_1 dx_2 + G(dx_2)^2,$$

где $E = 1 + u_1^2 + v_1^2$, $F = u_1 u_2 + v_1 v_2$, $G = 1 + u_2^2 + v_2^2$. Здесь нижние индексы обозначают производные по аргументам.

По известной формуле для гауссовой кривизны K через коэффициенты метрики можно найти выражение K через первые и вторые производные функций $u(x_1, x_2)$, $v(x_1, x_2)$. Известна знаменитая формула Фробениуса (напомним, что впервые выражение гауссовой кривизны через коэффициенты первой квадратичной формы дал Гаусс, но в более сложном виде)

$$K = -\frac{1}{4W^4} \begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2W} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \frac{E_v - F_u}{W} + \frac{\partial}{\partial u} \frac{G_u - F_v}{W} \right\}, \tag{1}$$

где u, v — координаты на поверхности, $W = \sqrt{EG - F^2}$. Но так как в общем случае F отлично от нуля, то вычисления достаточно громоздкие, хотя и элементарные. Воспользуемся другим подходом, записав формулу для кривизны через вторые квадратичные формы:

$$K = \frac{\sum_{\alpha=1}^{2} \left[L_{11}^{\alpha} L_{22}^{\alpha} - (L_{12}^{\alpha})^2 \right]}{EG - F^2}, \tag{2}$$

где $L_{ij}^{\alpha} = (r_{ij} n_{\alpha})$ — коэффициенты второй квадратичной формы по отношению к единичной нормали n_{α}.

Напомним формулу из римановой геометрии. Внутренняя кривизна поверхности в римановом пространстве M, т. е. гауссова кривизна K_i, связана с внешней кривизной K_e и кривизной пространства K_M по площадке, касающейся поверхности, формулой $K_i = K_e + K_M$. В рассматриваемом случае пространство M евклидово, поэтому $K_M = 0$ и, следовательно, $K_i = K_e$.

Пусть нормали имеют такие координаты в E^4:

$$n_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4),$$

$$n_2 = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4).$$

Выражения для производных радиуса-вектора имеют вид

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \qquad r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, \qquad r_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{ij} \\ v_{ij} \end{pmatrix}.$$

Условия ортогональности нормалей к r_i дают уравнения

$$\xi_1 + \xi_3 u_1 + \xi_4 v_1 = 0,$$

$$\xi_2 + \xi_3 u_2 + \xi_4 v_2 = 0.$$

Аналогичные уравнения имеем для η_i. С другой стороны, запишем условие ортонормированности базиса $n_1,\ n_2$, использовав при этом выражения $\xi_1,\ \xi_2$ через $\xi_3,\ \xi_4$ и аналогично $\eta_1,\ \eta_2$ через $\eta_3,\ \eta_4$. В результате получим систему

$$\xi_3^2 A + 2\xi_3\xi_4 B + \xi_4^2 C = 1,$$

$$\xi_3\eta_3 A + (\xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3)B + \xi_4\eta_4 C = 0,$$

$$\eta_3^2 A + 2\eta_3\eta_4 B + \eta_4^2 C = 1.$$

В этой системе $A = 1 + u_1^2 + u_2^2,\ B = u_1 v_1 + u_2 v_2,\ C = 1 + v_1^2 + v_2^2$. Используем также обозначение $D = \sqrt{AC - B^2} = \sqrt{1 + |\operatorname{grad} u|^2 + |\operatorname{grad} v|^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2}$.

В дальнейшем, не ограничивая общности, можно взять вектор n_1 так, что $\xi_4 = 0$. Тогда из системы получаем

$$\xi_3^2 = \frac{1}{A}, \qquad \eta_3 A + \eta_4 B = 0, \qquad \eta_4^2 = \frac{A}{D^2}.$$

Вернемся теперь к формуле (2). Имеем

$$L_{ij}^1 = (r_{ij} n_1) = u_{ij}\xi_3 + v_{ij}\xi_4,$$

$$L_{ij}^2 = (r_{ij} n_2) = u_{ij}\eta_3 + v_{ij}\eta_4.$$

Следовательно,

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \left(L_{11}^\alpha L_{22}^\alpha - (L_{12}^\alpha)^2 \right) = (u_{11}u_{22} - u_{12}^2)(\xi_3^2 + \eta_3^2) +$$

$$+ (u_{11}v_{22} - 2u_{12}v_{12} + u_{22}v_{11})(\xi_3\xi_4 + \eta_3\eta_4) + \left(v_{11}v_{22} - v_{12}^2 \right)(\xi_4^2 + \eta_4^2). \tag{3}$$

Учитывая условие $\xi_4 = 0$, находим коэффициенты при вторых производных функций u и v:

$$\xi_3^2+\eta_3^2=\frac{C}{D^2},\qquad \eta_3\eta_4=-\frac{B}{D^2},\qquad \eta_4^2=\frac{A}{D^2}.$$

Подставляя эти выражения в (3), получаем окончательное выражение для гауссовой кривизны поверхности в E^4:

$$K=\frac{\left(u_{11}u_{22}-u_{12}^2\right)\left(1+v_1^2+v_2^2\right)}{D^4}-$$
$$-\frac{\left(u_{11}v_{22}-2u_{12}v_{12}+u_{22}v_{11}\right)\left(u_1v_1+u_2v_2\right)}{D^4}+$$
$$+\frac{\left(v_{11}v_{22}-v_{12}^2\right)\left(1+u_1^2+u_2^2\right)}{D^4}, \tag{4}$$

где $D^4=\left[1+u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2\right]^2$. Эта формула приведена в работе [16].

В частном случае формула для поверхности $u=u(x_1,x_2)$ в E^3 имеет вид

$$K=\frac{u_{11}u_{22}-u_{12}^2}{\left(1+u_1^2+u_2^2\right)^2}.$$

Далее мы используем формулу (4) в некоторых специальных случаях задания функций $u(x_1,x_2)$ и $v(x_1,x_2)$.

3. История вопроса о поверхностях отрицательной кривизны в E^3, заданных в явном виде. Н. В. Ефимов в 1953 г. в работе [9] доказал следующую теорему.

Теорема А. *Если поверхность $z=f(x,y)$ регулярна при всех значениях x, y, то ее гауссова кривизна не может оставаться меньше какого-либо отрицательного числа.*

Иными словами, регулярная поверхность строго отрицательной кривизны $K\le -K_0<$ <0, где K_0 — произвольная положительная постоянная, не может существовать над всей плоскостью (x,y).

Возможно ли обобщение этой теоремы на поверхности в E^4? В частности, может ли существовать поверхность в E^4 постоянной отрицательной кривизны $K=-1$, проектирующаяся на всю плоскость (x_1,x_2)?

Затем в статье [10] он значительно усилил результат, а именно, доказал, что если поверхность задана над квадратом со стороной a, то a ограничено сверху. Справедлива следующая теорема.

Теорема Б. *Существует постоянная, которую не может превысить сторона квадрата, если на этот квадрат однозначно проектируется кусок регулярной поверхности с гауссовой кривизной $K\le -1$.*

В качестве такой постоянной можно взять 18,9.

Теорема 2 сразу привлекла внимание геометров. Уже в 1955 г. была опубликована статья Хайнца [11], в которой дано другое доказательство теоремы, основанное на интегральной формуле С. Н. Бернштейна для поверхности, заданной над кругом радиуса r. Хайнц своим методом показал, что радиус r ограничен сверху.

Формула С. Н. Бернштейна была обобщена автором настоящей статьи для функций, заданных на двумерных и многомерных римановых пространствах (см. [12 – 14]).

Приведем результат, который был получен в работе [13] с помощью метода Хайнца.

Рассматривается метрика вида

$$ds^2 = d\sigma^2 + (du)^2,$$

где $(d\sigma)^2$ — метрика постоянной отрицательной кривизны $-a^2$, заданная в геодезическом круге радиуса R, u — регулярная класса C^2 функция точки этого круга. Доказана следующая теорема.

Теорема B. *Пусть* $d\sigma^2$ — *метрика постоянной отрицательной кривизны* $-a^2$, *а гауссова кривизна* K *метрики* ds^2 *удовлетворяет неравенству* $K \leq -b^2$, *причем* $b > 2a$. *Тогда*

$$R \leq \frac{e\sqrt{3}}{b - 2a}.$$

В этой же работе рассмотрены случаи, когда полная метрика $d\sigma^2$ имеет переменную кривизну. Рассматриваются геодезические круги радиуса r и площади $S(r)$. Доказывается, что если

$$\int\limits_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{S(r)}} = \infty,$$

то для любого $K_0 > 0$ не может существовать полная метрика $ds^2 = d\sigma^2 + (du)^2$ с гауссовой кривизной $K \leq -K_0^2$.

Можно попытаться применить эту теорему к метрикам вида $ds^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (du)^2 + (dv)^2$ в случае, когда $v(x_1, x_2)$ — полином определенной степени от x_1, x_2.

Другой подход может быть в непосредственном использовании формулы для K и в применении формул типа С. Н. Бернштейна.

В заключение этого пункта для полноты исторической картины приведем знаменитую теорему Н. В. Ефимова, доказанную в 1963 г.

Теорема Н. В. Ефимова. *В* E^3 *на любой полной регулярной поверхности верхняя грань гауссовой кривизны не меньше нуля.*

Иными словами, в E^3 невозможна полная регулярная поверхность с гауссовой кривизной $K \leq \mathrm{const} < 0$. В качестве требования регулярности достаточно принять C^2 в каждой точке поверхности.

Полное доказательство приведено в статье [36].

Переизложение доказательства этой теоремы дано в статье Т. Клотц-Милнора [37] с посвящением „многим советским геометрам, которые были так добры ко мне на Международном конгрессе математиков в Москве (1966)".

Здесь же приведено следующее предположение.

Предположение (Дж. Милнор). *Пусть* S — *полная, не содержащая омбилических точек поверхность,* C^2*-погруженная в* E^3 *так, что сумма квадратов главных кривизн на* S *строго отграничена от нуля. Тогда либо* K *меняет знак, либо* $K \equiv 0$.

Доказательство теоремы Н. В. Ефимова основано на рассмотрении отображений E^2 на E^2. Этот аспект, представляющий интерес и сам по себе, подробно рассмотрен в статье В. А. Александрова [38], где высказаны гипотезы, касающиеся многомерных отображений. Отметим также статью Э. Р. Розендорна и Е. В. Шикина [39], излагающую работы Н. В. Ефимова о поверхностях отрицательной кривизны в их исторической связи с предыдущим развитием геометрии.

Предположение Дж. Милнора заинтересовало В. А. Топоногова. Он в работе [48] доказал следующее: *если на произвольной поверхности* Φ *класса* C^3 *главные кривизны* k_1 *и* k_2 *связаны соотношением* $(1 - k_1 d)(1 - k_2 d) = -1$, *то поверхность* Φ *есть прямой круговой цилиндр радиуса* $\dfrac{d}{2}$.

Здесь $d = \mathrm{const}$. Очевидно, на поверхности, удовлетворяющей приведенному выше уравнению, нет омбилических точек и $k_1^2 + k_2^2 \geq 3/d^2$, т. е. выполняется условие Дж. Милнора. В дальнейшем в работе [50] В. А. Топоноговым была получена более общая теорема в случае, когда главные кривизны связаны соотношением $f(k_1, k_2) = 0$ и на поверхности нет омбилических точек.

В общей постановке предположение Дж. Милнора, насколько известно автору, до сих пор не доказано и не опровергнуто.

4. Комплексно-аналитическая кривая в E^4 и другие поверхности. Пусть в некоторой области D плоскости (x_1, x_2) заданы две регулярные функции $u(x_1, x_2)$, $v(x_1, x_2)$. Эти две функции определяют некоторую двумерную поверхность F^2 в E^4. Приведем несколько примеров простых поверхностей в E^4.

1. Введем комплексную переменную $z = x_1 + ix_2$. Пусть следующая комплексная функция $f(z) = u + iv$ является комплексно-аналитической. *В этом случае поверхность F^2 называется комплексно-аналитической кривой.*

Функции u и v являются сопряженными гармоническими функциями. Обозначив индексами снизу производные этих функций по их аргументам, запишем систему уравнений

$$u_1 = v_2, \qquad u_2 = -v_1,$$

$$u_{11} + u_{22} = 0, \qquad v_{11} + v_{22} = 0.$$

Найдем выражение гауссовой кривизны поверхности F^2. Имеем

$$u_{11} = v_{12}, \qquad u_{12} = v_{22}, \qquad u_{22} = -v_{12}.$$

Используя эти соотношения, находим

$$u_{11}u_{22} - u_{12}^2 = v_{11}v_{22} - v_{12}^2 = -v_{11}^2 - v_{12}^2,$$

$$u_{11}v_{22} - 2u_{12}v_{12} + u_{22}v_{11} = 0.$$

Тогда формула для гауссовой кривизны поверхности F^2 принимает вид

$$K = \frac{2\big(v_{11}v_{22} - v_{12}^2\big)}{\big(1 + v_1^2 + v_2^2\big)^3} = \frac{-2\big(v_{11}^2 + v_{12}^2\big)}{\big(1 + v_1^2 + v_2^2\big)^3}.$$

Отсюда можно сделать заключение: *гауссова кривизна комплексно-аналитической кривой всегда неположительна*: $K \leq 0$.

Пусть в круге D радиуса R задана комплексно-аналитическая кривая и ее гауссова кривизна удовлетворяет неравенству $K \leq -K_0 < 0$. Заметим, что гауссова кривизна $\bar{K}$ вспомогательной поверхности

$$\big\{x_1, x_2, v(x_1, x_2)\big\}$$

удовлетворяет неравенствам

$$\bar{K} = \frac{v_{11}v_{22} - v_{12}^2}{\big(1 + v_1^2 + v_2^2\big)^2} \leq \frac{v_{11}v_{22} - v_{12}^2}{\big(1 + v_1^2 + v_2^2\big)^3} \leq -\frac{K_0}{2}.$$

Используя оценку Хайнца, получаем

$$R \leq \frac{\sqrt{3}e}{\sqrt{2K_0}}.$$

Таким образом, на комплексно-аналитической кривой, заданной на всей плоскости (x_1, x_2), *гауссова кривизна не отделена от нуля постоянным числом.*

2. Рассмотрим выражение кривизны K в случае, когда обе функции u и v гармонические, но не обязательно сопряженные. Заменим в числителе выражения для K вторые производные $u_{22} = -u_{11}$, $v_{22} = -v_{11}$. Тогда числитель примет вид

$$-(u_{11}^2 + u_{12}^2)\big(1 + v_1^2 + v_2^2\big) + 2(u_{11}v_{11} + u_{12}v_{12})(u_1v_1 + u_2v_2) - (v_{11}^2 + v_{12}^2)(1 + u_1^2 + u_2^2) =$$

$$= -u_{11}^2 - u_{12}^2 - v_{11}^2 - v_{12}^2 - (u_{11}v_1 - v_{11}u_1)^2 - (u_{11}v_2 - v_{11}u_2)^2 -$$

$$-(u_{12}v_1 - v_{12}u_1)^2 - (u_{12}v_2 - v_{12}u_2)^2.$$

Следовательно, **если у поверхности $F^2 \subset E^4$ компоненты u и v — гармонические функции, то гауссова кривизна $K \leq 0$.** Впервые это было отмечено в работе Г. Я. Перельмана [5].

3. Пусть u и v — полиномы от x_1, x_2 некоторой степени, например, следующего вида.

Поверхность 2а)

$$u = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \qquad v = 3(x_1^2 - x_2^2).$$

Тогда гауссова кривизна поверхности 2а), как легко вычислить, равна

$$K = \frac{-35}{\big(1 + 37(x_1^2 + x_2^2) + (12x_1x_2)^2\big)^2}.$$

Поверхность 2б)

$$u = 3(x_1^2 + x_2^2), \qquad v = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2).$$

Гауссова кривизна поверхности 2б) равна

$$K = \frac{35}{\big(1 + 37(x_2^2 + x_2^2) + (12x_1x_2)^2\big)^2}.$$

Таким образом, гауссова кривизна поверхности 2а) $K < 0$, гауссова кривизна поверхности 2б) $K > 0$. Обе поверхности имеют проекции на трехмерные пространства как положительной, так и отрицательной кривизны.

4. Рассмотрим поверхность

$$u = f(x_1)\cos x_2, \qquad v = f(x_1)\sin x_2.$$

Замечательным свойством этой поверхности является то обстоятельство, что многие ее геометрические характеристики зависят только от x_1. Штрихом будем обозначать производные функции f по x_1. Имеем

$$u_1 = f'\cos x_2, \qquad u_2 = -f\sin x_2, \qquad v_1 = f'\sin x_2, \qquad v_2 = f\cos x_2,$$

$$u_{11} = f''\cos x_2, \qquad u_{12} = -f'\sin x_2, \qquad u_{22} = -f\cos x_2,$$

$$v_{11} = f''\sin x_2, \qquad v_{12} = f'\cos x_2, \qquad v_{22} = -f\sin x_2.$$

Метрика такой поверхности имеет вид $ds^2 = (1 + f'^2)(dx_1)^2 + (1 + f^2)(dx_2)^2$. Поскольку координатные линии x_1, x_2 ортогональны, то с помощью этой метрики легко найти гауссову кривизну такой поверхности:

$$K = -\frac{f''f(1+f^2) + f'^2(1+f'^2)}{(1+f^2)^2(1+f'^2)^2}.$$

5. Гауссово кручение поверхности в E^4, заданной в явном виде. Как известно, гауссово кручение $\varkappa_\Gamma$ определяется по формуле

$$\varkappa_\Gamma = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[L^1_{1i}L^2_{2j} - L^1_{2i}L^2_{1j}\right]g^{ij},$$

где g^{ij} — коэффициенты обратного метрического тензора, g — детерминант матрицы метрического тензора. Если a и b — полуоси эллипса нормальной кривизны, то $\varkappa_\Gamma = \pm 2ab$, причем знак зависит от того, будет ли конец вектора нормальной кривизны обходить эллипс нормальной кривизны в положительном направлении согласно положительной ориентации в нормальной плоскости (тогда $+$) или в отрицательном направлении (тогда $-$). Эта величина является единственным инвариантом нормальной связности поверхности, аналогичным кривизне касательной связности, т. е. гауссовой кривизне. Интеграл от $\varkappa_\Gamma$ по замкнутой поверхности F^2 равен нулю, если на поверхности существует регулярное нормальное единичное векторное поле; в общем случае он равен $2\pi\nu$, где ν — инвариант Уитни, т. е. сумма индексов особенностей единичного нормального векторного поля. Этот факт и даже более общий случай установлены еще С. С. Черном в [40], а подробное изложение имеется в книге автора [41] (глава 6).

Имеем

$$g_{11} = 1 + u_1^2 + v_1^2, \qquad g_{12} = u_1u_2 + v_1v_2, \qquad g_{22} = 1 + u_2^2 + v_2^2,$$
$$g = 1 + u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2.$$

Выражения для коэффициентов обратного метрического тензора таковы:

$$g^{11} = \frac{1 + u_2^2 + v_2^2}{g}, \qquad g^{12} = -\frac{u_1u_2 + v_1v_2}{g}, \qquad g^{22} = \frac{1 + u_1^2 + v_1^2}{g}.$$

Напомним полученные ранее выражения для коэффициентов вторых квадратичных форм:

$$L^1_{ij} = \xi_3 u_{ij} + \xi_4 v_{ij},$$
$$L^2_{ij} = \eta_3 u_{ij} + \eta_4 v_{ij}.$$

Учитывая, что $\xi_4 = 0$, находим

$$\left[L^1_{1i}L^2_{2j} - L^1_{2i}L^2_{1j}\right]g^{ij} = \xi_3\eta_4(u_{1i}v_{2j} - u_{2i}v_{1j})g^{ij} =$$
$$= \xi_3\eta_4\left[(u_{11}v_{21} - u_{12}v_{11})g^{11} + (u_{11}v_{22} - u_{22}v_{11})g^{12} + (u_{12}v_{22} - u_{22}v_{12})g^{22}\right].$$

Ранее мы получили

$$\xi_3^2 = \frac{1}{A}, \qquad \eta_4^2 = \frac{A}{D^2}.$$

Для того чтобы правильно выбрать знаки при извлечении корня, рассмотрим базис в E^4 из касательных и нормальных векторов. Будем предполагать, что он имеет положительную ориентацию. Тогда определитель Δ, составленный из компонент этих векторов, будет положителен. Таким образом,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & u_1 & v_1 \\ 0 & 1 & u_2 & v_2 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix} =$$

$$= \xi_3\eta_4 - \xi_2\eta_4 u_2 + (\xi_2\eta_3 - \eta_2\xi_3)v_2 - u_1\xi_1\eta_4 +$$

$$+ v_1(\xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1) + (u_1v_2 - u_2v_1)(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1).$$

Используем соотношения

$$\xi_1 = -\xi_3 u_1, \qquad \eta_1 = -\eta_3 u_1 - \eta_4 v_1,$$

$$\xi_2 = -\xi_3 u_2, \qquad \eta_2 = -\eta_3 u_2 - \eta_4 v_2.$$

После подстановки этих выражений получаем

$$\Delta = \xi_3\eta_4\big(1 + u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2\big).$$

Поэтому $\xi_3\eta_4 > 0$. С помощью приведенных выше выражений находим $\xi_3\eta_4 = \dfrac{1}{D}$. Заметим, что $D^2 = g$. Итак, можем записать выражение для кручения Гаусса:

$$\varkappa_\Gamma = \frac{1}{g^2}\big[(u_{11}v_{12} - u_{12}v_{11})(1 + u_2^2 + v_2^2) -$$

$$-(u_{11}v_{22} - u_{22}v_{11})(u_1u_2 + v_1v_2) + (u_{12}v_{22} - u_{22}v_{12})(1 + u_1^2 + v_1^2)\big].$$

В качестве примера снова рассмотрим комплексно-аналитическую кривую. Используя полученную формулу и соотношения для первых и вторых производных функций u и v, находим

$$\varkappa_\Gamma = -2\frac{v_{11}v_{22} - v_{12}^2}{\big(1 + v_1^2 + v_2^2\big)^3}.$$

Это выражение только знаком отличается от ранее найденного выражения для гауссовой кривизны K. Следовательно, для комплексно-аналитической кривой справедливо соотношение

$$K + \varkappa_\Gamma = 0.$$

Другой интересный класс поверхностей задается уравнениями

$$u = \Phi_x, \qquad v = \Phi_y,$$

где $\Phi(x, y)$ — некоторая регулярная функция. Для такой поверхности гауссова кривизна выражается через третьи производные функции Φ:

$$K = \frac{1}{g^2}\big[(\Phi_{xxx}\Phi_{xyy} - \Phi_{xxy}^2)(1+\Phi_{xy}^2+\Phi_{yy}^2) -$$

$$-(\Phi_{xxx}\Phi_{yyy} - \Phi_{xxy}\Phi_{xyy})(\Phi_{xx}+\Phi_{yy})\Phi_{xy} + (\Phi_{xxy}\Phi_{yyy} - \Phi_{xyy}^2)(1+\Phi_{xx}^2+\Phi_{xy}^2)\big],$$

где

$$g = 1 + \Phi_{xx}^2 + 2\Phi_{xy}^2 + \Phi_{yy}^2 + (\Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2)^2.$$

Гауссово кручение $\varkappa_\Gamma$ имеет тоже же самое выражение, т. е. для такой поверхности

$$K = \varkappa_\Gamma.$$

Более общие поверхности в E^4 с $K \pm \varkappa_\Gamma = 0$ найдены в [15].

Для уже рассмотренной поверхности $u = f(x)\cos y,\ v = f(x)\sin y$ в [16] установлено выражение гауссового кручения

$$\varkappa_\Gamma = \frac{f''f'(1+f^2) + f'f(1+f'^2)}{(1+f^2)^2(1+f'^2)^2}$$

и с его помощью найдена поверхность с постоянным и отличным от нуля гауссовым кручением. Доказано, что ширина полосы $t_1 \le x \le t_2$ на регулярной части поверхности ограничена сверху.

6. Формула С. Н. Бернштейна и ее применение в работе Хайнца. Пусть на плоскости (x, y) в круге D радиуса R задана регулярная функция $z = z(x, y)$ класса C^2. Эта функция определяет поверхность F^2 в E^3. Будем предполагать, что центр круга совпадает с началом координат и в круге введены полярные координаты $r,\ \phi$. Круг радиуса r с центром в начале координат обозначим через $D(r)$, а его граничную окружность — через $\Gamma(r)$.

Для доказательства теоремы Н. В. Ефимова Хайнц использовал формулу С. Н. Бернштейна

$$\frac{d}{dr}\int\limits_{\Gamma(r)} \frac{z_\phi^2}{r}\,d\phi = 2\int\limits_{D(r)} (z_{xy}^2 - z_{xx}z_{yy})\,dx\,dy + \int\limits_{\Gamma(r)} z_r^2\,d\phi. \tag{5}$$

Доказательство этой формулы приведем в пункте 7.

Будем предполагать, что гауссова кривизна K поверхности F^2 удовлетворяет неравенству

$$K \le -K_0 < 0,$$

где K_0 — положительная постоянная. Поскольку

$$K = \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{(1+z_x^2+z_y^2)^2},$$

то для производных функции z выполняется неравенство

$$z_{xy}^2 - z_{xx}z_{yy} \ge K_0(1+z_x^2+z_y^2)^2.$$

Введем функцию от одной переменной t

$$f(t) = \int\limits_0^t \left(\int\limits_{\Gamma(r)} \frac{z_\phi^2}{r}\,d\phi\right) dr + S(t),$$

где $S(t)$ — площадь круга радиуса t, т. е. πt^2. Производная этой функции

$$f'(t) = \int\limits_{\Gamma(t)} \frac{z_\phi^2}{t}\, d\phi + 2\pi t.$$

Заметим, что $f(0) = 0,\ f'(0) = 0$. Действительно, интеграл в выражении f' можно записать в виде

$$\int\limits_{\Gamma(t)} z_s^2\, ds,$$

где s — длина дуги окружности $\Gamma(t)$. Поскольку функция $z(x, y)$ регулярна, то модуль производной z_s ограничен сверху. При $t \to 0$ длина окружности $\Gamma(t)$ стремится к нулю, следовательно, этот интеграл тоже стремится к нулю. Кроме того, отметим, что $f(t) \geq \pi t^2$.

Из формулы С. Н. Бернштейна (5) следует, что

$$f''(t) = 2 \int\limits_{D(t)} (z_{xy}^2 - z_{xx} z_{yy})\, dx\, dy + \int\limits_{\Gamma(t)} z_t^2\, d\phi + 2\pi \geq$$

$$\geq 2K_0 \int\limits_{D(t)} (1 + z_x^2 + z_y^2)^2\, dx\, dy + 2\pi.$$

С другой стороны, оценим сверху функцию $f(t)$:

$$f(t) = \int\limits_0^t \left(\int\limits_{\Gamma(r)} z_s^2 ds \right) dr + \int\limits_{D(t)} dx\, dy \leq \int\limits_{D(t)} (1 + z_x^2 + z_y^2)\, dx\, dy.$$

Применим неравенство Коши – Буняковского

$$\left(\int\limits_{D(t)} (1 + z_x^2 + z_y^2)\, dx\, dy \right)^2 \leq \left[\int\limits_{D(t)} \big((1 + z_x^2 + z_y^2)^2\, dx\, dy \right] \pi t^2.$$

Поэтому

$$f^2(t) \leq \left[\int\limits_{D(t)} (1 + z_x^2 + z_y^2)\, dx\, dy \right] \pi t^2.$$

Сравнивая с неравенством для второй производной, получаем

$$f''(t) \geq \frac{2K_0 f^2(t)}{\pi t^2}.$$

Заметим, что $f'(t) > 0$ при $t > 0$. Умножим обе части неравенства на $f'(t)$ и проинтегрируем от 0 до t. Учитывая, что $f(0) = f'(0) = 0$, получаем

$$\frac{f'(t)}{f^{\frac{3}{2}}(t)} \geq \frac{2\sqrt{K_0}}{\sqrt{3\pi} t}.$$

Предполагая, что $0 < t_1 < t_2$, интегрируем от t_1 до t_2. В результате имеем

$$\frac{1}{\sqrt{f}(t_1)} - \frac{1}{\sqrt{f}(t_2)} \geq \frac{2\sqrt{K_0}}{\sqrt{3\pi}} \ln \frac{t_2}{t_1}.$$

Поскольку $f(t) \geq \pi t^2$, находим

$$\frac{1}{t_1} \geq \frac{2\sqrt{K_0}}{\sqrt{3}} \ln \frac{t_2}{t_1}.$$

Оценка для t_2 выражается через t_1 следующим образом:

$$\frac{1}{t_1} + \frac{2\sqrt{K_0}}{\sqrt{3}} \ln t_1 \geq \frac{2\sqrt{K_0}}{\sqrt{3}} \ln t_2.$$

Рассмотрим функцию, стоящую в левой части этого неравенства:

$$\theta(t_1) = \frac{1}{t_1} + \frac{2\sqrt{K_0}}{\sqrt{3}} \ln t_1.$$

Найдем точку минимума этой функции. Имеем

$$\theta'(t_1) = -\frac{1}{t^2} + \frac{2\sqrt{K_0}}{\sqrt{3}t_1} = 0.$$

Следовательно, минимальное значение функции $\theta(t_1)$ достигается при $\dfrac{1}{t_1} = \dfrac{2\sqrt{K_0}}{\sqrt{3}}$. Находим оценку для t_2:

$$1 + \ln \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{K_0}} \geq \ln t_2.$$

Полагая $t_2 = R$, делаем заключение: *радиус R круга D, над которым может существовать регулярная поверхность вида $z = z(x, y)$ с гауссовой кривизной $K \leq -K_0$, ограничен сверху, т. е.*

$$R \leq \frac{\sqrt{3}e}{2\sqrt{K_0}}.$$

Эта оценка Хайнца немного улучшает оценку Н. В. Ефимова.

7. Доказательство формулы С. Н. Бернштейна (5). Запишем преобразование координат

$$x = r\cos\phi, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$y = r\sin\phi, \qquad \phi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Находим связь производных

$$z_x = z_r r_x + z_\phi \phi_x = z_r \cos\phi - z_\phi \frac{\sin\phi}{r},$$

$$z_y = u_r r_y + z_\phi \phi_y = z_r \sin\phi + z_\phi \frac{\cos\phi}{r}.$$

Гессиан функции z представим в виде

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(z_x z_{yy} - z_y z_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(z_y z_{xx} - z_x z_{xy})\right].$$

Заметим, что если выполнить дифференцирование в правой части, все третьи производные взаимно сократятся. Проинтегрируем гессиан функции z по кругу D и используем формулу Грина. Тогда получим

$$J = \int\limits_D (z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{\Gamma(r)} (z_x z_{xy} - z_y z_{xx})dx + (z_x z_{yy} - z_y z_{xy})dy\right] =$$

$$= \int\limits_{\Gamma(r)} z_x(z_{yx}dx + z_{yy}dy) - z_y(z_{xx}dx + z_{xy}dy) = \int\limits_{\Gamma(r)} (z_x dz_y - z_y dz_x).$$

Подставим выражения производных функции z и учтем, что дифференциалы этих производных берутся по граничной окружности при фиксированном r. В результате будем иметь

$$J = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{\Gamma(r)} \left\{\left(z_r\cos\phi - z_\phi\frac{\sin\phi}{r}\right)\left(z_{r\phi}\sin\phi + z_{\phi\phi}\frac{\cos\phi}{r} + z_r\cos\phi - z_\phi\frac{\sin\phi}{r}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(z_r\sin\phi + z_\phi\frac{\cos\phi}{r}\right)\left(z_{r\phi}\cos\phi - z_{\phi\phi}\frac{\sin\phi}{r} - z_r\sin\phi - z_\phi\frac{\cos\phi}{r}\right)\right\} d\phi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int\limits_{\Gamma(r)} \left(-\frac{z_\phi z_{r\phi}}{r} + \frac{z_r z_{\phi\phi}}{r} + z_r^2 + \frac{z_\phi^2}{r^2}\right) d\phi\right].$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\Gamma(r)} \frac{z_r z_{\phi\phi}}{r} d\phi = \int\limits_{\Gamma(r)} \left(\frac{\partial z_r z_\phi}{r\partial\phi} - \frac{z_{r\phi}z_\phi}{r}\right) d\phi = -\int\limits_{\Gamma(r)} \frac{z_\phi z_{r\phi}}{r} d\phi.$$

Кроме того, можно записать

$$-2\frac{z_\phi z_{r\phi}}{r} + \frac{z_\phi^2}{r^2} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{z_\phi^2}{r}\right).$$

Поскольку интегрирование проводится по окружности $r = \mathrm{const}$, то производную по r можно вынести за знак интеграла. В результате получим формулу С. Н. Бернштейна (5). Впервые эта формула была установлена в труднодоступной работе [45].

8. Обобщение формулы С. Н. Бернштейна (5). Обобщим формулу С. Н. Бернштейна (5), предположив, что функция z задана в некоторой области с общей римановой метрикой $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$.

1. Сначала рассмотрим интеграл по площади от дивергенции некоторого вектора. Если векторное поле a задано своими контравариантными компонентами a^i, то выражение $a^i_{,i}$ называется дивергенцией поля a, т. е.

$$\operatorname{div} a = a^i_{,i}.$$

Здесь запятая с индексом внизу обозначает ковариантную производную.

Дивергенцию поля a можно записать и в таком виде:

$$\operatorname{div} a = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial a^i \sqrt{g}}{\partial x^i},$$

где $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$. Действительно, выражение в правой части можем записать в виде

$$\frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \frac{a^i}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^i} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ki} a^i = a^i_{,i},$$

так как в римановой геометрии известно, что $\Gamma^k_{ki} = \dfrac{\partial g}{2g\partial x^i}$. Проинтегрируем теперь $\operatorname{div} a$ по площади некоторой области D с границей Γ. В результате, применив формулу Стокса, получим

$$\int\limits_D \operatorname{div} a dS = \int\limits_D \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial a^i \sqrt{g}}{\partial x^i} \sqrt{g} dx^1 dx^2 =$$

$$= \int\limits_\Gamma \sqrt{g}(-a^2 dx^1 + a^1 dx^2).$$

Касательный вектор к кривой Γ имеет контравариантные компоненты dx^1, dx^2. Введем единичный нормальный вектор τ к кривой Γ с помощью его ковариантных компонент, положив

$$\tau_1 = \lambda dx^2, \qquad \tau_2 = -\lambda dx^1.$$

Тогда условие ортогональности будет выполнено: $dx^i \nu_i = 0$. Найдем λ из условия единичности этого вектора. Имеем

$$1 = \tau_i \tau_j g^{ij} = \lambda^2 \big[(dx^2)^2 g^{11} - 2dx^1 dx^2 g^{12} + (dx^1)^2 g^{22}\big].$$

Но

$$g^{11} = g_{22}/g, \qquad g^{12} = -g_{12}/g, \qquad g^{22} = g_{11}/g.$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{\sqrt{g}}{ds},$$

где ds — элемент длины дуги кривой Γ. С учетом полученных соотношений можем записать

$$\int\limits_D \operatorname{div} a \, dS = \int\limits_\Gamma (a\tau)\, ds, \tag{6}$$

т. е. интеграл по площади от дивергенции поля a выражается через интеграл по длине дуги по границе от скалярного произведения этого поля на единичный нормальный вектор к границе.

2. В 1901 г. Риччи и Леви-Чивита в работе „Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications" для функции $\phi(x^1, \ldots, x^n)$, заданной на n-мерном римановом пространстве, определили дифференциальные инварианты этой функции как коэффициенты при $\lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}, \ldots, \lambda$ в уравнении

$$\frac{1}{g}|\phi_{,ij} - \lambda g_{ij}| = 0.$$

Запишем это уравнение при $n = 2$:

$$\frac{1}{g}\begin{vmatrix}\phi_{,11} - \lambda g_{11} & \phi_{,12} - \lambda g_{12} \\ \phi_{,21} - \lambda g_{21} & \phi_{,22} - \lambda g_{22}\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{g}\big[\phi_{,11}\phi_{,22} - (\phi_{,12})^2 - \lambda(\phi_{,11}g_{22} - 2\phi_{,12}g_{12} + \phi_{,22}g_{11}) + \lambda^2 g\big] = 0.$$

Заметим, что для вторых ковариантных производных функции имеет место равенство $\phi_{,ij} = \phi_{,ji}$. Коэффициент при $-\lambda$ есть оператор Лапласа – Бельтрами

$$\nabla_2\phi = \phi_{,ij}g^{ij}.$$

Следующее выражение является обобщением оператора Монжа – Ампера (или обобщенным гессианом):

$$\nabla_{22}\phi = \frac{\phi_{,11}\phi_{,22} - (\phi_{,12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}.$$

Преобразуем выражение этого оператора, выделив в нем дивергентную часть:

$$\nabla_{22}\phi = \nu^1_{,1} + \nu^2_{,2} + \frac{1}{2g}\big[-\phi_{,1}(\phi_{,221} - \phi_{,122}) + \phi_{,2}(\phi_{,121} - \phi_{,112})\big],$$

где использованы обозначения

$$\nu^1 = \frac{\phi_{,1}\phi_{,22} - \phi_{,2}\phi_{,12}}{2g},$$

$$\nu^2 = \frac{\phi_{,2}\phi_{,11} - \phi_1\phi_{,12}}{2g}.$$

Векторное поле с компонентами ν^i обозначим через ν. Проверку тензорного характера величин ν^i проведем ниже. Для разности третьих ковариантных производных используем формулу римановой геометрии. В результате получим

$$\phi_{,221} - \phi_{,122} = R^{i}_{.221}\phi_{,i} = R_{1221}\phi^{,1},$$

$$\phi_{,121} - \phi_{,112} = R^{i}_{.121}\phi_{,i} = R_{2121}\phi^{,2}.$$

Здесь R_{ijkl} — тензор Римана метрики ds^2. Но гауссова кривизна K метрики ds^2 вычисляется по формуле

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}.$$

Итак, можем записать

$$\nabla_{22}\phi = \operatorname{div}\nu + \frac{1}{2}K\nabla_1\phi, \qquad (7)$$

где $\nabla_1\phi = |\operatorname{grad}\phi|^2$ — первый дифференциальный параметр Бельтрами.

Рассмотрим интеграл от $\nabla_{22}z$ по некоторой области D. Применяя формулу (6), получаем

$$\int\limits_D \nabla_{22}z\,dS = \int\limits_\Gamma (\nu\tau)ds + \int\limits_D \frac{1}{2}K\nabla_1 z\,dS. \tag{8}$$

3. Установим теперь, что набор величин ν^i составляет тензор. Пусть введены другие координаты

$$u^i = u^i(x^1, x^2), \quad i = 1, 2.$$

Чертой сверху будем отмечать величины, относящиеся к новым координатам. Если ν^i составляют тензор, то в новых координатах должно быть

$$\bar{\nu}^\alpha = \nu^i \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}.$$

В частности, проверим, что $\bar{\nu}^1 = \nu^i \dfrac{\partial u^1}{\partial x^i}$. По определению имеем

$$\bar{\nu}^1 = \frac{\bar{\phi}_{,1}\bar{\phi}_{,22} - \bar{\phi}_{,2}\bar{\phi}_{,12}}{\bar{g}}.$$

По определению тензора получаем

$$\bar{\phi}_{,\alpha} = \phi_i \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \qquad \bar{\phi}_{,\beta\gamma} = \phi_{,ij}\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}\frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}, \qquad \bar{g} = gJ^2\left(\frac{x^1, x^2}{u^1, u^2}\right),$$

где $J\left(\dfrac{x^1, x^2}{u^1, u^2}\right)$ — якобиан перехода от старых координат к новым. Подставляя эти выражения, находим

$$\bar{\nu}^1 = \left[\nu^1\frac{\partial x^2}{\partial u^2} - \nu^2\frac{\partial x^1}{\partial u^2}\right]\frac{1}{J\left(\dfrac{x^1, x^2}{u^1, u^2}\right)}.$$

Но справедливы соотношения

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^1} = \frac{\dfrac{\partial x^2}{\partial u^2}}{J\left(\dfrac{x^1, x^2}{u^1, u^2}\right)}, \qquad \frac{\partial u^1}{\partial x^2} = -\frac{\dfrac{\partial x^1}{\partial u^2}}{J\left(\dfrac{x^1, x^2}{u^1, u^2}\right)}.$$

Поэтому

$$\bar{\nu}^1 = \nu^i\frac{\partial u^1}{\partial x^i},$$

что и требовалось доказать.

4. Перейдем теперь непосредственно к доказательству обобщения формулы С. Н. Бернштейна. В окрестности кривой Γ введем полугеодезическую систему координат x^1, x^2 или в других обозначениях r, ϕ, в которой метрика имеет вид $ds^2 = (dr)^2 + G(d\phi)^2$. Для этого проведем ортогонально к кривой Γ геодезические линии, которые будут линиями $\phi = \mathrm{const}$, и затем возьмем их ортогональные траектории, т. е. линии $r = \mathrm{const}$, которые обозначаются $\Gamma(r)$. Единичный касательный вектор τ, ортогональный к $\Gamma(r)$, имеет компоненты $\tau^1 = 1$,

$\tau^2 = 0$. Поэтому скалярное произведение $(\nu\tau) = \nu^1$. Заметим, что в этом случае $\nu^1 = \nu_1$, так как $g_{11} = 1,\ g_{12} = 0$. Обратимся к формуле (8) и рассмотрим контурный интеграл, который обозначим через A:

$$A = \int\limits_{\Gamma(r)} (\nu\tau)\, ds = \int\limits_{\Gamma(r)} \frac{z_1 z_{,22} - z_2 z_{,12}}{2g} \sqrt{G}\, du^2.$$

Запишем выражения ковариантных производных функции z. Первые производные совпадают с обычными. Для вторых производных имеем

$$z_{,22} = z_{u^2u^2} - \Gamma^1_{22} z_{u^1} - \Gamma^2_{22} z_{u^2},$$

$$z_{,12} = z_{u^1u^2} - \Gamma^1_{12} z_{u^1} - \Gamma^2_{12} z_{u^2}.$$

Учитывая значения символов Кристоффеля

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2} G_{u^1}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2G} G_{u^2}, \qquad \Gamma^1_{12} = 0, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2G} G_{u^1}$$

и соотношения $g = G,\ ds = \sqrt{G} du^2$, получаем

$$A = \int\limits_{\Gamma(r)} \left[\frac{z_{u^1} z_{u^2u^2}}{2\sqrt{G}} - \frac{z_{u^1} z_{u^2} G_{u^2}}{4G^{3/2}} - \frac{z_{u^2} z_{u^1u^2}}{2\sqrt{G}} + \frac{G_{u^1} z^2_{u^2}}{4G^{3/2}} + \frac{G_{u^1} z^2_{u^1}}{4\sqrt{G}} \right] du^2.$$

Используем соотношения

$$\frac{z_{u^1} z_{u^2u^2}}{2\sqrt{g}} - \frac{G_{u^2} z_{u^1} z_{u^2}}{4G^{3/2}} = \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{z_{u^1} z_{u^2}}{2\sqrt{G}} \right) - \frac{z_{u^2} z_{u^1u^2}}{2\sqrt{G}}.$$

При интегрировании первого слагаемого справа по замкнутой кривой $\Gamma(r)$ получим нуль. Второе слагаемое справа объединим с третьим слагаемым в выражении для A. Далее можем записать

$$-\frac{z_{u^2} z_{u^1u^2}}{\sqrt{G}} + \frac{G_{u^1} z^2_{u^2}}{4G^{3/2}} = -\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{z^2_{u^2}}{2\sqrt{G}} \right), \qquad \frac{1}{\rho_g} = \frac{G_{u^1}}{2G}, \qquad \frac{z_{u^2}}{\sqrt{G}} = z_s,$$

где $\dfrac{1}{\rho_g}$ — геодезическая кривизна кривой $\Gamma(r)$. Подставим эти выражения в выражение для A. Применяя формулу (8), получаем **обобщение формулы С. Н. Бернштейна (5) на произвольные двумерные поверхности:**

$$2 \int\limits_{D(r)} \nabla_{22} z\, dS = -\frac{d}{dr} \int\limits_{\Gamma(r)} (z_s)^2\, ds + \int\limits_{\Gamma(r)} \frac{(z_r)^2}{\rho_g}\, ds + \int\limits_{D(r)} K \nabla_1 z\, dS. \tag{9}$$

Здесь K — гауссова кривизна метрики ds^2, $\dfrac{1}{\rho_g}$ — геодезическая кривизна кривой $\Gamma(r)$, $\nabla_1 z = |\operatorname{grad} z|^2$ — первый дифференциальный параметр Бельтрами функции z, или, иными словами, квадрат модуля градиента этой функции. В первых двух интегралах справа интегрирование проводится по длине дуги s.

Формула была получена автором в статье [12].

9. Связь кривизн метрик $d\sigma^2$ и $ds^2 = d\sigma^2 + du^2$. Пусть на n-мерном римановом многообразии с метрикой

$$d\sigma^2 = a_{ij} dx^i dx^j$$

задана регулярная функция $u(x^1, \ldots, x^n)$. Установим связь кривизн метрик $d\sigma^2$ и $ds^2 = d\sigma^2 + du^2$. Коэффициенты метрики ds^2 обозначим через g_{ij}. Имеем

$$g_{ij} = a_{ij} + u_i u_j,$$

где u_i — производные функции u по координатам x^i. Всегда можно выбрать координаты так, чтобы в фиксированной точке P_0 символы Кристоффеля метрики $d\sigma^2$ были равны нулю; в этой точке координаты ортогональны и $a_{ij} = \delta_{ij}$. Пусть R_{hijk} — тензор Римана метрики ds^2, $\bar{R}_{hijk}$ — тензор Римана метрики $d\sigma^2$. Воспользуемся формулой для тензора Римана из книги Л. П. Эйзенхарта „Риманова геометрия”:

$$R_{hijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{hk}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^h \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{hj}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^h}\right) +$$

$$+ g^{lm}(\Gamma_{ij,m}\Gamma_{hk,l} - \Gamma_{ik,m}\Gamma_{hj,l}).$$

Здесь $\Gamma_{pl.m}$ — символы Кристоффеля метрики ds^2. Но в точке P_0 $\Gamma_{ij,k} = u_{ij} u_k$. Далее положим $h = j,\ i = k$. Тогда

$$R_{hihi} = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 a_{hi}}{\partial x^h \partial x^i} - \frac{\partial^2 a_{hh}}{\partial x^i \partial x^i} - \frac{\partial^2 a_{ii}}{\partial x^h \partial x^h}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 u_h u_i}{\partial x^h \partial x^i} - \frac{\partial^2 u_h^2}{\partial x^i \partial x^i} - \frac{\partial^2 u_i^2}{\partial x^h \partial x^h}\right) + g^{lm}(u_{ih}^2 - u_{ii}u_{hh})u_l u_m.$$

Первое слагаемое справа, содержащее только производные a_{ij}, составляет тензор Римана метрики $d\sigma^2$ в точке P_0. Третьи смешанные производные функции u взаимно уничтожаются. Имеем

$$R_{hihi} = \bar{R}_{hihi} + (u_{,hh}u_{,ii} - u_{,ih}^2)(1 - u_l u_m g^{lm}).$$

Мы заменили обычные производные функции u на ковариантные, так как в точке P_0 символы Кристоффеля метрики $d\sigma^2$ равны нулю. Кривизна площадки, касающейся координатных линий $x^h,\ x^i$, равна

$$K_{hi} = \frac{R_{hihi}}{g_{hh}g_{ii} - g_{hi}^2}.$$

Поскольку $g_{hh}g_{ii} - g_{hi}^2 = 1 + u_h^2 + u_i^2$, то можем записать связь кривизн площадок метрик $d\sigma^2$ и ds^2:

$$K_{hi} = \frac{\bar{K}_{hi}}{1 + u_h^2 + u_i^2} + \frac{(u_{,hh}u_{,ii} - u_{,hi}^2)(1 - u_l u_m g^{lm})}{1 + u_h^2 + u_i^2}. \tag{10}$$

Заметим, что $u_l u_m g^{lm}$ — квадрат модуля градиента функции u в метрике ds^2. Найдем его выражение через $\nabla_1 u$. По определению метрики ds^2 в выбранной точке

$$g_{ij} = \delta_{ij} + u_i u_j, \qquad g = \det|g_{ij}| = 1 + \sum_{j=1}^{n} u_j^2 = 1 + \nabla_1 u.$$

В то же время коэффициенты обратного метрического тензора g^{jk} имеют вид

$$g^{jk} = \frac{1}{g}(\delta_{jk} g - u_j u_k).$$

Действительно, проверим, что выполняются соотношения для обратного метрического тензора

$$g_{ij}g^{jk} = (\delta_{ij} + u_i u_j)(\delta_{jk} g - u_j u_k)/g =$$

$$= \left(\delta_{ij}\delta_{jk} g + u_i u_j \delta_{jk} g - u_j u_k \delta_{ij} - u_i u_k \sum_{j=1}^{n} u_j^2 \right) \Big/ g = \delta_{ik}.$$

С помощью указанных выражений для g^{ij} находим

$$u_j u_k g^{jk} = u_j u_k (\delta_{jk} g - u_j u_k)/g = \left(g \sum_j u_j^2 - \sum_j u_j^2 \sum_k u_k^2 \right) \Big/ g =$$

$$= \frac{\sum_j u_j^2}{g} = \frac{\nabla_1 u}{g}.$$

Следовательно,

$$1 - u_l u_m g^{lm} = \frac{1}{1 + \nabla_1 u}.$$

С учетом этих соотношений формула (10) принимает вид

$$K_{hi} = \frac{\bar{K}_{hi}}{1 + u_h^2 + u_i^2} + \frac{u_{,hh}u_{,ii} - u_{,hi}^2}{(1 + u_h^2 + u_i^2)(1 + \nabla_1 u)}.$$

Рассмотрим случай $n = 2$. В этом случае $u_1^2 + u_2^2 = \nabla_1 u$ — первый дифференциальный параметр Бельтрами. **Связь гауссовых кривизн двумерных метрик $d\sigma^2$ и $ds^2 = d\sigma^2 + du^2$ определяется формулой**

$$K(1 + \nabla_1 u)^2 = \bar{K}(1 + \nabla_1 u) + \nabla_{22} u. \tag{11}$$

Здесь $\bar{K}$ — кривизна метрики $d\sigma^2$, K — кривизна метрики ds^2. Применим эту формулу в следующем пункте.

10. Оценка размеров области с двумерной метрикой $d\sigma^2$ с большой по модулю отрицательной кривизной, в которой задана метрика $ds^2 = d\sigma^2 + (du)^2$. Пусть в некоторой области D заданы две метрики $d\sigma^2$ и $ds^2 = d\sigma^2 + (du)^2$, где u — регулярная функция. Будем предполагать, что гауссова кривизна K метрики ds^2 отрицательна и ее модуль больше модуля кривизны $\bar{K}$ метрики $d\sigma^2$. Покажем, что можно получить оценку сверху размеров области D, аналогичную оценке Н. В. Ефимова для поверхностей $z = z(x, y)$.

Обозначим через $C(r)$ геодезический круг в метрике $d\sigma^2$ радиуса r. Будем предполагать, что для любого $r \in [0, R]$ граница круга $C(r)$ имеет геодезическую кривизну $\dfrac{1}{\rho_g} \geq 0$. Это условие выполнено, если гауссова кривизна метрики $d\sigma^2$ неположительна или R мало. Пусть $S(r)$ — площадь круга $C(r)$ и $L(r)$ — длина окружности $\Gamma(r)$ в метрике $d\sigma^2$. Определим величину $M(R)$, зависящую от метрики $d\sigma^2$:

$$M(R) = \inf_{0 \leq r \leq R} \frac{S(r)}{L(r)^2}.$$

Число $M(R)$ отлично от нуля, так как отношение $S(r)$ к $L^2(r)$ при $r \to 0$ стремится к $\dfrac{1}{4\pi}$.

Заметим, что если $K = \bar{K}$, то оценку получить нельзя. Действительно, в этом случае можно положить $u = \mathrm{const}$ во всей области задания метрики $d\sigma^2$. Поэтому K надо „отделить” от $\bar{K}$, что мы сделаем с помощью постоянного множителя λ при K.

Теорема 1. *Пусть существует постоянная $K_0 > 0$ такая, что для гауссовых кривизн K и $\bar{K}$ выполнено $K \leq -K_0^2$ и существует число λ $(0 \leq \lambda < 1)$ такое, что $\lambda K \leq \bar{K}$.*
Тогда

$$S(R)M(R) \leq \frac{3e^2}{4(1-\lambda)K_0^2}.$$

Для доказательства используем метод Хайнца, видоизмененный применительно к данному случаю. Введем функцию

$$f(r) = \int\limits_0^r \int\limits_{\Gamma(r)} u_\sigma^2 \, d\sigma \, dr + S(r).$$

Здесь σ — длина дуги $\Gamma(r)$ в метрике $d\sigma^2$, u_σ — производная u по длине дуги этой кривой, r — длина дуги по геодезическому радиусу. Эту функцию можно также записать в виде

$$f(r) = \int\limits_{C(r)} (1 + u_\sigma^2) \, dS.$$

Используем обобщенную формулу С. Н. Бернштейна (9), в которой вместо z подставим u, а вместо K — $\bar{K}$. Применим также формулу (11), связывающую кривизны K, $\bar{K}$ и оператор Монжа – Ампера. Тогда получим

$$\frac{d}{dr} \int\limits_{\Gamma(r)} \frac{u_\sigma^2}{2} \, d\sigma = \int\limits_{\Gamma(r)} \frac{u_r^2}{2} \frac{1}{\rho_g} \, d\sigma + \int\limits_{C(r)} \left[-K(1 + \nabla_1 u)^2 + \bar{K} \left(1 + \frac{3}{2} \nabla_1 u \right) \right] dS. \tag{12}$$

Используя неравенство Коши – Буняковского, находим

$$f(r) \leq \left(\int\limits_{C(r)} (1 + \nabla_1 u)^2 \, dS \right)^{1/2} (S(r))^{1/2}. \tag{13}$$

Штрихом обозначим производную по r. Тогда

$$f'(r) = \int\limits_{\Gamma(r)} u_\sigma^2 \, d\sigma + L(r).$$

Для вычисления второй производной $f''(r)$ используем уравнение (12). Заметим также, что производная от $L(r)$ равна интегралу от геодезической кривизны кривой $\Gamma(r)$. Действительно, если мы запишем метрику $d\sigma^2$ в полугеодезической системе координат $d\sigma^2 = dr^2 + G d\phi^2$, то

$$L(r) = \int\limits_{\Gamma(r)} \sqrt{G} \, d\phi, \qquad L' = \int\limits_{\Gamma(r)} \frac{G_r}{2G} \sqrt{G} \, d\phi = \int\limits_{\Gamma(r)} \frac{1}{\rho_g} \, d\sigma.$$

По предположению геодезическая кривизна положительна, поэтому $L' \geq 0$. Оценим подынтегральное выражение в последнем интеграле справа в (12), которое обозначим через A:

$$A = -K(1 + \nabla_1 u)^2 + \bar{K} \left(1 + \frac{3}{2} \nabla_1 u \right).$$

Если в рассматриваемой точке $\bar{K} \geq 0$, то в этой точке

$$A \geq K_0^2 (1 + \nabla_1 u)^2.$$

Пусть теперь в рассматриваемой точке $\bar{K} < 0$. Тогда

$$A = -(1 - \lambda) K (1 + \nabla_1 u)^2 - \lambda K + \bar{K} + 2(-\lambda K + \bar{K}) \nabla_1 u - \lambda K (\nabla_1 u)^2 - \frac{1}{2} \bar{K} \nabla_1 u \geq$$

$$\geq (1 - \lambda) K_0^2 (1 + \nabla_1 u)^2,$$

где мы использовали условие теоремы $-\lambda K + \bar{K} \geq 0$ и $\bar{K} < 0$.

Имеем

$$f'' = \frac{d}{dr} \int\limits_{\Gamma(r)} u_\sigma^2 \, d\sigma + L' \geq 2(1 - \lambda) K_0^2 \int\limits_{C(r)} (1 + \nabla_1 u)^2 \, dS.$$

Используя (13), находим

$$f''(r) \geq \frac{2(1 - \lambda) K_0^2 f^2(r)}{S(r)}. \tag{14}$$

Очевидно, $f'(r) > 0$ при $r > 0$, $f(0) = f'(0) = 0$. Умножая правую и левую части неравенства (14) на $f'(r)$ и интегрируя от 0 до r, получаем

$$f'^2(r) \geq \frac{4(1 - \lambda) K_0^2 f^3(r)}{3S(r)}.$$

Запишем это неравенство в виде

$$\frac{f'(r)}{f^{3/2}(r)} \geq \frac{2\sqrt{1-\lambda}K_0}{\sqrt{3S(r)}}$$

и проинтегрируем от $r_1 > 0$ до r_2. В результате получим

$$\frac{1}{\sqrt{f(r_1)}} - \frac{1}{\sqrt{f(r_2)}} \geq \sqrt{1-\lambda}K_0 \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{3S(r)}}.$$

Используем теперь неравенство $f(r_1) \geq S(r_1)$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{S(r_1)}} \geq \sqrt{1-\lambda}K_0 \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{3S(r)}}. \tag{15}$$

Заметим, что

$$0 < \left(\sqrt{S(r)}\right)' = \frac{L(r)}{2\sqrt{S(r)}} \leq \frac{1}{2\sqrt{M(R)}}.$$

Использовав это неравенство и оценку (15), в которой положим $r_2 = R$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{S(r_1)}} \geq \sqrt{1-\lambda}K_0 \int\limits_{r_1}^{R} \frac{\left(\sqrt{S(r)}\right)' dr}{\left(\sqrt{S(r)}\right)' \sqrt{3S(r)}} \geq \frac{\sqrt{1-\lambda}K_0 M^{1/2}(R)}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{S(R)}}{\sqrt{S(r_1)}}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{S(r_1)}} + \frac{2\sqrt{1-\lambda}K_0 M^{1/2}(R)}{\sqrt{3}} \ln \sqrt{S(r_1)} \geq \frac{2\sqrt{1-\lambda}K_0 M^{1/2}(R)}{\sqrt{3}} \ln \sqrt{S(R)}.$$

Минимум левой части достигается при $\sqrt{S(r_1)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{M(R)(1-\lambda)}K_0}$. Подставив это значение в левую часть, получим оценку на $S(R)$, из которой следует доказываемое неравенство

$$S(R)M(R) \leq \frac{3e^2}{4(1-\lambda)K_0^2}.$$

Существование такой оценки свидетельствует о том, что при заданной метрике $d\sigma^2$ и заданном геодезическом круге $C(R)$ в этой метрике число K_0 не может быть сколь угодно большим. Действительно, правая часть этого неравенства при $K_0 \to \infty$ стремится к нулю, а левая часть имеет фиксированное, отличное от нуля значение. Оценка ухудшается, когда λ приближается к 1, т. е. когда кривизна K становится близкой к $\bar{K}$.

11. О проектировании на полные неограниченные многообразия. Рассмотрим теперь вопрос о существовании метрики ds^2 на полном неограниченном в метрике $d\sigma^2$ многообразии M^2. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если на многообразии M^2 с метрикой $d\sigma^2$, полном и неограниченном в этой метрике, гауссова кривизна которого $\bar{K} \geq 0$, существует точка P_0 без сопряженных и K — гауссова кривизна метрики $ds^2 = d\sigma^2 + (du)^2$, то*

$$\sup_{M^2} K \geq 0.$$

Для доказательства построим полугеодезическую систему координат с началом в точке P_0, в которой $d\sigma^2 = dr^2 + Gd\phi^2$. Отсутствие сопряженных точек к точке P_0 обеспечивает выпуклость геодезических окружностей. Поскольку

$$\bar{K} = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}}$$

и $\bar{K} \geq 0$, то $\sqrt{G}$ увеличивается не быстрее линейной функции: $\sqrt{G} \leq cr$ для достаточно больших r. Здесь $c = \mathrm{const}$. Поэтому длина окружности $L(r)$ увеличивается не быстрее линейной функции

$$L(r) = \int \sqrt{G}\, d\phi \leq 2\pi cr.$$

Площадь геодезических кругов $S(r)$ для достаточно больших r

$$S(r) = \int \sqrt{G}\, d\phi\, dr \leq \pi cr^2.$$

Пусть $\sup_{M_2} K \leq -K_0^2 < 0$. Можем использовать рассмотрения из доказательства теоремы 1, в условиях которой можно положить $\lambda = 0$. Используем неравенство (11), устремив r_2 к бесконечности. Тогда при больших r будем иметь

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{S(r)}}\, dr \geq \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{c\pi r}}\, dr \to \infty.$$

Это противоречит неравенству (15) при любом $K_0 \neq 0$. Следовательно, $\sup_{M^2} K = 0$.

Теорема 2 доказана.

12. Уравнение Дарбу для квадрата длины радиуса-вектора поверхности в $\boldsymbol{E^3}$. Пусть $r = r(u^1, u^2)$ — радиус-вектор поверхности $F^2 \subset E^3$. Обозначим $\rho = \dfrac{1}{2}r^2$. Функция ρ удовлетворяет **уравнению Дарбу**

$$\nabla_{22}\rho - \nabla_2\rho + 1 = (2\rho - \nabla_1\rho)K. \tag{16}$$

Здесь ∇_{22} — оператор Монжа – Ампера в метрике поверхности, ∇_2 — оператор Лапласа – Бельтрами, $\nabla_1\rho$ — первый дифференциальный параметр Бельтрами для функции ρ или $|\operatorname{grad}\rho|^2$.

Приведем краткий вывод этого уравнения. С помощью ковариантных производных разложения Гаусса записываются в простом виде

$$r_{,ij} = L_{ij}n,$$

где L_{ij} — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности, n — единичный вектор нормали. Вычислим ковариантные производные от функции ρ. Имеем

$$\rho_i = (rr_i), \qquad \rho_{,ij} = (r_i r_j) + (rr_{,ij}) = g_{ij} + (rn)L_{ij}.$$

Следовательно, $\rho_{,ij} - g_{ij} = (rn)L_{ij}$. Тогда

$$(\rho_{,11} - g_{11})(\rho_{,22} - g_{22}) - (\rho_{,12} - g_{12})^2 = (rn)^2(L_{11}L_{22} - L_{12}^2).$$

В развернутом виде получаем

$$\rho_{,11}\rho_{,22} - \rho_{,12}^2 - \rho_{,11}g_{22} + 2\rho_{,12}g_{12} - \rho_{,22}g_{11} + g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = (rn)^2(L_{11}L_{22} - L_{12}^2).$$

Разделим правую и левую части последнего уравнения на $g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ и воспользуемся соотношением $K = (L_{11}L_{22} - L_{12}^2)/(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)$. Заметим, что

$$\frac{\rho_{,11}g_{22} - 2\rho_{,12}g_{12} + \rho_{,22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \rho_{,ij}g^{ij} = \nabla_2\rho.$$

Покажем, что опорную функцию (rn) можно выразить через функцию ρ и ее производные. Запишем разложение r по векторам базиса $r_1,\ r_2,\ n$:

$$r = a^i r_i + n(rn).$$

Тогда

$$\rho_k = (rr_k) = a^i(r_ir_k) = a^ig_{ik}, \qquad \rho_kg^{kl} = a^l.$$

Вернемся к разложению r:

$$r = \rho_kg^{kl}r_l + (rn)n.$$

Умножив правую и левую части скалярно на r, получим

$$2\rho = \rho_k\rho_lg^{kl} + (rn)^2,$$

т. е. $(rn)^2 = 2\rho - \nabla_1\rho$. Это завершает вывод уравнения Дарбу (16). Из приведенного соотношения следует, что $\nabla_1\rho \leq 2\rho$.

13. Оценка внешнего диаметра поверхности в E^3. В 1968 г. Ю. Д. Бураго установил оценки внешнего диаметра поверхности в E^3, которые показывают, что поверхность нельзя неограниченно сжимать в классе регулярных поверхностей. Метод доказательства был основан на кропотливом и сложном рассмотрении многогранных метрик. Результаты были изложены в статье Ю. Д. Бураго [18]. Приведем полученные оценки. Пусть поверхность расположена в шаре радиуса R, S — ее площадь, L — длина границы, χ — эйлерова характеристика, ω^+ — интеграл от гауссовой кривизны по области $K \geq 0$.

Теорема Ю. Д. Бураго. *Существует абсолютная постоянная C такая, что если $\chi = 1$, то*

$$S \leq C(R^2\omega^+ + RL),$$

а если $\chi \leq 0$, то

$$S \leq C\big(R^2[\omega^+ - 2\pi\chi] + RL\big).$$

В книге Ю. Д. Бураго и В. А. Залгаллер „Геометрические неравенства" дано доказательство этих неравенств, предложенное М. Громовым с использованием пространства Лобачевского.

В этой теореме важен класс регулярности погружения C^2, так как Кейпер показал, что любую двумерную метрику можно изометрически погрузить в классе C^1 внутрь сферы трехмерного евклидова пространства сколь угодно малого диаметра [47]. Кроме того, важна и размерность 3 объемлющего пространства. Легко построить изометрическое и регулярное погружение всей евклидовой плоскости внутрь 3-сферы из E^4 сколь угодно малого радиуса.

В 1973 – 1975 гг. автором настоящей статьи было дано применение уравнения Дарбу и обобщенного оператора Монжа – Ампера к выводу оценок для внешнего диаметра поверхности в E^3.

Сначала рассмотрим замкнутую регулярную поверхность F^2, расположенную в шаре радиуса R. Обозначим

$$\omega^+ = \int\limits_{K \geq 0} K\, dS, \qquad \omega^- = -\int\limits_{K \leq 0} K\, dS.$$

Теорема 3. *Если замкнутая регулярная ориентируемая поверхность F^2 лежит в шаре радиуса R, то выполняется неравенство*

$$S \leq R^2 \left(\omega^+ + \frac{\omega^-}{2} \right). \tag{17}$$

Применим уравнение Дарбу, проинтегрировав по площади правую и левую части этого уравнения, а также формулу (8). Поскольку поверхность замкнута, то эта формула не содержит контурный интеграл. Кроме того, интеграл от $\nabla_2 \rho$ по замкнутой поверхности равен нулю. В результате получаем

$$S = \int\limits_{F^2} K \left(2\rho - \frac{3}{2} \nabla_1 \rho \right) dS.$$

В области, где $K \geq 0$,

$$K \left(2\rho - \frac{3}{2} \nabla_1 \rho \right) \leq K 2\rho \leq K R^2,$$

а в области, где $K \leq 0$, имеем

$$K \left(2\rho - \frac{3}{2} \nabla_1 \rho \right) = K \left((rn)^2 - \frac{1}{2} \nabla_1 \rho \right) \leq |K| R^2 / 2.$$

Отсюда следует оценка (17).

Рассмотрим теперь поверхность с краем. Граничных кривых может быть несколько.

Теорема 4. *Пусть регулярная ориентируемая поверхность F^2 с границей Γ лежит в шаре радиуса R, а ее граница — в шаре с тем же центром радиуса R_1. Тогда*

$$S \leq R^2 \left(\omega^+ + \frac{\omega^-}{2} \right) + R_1^2 \int\limits_{\Gamma} |k|\, ds. \tag{18}$$

Здесь $k = r_{ss}$ — вектор кривизны кривой Γ. Интегрирование проводится по длине дуги s кривой Γ. Поскольку $R_1 \leq R$, то, очевидно, имеем оценку снизу на R.

Для доказательства рассмотрим граничные интегралы. Введем полугеодезическую систему координат r, ϕ в окрестности граничной кривой Γ такую, что кривая Γ задается уравнением $r = 0$. Пусть первая квадратичная форма имеет вид $ds^2 = dr^2 + G d\phi^2$. Будем считать r первой координатой, а ϕ — второй. Тогда координаты единичного нормального к Γ вектора τ таковы: $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 0$. Интегрирование $-\nabla_2 \rho$ по площади поверхности дает контурный интеграл

$$-\int\limits_{\Gamma} (\operatorname{grad}\rho\tau)\, ds = -\int\limits_{\Gamma} (rr_1)\, ds, \tag{19}$$

а интегрирование $\nabla_{22}\rho$ по площади поверхности — контурный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (\nu\tau)\, ds = \int\limits_{\Gamma} \nu^1\tau_1\, ds = \int\limits_{\Gamma} \frac{\rho_1\rho_{,22} - \rho_2\rho_{,12}}{2G}\, ds. \tag{20}$$

Запишем

$$-\frac{\rho_2\rho_{,12}}{2G} = -\left(\frac{\rho_2\rho_1}{2G}\right)_{,2} + \frac{\rho_{,22}\rho_1}{2G}.$$

Первое слагаемое при интегрировании по кривой Γ равно нулю. Поэтому интеграл (20) принимает вид

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\rho_1\rho_{,22}}{G}\, ds = \int\limits_{\Gamma} \frac{(rr_1)(G + (rr_{,22}))}{G}\, ds = \int\limits_{\Gamma} (rr_1) ds + \int\limits_{\Gamma} (rr_1)(rk)\, ds.$$

Здесь мы использовали $r_{,22}/G = r_{ss} = k$. Заметим, что первый интеграл справа в общей сумме сокращается с интегралом (19). Поэтому останется только второй интеграл, который оценивается сверху выражением

$$R_1^2 \int\limits_{\Gamma} |k|\, ds,$$

что и требовалось доказать.

Если кривая Γ лежит на сфере радиуса R_1 и с центром в начале координат, учитывая, что в этом случае $(rr_s) \equiv 0$, в точках кривой Γ можем записать

$$(rr_{ss}) = (rr_s)_s - r_s^2 = -1.$$

Следовательно, контурный интеграл в неравенстве (18) справа имеет оценку

$$\left| \int\limits_{\Gamma} (rr_1)(rr_{ss})\, ds \right| \le \int\limits_{\Gamma} |(rr_1)| ds \le R_1 L,$$

где L — длина сферической кривой Γ.

14. Функции на поверхности в E^3 и оператор Монжа – Ампера. Пусть поверхность $F^2 \subset E^3$ представлена заданием декартовых координат в виде $x^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2)$. Функцию Φ на поверхности определим с помощью задания зависимости от декартовых координат x^α, которые в свою очередь зависят от криволинейных координат u^1, u^2. Таким образом, мы предполагаем, что функция Φ задана сначала в пространстве E^3, а затем индуцируется на поверхность F^2. Если функция Φ — полином от x^1, x^2, x^3, то такую функцию на поверхности можно рассматривать как аналог полиномиальной функции на плоскости.

Каждая декартова координата x^α также рассматривается как функция на F^2. Найдем значение оператора Монжа – Ампера такой функции.

Производные функции Φ по x^α будем обозначать греческой буквой внизу, а ковариантную производную по u^i — латинской буквой, причем если берутся вторые ковариантные производные, то они отмечаются запятой. Имеем

$$\Phi_i = \Phi_\alpha x_i^\alpha, \qquad \Phi_{,ij} = \Phi_{\alpha\beta} x_i^\alpha x_j^\beta + \Phi_\alpha x_{,ij}^\alpha.$$

Найдем числитель выражения оператора Монжа – Ампера:

$$\Phi_{,11}\Phi_{,22} - \Phi_{,12}^2 = (\Phi_{\alpha\beta} x_1^\alpha x_1^\beta + \Phi_\alpha x_{,11}^\alpha)(\Phi_{\gamma\sigma} x_2^\gamma x_2^\sigma + \Phi_\gamma x_{,22}^\gamma) -$$

$$-(\Phi_{\alpha\beta} x_1^\alpha x_2^\beta + \Phi_\alpha x_{,12}^\alpha)(\Phi_{\gamma\sigma} x_1^\gamma x_2^\sigma + \Phi_\gamma x_{,12}^\gamma) =$$

$$= \frac{1}{2}\Phi_{\alpha\beta} x_1^\alpha x_2^\sigma (x_1^\beta x_2^\gamma - x_2^\beta x_1^\gamma) + \Phi_\alpha \Phi_{\gamma\sigma} x_{,11}^\alpha x_2^\gamma x_2^\sigma +$$

$$+\Phi_\gamma \Phi_{\alpha\beta} x_1^\alpha x_1^\beta x_{,22}^\gamma - \Phi_\alpha \phi_{\gamma\sigma} x_{,12}^\alpha x_1^\gamma x_2^\sigma - \Phi_{\alpha\beta}\Phi_\gamma x_1^\alpha x_2^\beta x_{,12}^\gamma + \Phi_\alpha \Phi_\gamma (x_{,11}^\alpha x_{,22}^\gamma - x_{,12}^\alpha x_{,12}^\gamma). \qquad (21)$$

Воспользуемся разложениями Гаусса $r_{,ij} = L_{ij} n$ и введем обозначения

$$p^{\alpha\sigma} = \frac{x_1^\alpha x_2^\sigma - x_2^\alpha x_1^\sigma}{\sqrt{g}}, \qquad b_{ij} = \Phi_{\alpha\beta} x_i^\alpha x_j^\beta.$$

Здесь g — детерминант метрического тензора поверхности. Компоненты $p^{\alpha\sigma}$ составляют единичный нормальный вектор поверхности n:

$$n = (p^{23}, p^{31}, p^{12}) = (n^1, n^2, n^3).$$

Разделим правую и левую части уравнения (21) на g и воспользуемся уравнением Гаусса. В результате получим

$$\nabla_{22}\Phi = - \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & n^1 \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} & n^2 \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & n^3 \\ n^1 & n^2 & n^3 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{(L_{11} b_{22} - 2L_{12} b_{12} + L_{22} b_{11})(n, \operatorname{grad}\Phi)}{g} + K(n, \operatorname{grad}\Phi)^2. \qquad (22)$$

Здесь $\operatorname{grad}\Phi$ — градиент функции в E^3.

***Замечания.* 1.** В частном случае, когда $\Phi = \frac{1}{2}\big((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\big)$, получим уравнение Дарбу. В этом случае $\operatorname{grad}\Phi = r$.

2. Если поверхности F^2 и $\Phi(x^1, x^2, x^3) = \mathrm{const}$ ортогональны, т. е. $(\operatorname{grad}\Phi, n) = 0$, то

$$\nabla_{22}\Phi = - \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & n^1 \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} & n^2 \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & n^3 \\ n^1 & n^2 & n^3 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (23)$$

3. Для самой простой функции на поверхности — компоненты радиуса-вектора x^α — выражение оператора Монжа – Ампера имеет очень простой вид

$$\nabla_{22}x^\alpha = K(n^\alpha)^2, \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{24}$$

Поэтому в силу единичности вектора n имеем

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \nabla_{22}x^\alpha = K.$$

Действительно, так как $x^\alpha_{,ij} = L_{ij}n^\alpha$, то находим

$$x^\alpha_{,11}x^\alpha_{,22} - (x^\alpha_{,12})^2 = \big(L_{11}L_{22} - (L_{12})^2\big)(n^\alpha)^2.$$

После деления обеих частей уравнения на $g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ получаем уравнение (24).

Рассмотрим в качестве примера применение формулы (23) для функции Φ на обычном торе, который в неявном виде задается уравнением

$$F(x, y, z) = z^2 + \big(\sqrt{x^2+y^2} - a\big)\big(\sqrt{x^2+y^2} - b\big) = 0,$$

где a и b — положительные числа, причем $a \neq b$. Имеем

$$F_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\big(2\sqrt{x^2+y^2} - a - b\big), \qquad F_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\big(2\sqrt{x^2+y^2} - a - b\big), \quad F_z = 2z.$$

Находим

$$|\operatorname{grad} F|^2 = \big(2\sqrt{x^2+y^2} - a - b\big)^2 + 4z^2.$$

Обозначим $\sqrt{x^2+y^2} = \lambda$. Тогда уравнение тора записывается в виде $z^2 = -\lambda^2 + \lambda(a+b) - ab$. Следовательно, на поверхности тора

$$|\operatorname{grad} F|^2 = (2\lambda - a - b)^2 + 4(-\lambda^2 + \lambda(a+b) - ab) = (a-b)^2.$$

Положим $\Phi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. Тогда

$$\Phi_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \Phi_y = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \Phi_z = 0.$$

Следовательно,

$$(\operatorname{grad} F, \operatorname{grad} \Phi) = 0,$$

и мы можем воспользоваться формулой (23). Имеем

$$\Phi_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \Phi_{xy} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \Phi_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Подставим эти выражения в формулу (23) и заметим, что компонента нормали $n^3 = 2z/|\operatorname{grad} F|$. Тогда

$$\nabla_{22}\Phi = -\frac{4z^2}{(a-b)^2(x^2+y^2)^2}.$$

Поскольку на поверхности тора z^2 выражается через x, y, то имеем выражение $\nabla_{22}\Phi$ в терминах параметров x, y.

15. Простейшее уравнение Монжа – Ампера на плоскости. Приведем некоторые недавние результаты о простейшем уравнении Монжа – Ампера $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = f(x,y)$. В известной работе К. Йоргенса [19] было доказано, что решением этого уравнения при $f(x,y) = 1$, определенным на всей плоскости (x,y), может быть только полином от x, y второй степени. Е. Калаби и А. В. Погорелов обобщили этот результат на многомерный случай.

В то же время существуют решения уравнения $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = -1$, определенные на всей плоскости, не являющиеся полиномами. Общее параметрическое решение такого уравнения дано Гурсом, а конкретный пример указан в работе Б. Е. Кантора [44]

$$z(x,y) = xy + x\ln\left(x + \sqrt{x^2 + e^{-2y}}\right) - \sqrt{x^2 + e^{-2y}}.$$

В работах [20, 22, 23] было рассмотрено уравнение Монжа – Ампера с правой частью в виде полинома. Естественно также искать решение в виде полинома некоторой степени. Напомним, что каждую непрерывную функцию в правой части $f(x,y)$ в ограниченной области можно приблизить полиномом с неограниченной точностью. Наилучшим результатом при этом было бы явное определение коэффициентов полинома $z(x,y)$ через коэффициенты аппроксимирующего полинома в случае, когда это возможно. А это возможно не всегда. *Таким образом, имеется общая проблема построения полиномиального решения для уравнения Монжа – Ампера с полиномиальной правой частью.*

Сначала рассмотрено уравнение

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{00}, \tag{25}$$

где постоянные b_{ij} удовлетворяют неравенствам

$$b_{20} > 0, \qquad b_{02} > 0, \qquad 4b_{20}b_{02} - b_{11}^2 > 0, \qquad b_{00} > 0. \tag{26}$$

В работе [20] показано, что решение в виде полинома нечетной степени не существует, а в виде полинома четвертой степени существует только при условии $4b_{20}b_{02} - b_{11}^2 = 0$.

Далее в работе [22] доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Уравнение* (25) *при выполнении строгих неравенств* (26) *не имеет решения в виде полинома произвольной степени.*

В то же время аналитическое решение, определенное во всей плоскости, существует. Если $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$, то аналитическое решение имеет вид

$$z(x,y) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(x^2 + y^2 + 2)^{3/2}.$$

Другое решение, аналитическое во всей плоскости, кроме начала координат, имеет вид

$$z(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((x^2 + y^2)^{3/2} + \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

В начале координат решение непрерывно, но не дифференцируемо.

Заметим, что существуют полиномиальные строго положительные функции $f(x,y)$, для которых уравнение $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = f(x,y)$ имеет полиномиальное решение. Например, если положить

$$z(x,y) = \alpha(x^4 + y^4) + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2,$$

где α — положительная постоянная, $a_{20} > 0,\ a_{02} > 0,\ 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 > 0$, то получим

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = (12\alpha xy)^2 + 24\alpha(a_{02}x^2 + a_{20}y^2) + 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = f(x,y).$$

Здесь правая часть $f(x,y)$ положительна при всех значениях $x,\ y$.

В то же время для уравнения (25) можно дать полиномиальную аппроксимацию в любой ограниченной области (хотя для него, как было отмечено, полиномиальное решение не существует). Имеет место следующая теорема.

Теорема 6. *Для любого заданного $\epsilon > 0$ и в любой заданной ограниченной области на плоскости (x,y) при выполнении строгих условий* (26) *существует полином четвертой степени Q_ϵ такой, что*

$$\left|\nabla_{22}Q_\epsilon - (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{00})\right| \leq \epsilon.$$

Далее в работе рассмотрены уравнения Монжа–Ампера с правой частью в виде более общего полинома от второй до четвертой степени. Указаны случаи существования и отсутствия решения $z(x,y)$ в виде полинома четвертой степени. Решения задаются в явном виде по коэффициентам b_{ij}. Например, если

$$f(x,y) = 2x^4 + x^2y^2 + 2y^4 + x^2 + xy + y^2 + b_{00},$$

то функция

$$z(x,y) = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{6}y^4 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}xy + \frac{1}{6}y^2$$

в том и только в том случае, когда

$$b_{00} = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}.$$

Но для $f(x,y)$ в виде общего полинома четвертой степени решение не получено, и нахождение решения в этом случае затруднительно.

Пространство полиномов от $x,\ y$ четвертой степени оператор Монжа–Ампера переводит в себя.

Можно указать неподвижные точки оператора Монжа–Ампера, а именно, если

$$U = \frac{1}{4^2\cdot 3}(x^2+y^2)^2, \qquad W = -\frac{1}{4^2\cdot 3}(x^2-y^2)^2,$$

то имеют место равенства

$$\nabla_{22}U = U, \qquad \nabla_{22}W = W,$$

т. е. эти полиномы — неподвижные точки оператора Монжа–Ампера.

И. Х. Сабитовым в [24] получен неожиданный результат о самом простом уравнении Монжа–Ампера, когда $f(x,y) = 0$. Заметим, что регулярным решением на полной плоскости является любая регулярная цилиндрическая поверхность с однозначной проекцией на плоскость. И. Х. Сабитовым был поставлен вопрос: какая может быть поверхность, определенная над всей плоскостью, но с возможными особенностями и с нулевой гауссовой кривизной, в тех точках, где поверхность регулярна? Простейший пример — конус $z = \sqrt{x^2+y^2}$ с особой точкой в вершине. Существуют ли поверхности с большим числом изолированных особенностей? Ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

Теорема И. Х. Сабитова. *Пусть на плоскости (x,y) задано произвольное конечное множество точек M. Тогда уравнение $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0$ имеет бесконечно много решений $z(x,y)$,* *определенных на всей плоскости и C^∞-гладких во всех точках, кроме точек заданного множества M, в которых они непрерывны, но не дифференцируемы. Более того, можно утверждать, что существуют решения, являющиеся кусочно-аналитическими с нарушением аналитичности только на конечном числе прямолинейных лучей.*

Первое сообщение об этой теореме появилось в тезисах доклада И. Х. Сабитова на конференции „Геометрия в Одессе-2015” [25]. Затем на ту же тему в 2016 г. появилась работа José A. Gálvez и Barbara Nelli [26].

16. Симметроны. Полезно иметь замкнутые аналитически заданные поверхности в E^3 произвольного топологического типа. В работе [17] такие поверхности были построены и было проанализировано поведение их гауссовой кривизны. Поскольку эти алгебраические поверхности имеют некоторые симметрии, они были названы **симметронами.**

Пусть в E^3 введены декартовы координаты $x,\ y,\ z$. Пусть на плоскости $z=0$ взяты p замкнутых регулярных кривых γ_i, не пересекающихся между собой и не лежащих одна внутри другой. Пусть каждая кривая γ_i задается уравнением $f_i(x,y)=0$ и внутри этой кривой $f_i(x,y)<0$. Пусть замкнутая кривая γ охватывает все кривые γ_i и задается уравнением $f(x,y)=0$, причем внутри этой кривой $f(x,y)<0$. Тогда поверхность M^2, заданная в неявном виде уравнением

$$a(x,y,z)=z^2+f(x,y)\prod_{i=1}^{p} f_i(x,y)=0,$$

замкнута, ориентируема и гомеоморфна сфере с p ручками. В работе рассмотрены конкретные функции f и f_i. Например, если положить

$$x_i=\cos\frac{2\pi i}{p},\qquad y_i=\sin\frac{2\pi i}{p},$$

то введена поверхность, имеющая симметрии

$$z^2+(x^2+y^2-R^2)\prod_{i=1}^{p}\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2-r^2\right]=0$$

при $r<\sin\dfrac{\pi}{p},\ r+1<R$. Такая поверхность была названа p-симметроном.

Обычный круговой тор вращения в E^3 задается уравнением

$$z^2+\left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}-r\right)=0.$$

Поэтому были рассмотрены поверхности, в задании которых участвуют и

$$\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}-r.$$

Компьютерными методами изучено поведение гауссовой кривизны 2-симметрона и найдены области на M^2, в которых эта кривизна больше или меньше нуля. При этом использовалась формула (22).

Добавлением четвертой координаты как функции $\Phi(x,y,z)$, ограниченной на M^2, строилась замкнутая поверхность $F^2\subset E^4$. С помощью вычислений на компьютере было проанализировано поведение гауссовой кривизны K поверхности F^2. Хотя цель построения состояла в том, чтобы построить поверхность F^2 над M^2 с гауссовой кривизной $K < 0$, но во всех рассмотренных примерах существуют области на F^2, в которых $K \geq 0$. Поэтому в заключение можно поставить следующий вопрос: **существуют ли замкнутые регулярные поверхности в E^4 с отрицательной гауссовой кривизной метрики, заданные на n-симметроне при $n \geq 2$?**

Литература

1. *Ефимов Н. В.* Поверхности с медленно изменяющейся отрицательной кривизной // Успехи мат. наук. – 1966. – **21**, № 5. – С. 3 – 58.
2. *Ефимов Н. В.* Дифференциальные признаки гомеоморфности некоторых отображений с применением в теории поверхностей // Мат. сб. – 1968. – **76**. – С. 499 – 512.
3. *Розендорн Э. Р.* Слабо нерегулярные поверхности отрицательной кривизны // Успехи мат. наук. – 1968. – **21**, № 5. – С. 59 – 116.
4. *Позняк Э. Г.* Изометрические погружения двумерных римановых метрик в евклидовы пространства // Успехи мат. наук. – 1973. – **28**, № 4. – С. 47 – 76.
5. *Перельман Г. Я.* Пример полной седловой поверхности в R^4 с отделенной от нуля гауссовой кривизной // Укр. геом. сб. – 1989. – **32**. – С. 99 – 102.
6. *Blanuša D.* Über die Einbettung hyperbolischer Räume in Euklidische Räume // Monatsh. Math. – 1955. – **59**, № 3. – S. 217 – 229.
7. *Розендорн Э. Р.* Реализация метрики $ds^2 = du^2 + f^2(u)dv^2$ в 5-мерном евклидовом пространстве // Докл. Акад. наук АрмССР. – 1960. – **30**, № 4. – С. 197 – 199.
8. *Сабитов И. Х.* Об изометрических погружениях плоскости Лобачевского в E^4 // Сиб. мат. журн. – 1989. – **30**, № 5.
9. *Ефимов Н. В.* Исследование полной поверхности отрицательной кривизны // Докл. АН СССР. – 1953. – **93**, № 3. – С. 393 – 395.
10. *Ефимов Н. В.* Исследование однозначной проекции поверхности отрицательной кривизны // Докл. АН СССР. – 1953. – **93**, № 4. – С. 609 – 611.
11. *Heinz E.* Über Flächen eineindeutiger Projection auf Ebene, deren Krümungen durch Ungleichungen eingeschrenkt sind // Math. Ann. – 1955. – **129**, № 5. – S. 451 – 454.
12. *Аминов Ю. А.* О внешнем диаметре поверхности отрицательной кривизны // Укр. геом. сб. – 1973. – **13**. – С. 3 – 9.
13. *Аминов Ю. А.* О двумерных метриках отрицательной кривизны // Укр. геом. сб. – 1973. – **13**. – С. 9 – 15.
14. *Аминов Ю. А.* Об оценках диаметра и объема подмногообразия евклидова пространства // Укр. геом. сб. – 1975. – **18**. – С. 3 – 15.
15. *Аминов Ю. А.* Поверхности в E^4 с гауссовой кривизной, совпадающей с точностью до знака с гауссовым кручением // Мат. заметки. – 1994. – **56**, № 6. – С. 3 – 9.
16. *Аминов Ю. А.* О поверхностях в E^4 со знакопостоянным гауссовым кручением // Укр. геом. сб. – 1988. – **31**. – С. 3 – 14.
17. *Аминов Ю. А., Горькавый В. А.* О гауссовой кривизне поверхностей в E^3 и E^4 // Мат. физика, анализ, геометрия. Харьков. мат. журн. – 2001. – **8**, вып. 1. – С. 3 – 16.
18. *Бураго Ю. Д.* Неравенства изопериметрического типа в теории поверхностей ограниченной внешней кривизны // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1968. – **10**.
19. *Jörgens K.* Über die Lösungen der Differential gleischung $rt - s^2 = 1$ // Math. Ann. – 1954. – **127**, № 1. – S. 180 – 184.
20. *Aminov Yu., Arslan K., Bayram B., Bulca B., Murathan C., Öztürk G.* On the solution of the Monge – Ampére equation $Z_{xx}Z_{yy} - Z_{xy}^2 = f(x,y)$ with quadratic right side // J. Mat. Fiz., Anal., Geom. – 2011. – **7**, № 3. – P. 203 – 211.
21. *Sabitov I. Kh.* Isometric immersions and embeddings of locally Euclidean metrics // Rev. Math. and Math. Phys. / Ed. A. T. Fomenko. – 2009. – **13**, Pt 1. – 276 p.
22. *Аминов Ю. А.* Об уравнении Монжа – Ампера в полиномиальной области // Докл. АН. – 2013. – **451**, № 4. – С. 367 – 368.
23. *Аминов Ю. А.* О полиномиальных решениях уравнения Монжа – Ампера // Мат. сб. – 2014. – **205**, № 11. – С. 3 – 38.

24. *Сабитов И. Х.* Решения тривиального уравнения Монжа – Ампера с изолированными особыми точками // Сиб. электрон. мат. изв. – 2016. – **13**. – С. 740 – 743.
25. *Sabitov I. Kh.* Global solutions of the trivial Monge – Ampére equation with isolated singularities // Abstr. Intern. Conf. "Geometry in Odessa-2015, May 25 – 31". – 2015. – P. 86.
26. *Gálvez J. A., Nelli B.* Entire solutions of the degenerate Monge – Ampére equation with a finite number of singularities // J. Different. Equat. – 2016. – **261**. – P. 6614 – 6631.
27. *Бураго Ю. Д.* Геометрия поверхностей в евклидовых пространствах // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. – 1989. – **48**. – С. 5 – 97.
28. *Розендорн Э. Р.* Поверхности отрицательной кривизны // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. – 1989. – **48**. – С. 98 – 195.
29. *Кадомцев С. Б.* Невозможность некоторых специальных погружений пространства Лобачевского // Мат. сб. – 1978. – **107**, № 2. – С. 175 – 198.
30. *Аминов Ю. А.* Изометрическое погружение областей трехмерного пространства Лобачевского в пятимерное евклидово пространство и движение твердого тела // Мат. сб. – 1983. – **122**, № 1. – С. 12 – 30.
31. *Аминов Ю. А.* Геометрия грассманова образа локального изометрического погружения n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство // Мат. сб. – 1997. – **188**, № 1.
32. *Xavier F.* A non-immersion theorem for hyperbolic manifolds // Comment. Math. Helv. – 1985. – **60**. – P. 280 – 285.
33. *Масальцев Л. А.* О минимальных подмногообразиях постоянной кривизны в евклидовых пространствах // Изв. вузов. Сер. мат. – 1998. – **9**. – С. 61 – 65.
34. *Nikolajevsky Y. A.* A non-immersion theorem for a class of hyperbolic manifolds // Different. Geom. and Appl. – 1998. – **9**, № 3. – P. 239 – 242.
35. *Болотов Д. В.* Об изометрическом погружении с плоской нормальной связностью пространства Лобачевского L^n в евклидово пространство E^{n+m} // Мат. заметки. – 2007. – **82**, № 1. – С. 11 – 13.
36. *Ефимов Н. В.* Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны // Мат. сб. – 1964. – **64**, № 2. – С. 286 – 320.
37. *Клотц-Милнор Т.* Теорема Ефимова о полных погруженных поверхностях отрицательной кривизны // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, № 5. – С. 3 – 57.
38. *Александров В. А.* О дифференциальном признаке гомеоморфности отображения, найденном Н. В. Ефимовым // Совр. пробл. математики. – 2011. – **6**, № 2. – С. 18 – 26.
39. *Розендорн Э. Р., Шикин Е. В.* Работы Н. В. Ефимова о поверхностях отрицательной кривизны // Совр. пробл. математики. – 2011. – **6**, № 2. – С. 49 – 56.
40. *Chern S. S.* On the curvatura integra in a Riemannian manifold // Ann. Math. – 1945. – **46**, № 4. – P. 674 – 684.
41. *Аминов Ю. А.* Геометрия подмногообразий. – Киев: Наук. думка, 2002. – 467 с.
42. *Борисенко А. А.* Изометрические погружения пространственных форм в римановы и псевдоримановы пространства постоянной кривизны // Успехи мат. наук. – 2001. – **56**, № 3. – С. 3 – 78.
43. *Борисенко А. А.* Внутренняя и внешняя геометрия подмногообразий. – М.: Экзамен, 2003. – 672 с.
44. *Кантор Б. Е.* К вопросу о нормальном образе полной поверхности отрицательной кривизны // Мат. сб. – 1970. – **82**, № 2. – С. 220 – 223.
45. *Бернштейн С. Н.* Исследование и интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа // Сообщ. Харьков. мат. о-ва. Вторая сер. – 1908 – 1909. – **11**. – С. 1 – 164.
46. *Сабитов И. Х.* Московское математическое общество и метрическая геометрия: от Петерсона до современных исследований // Тр. Моск. мат. о-ва. – 2016. – **77**, № 2. – С. 185 – 218.
47. *Kuiper N. H.* On C^1-isometric embeddings, I, II // Nederl. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A. **58**-Indag. Math. – 1955. – **17**. – P. 545 – 556, 683 – 689 (рус. пер.: О C^1-изометрических вложениях // Математика (сб. переводов). – 1957. – **1**, № 2. – С. 17 – 28).
48. *Топоногов В. А.* Теорема единственности для поверхности, у которой главные кривизны связаны соотношением $(1-k_1d)(1-k_2d)=-1$ // Сиб. мат. журн. – 1993. – **34**, № 4. – С. 197 – 199.
49. *Топоногов В. А.* Об условиях существования омбилических точек на выпуклой поверхности // Сиб. мат. журн. – 1995. – **36**, № 4. – С. 903 – 910.
50. *Топоногов В. А.* Теорема единственности для выпуклых поверхностей без омбилических точек, у которых главные кривизны связаны некоторым соотношением // Сиб. мат. журн. – 1996. – **37**, № 5. – С. 1176 – 1180.

Получено 19.04.18