УДК 517.5

А. А. Кореновский (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

ОЦЕНКА СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ (ИСЧЕЗНОВЕНИЯ) ФУНКЦИИ В ТЕРМИНАХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

The relative mean integral oscillations of a nondecreasing equimeasurable rearrangement are estimated from above via the same oscillations of the original function. On the basis of this estimate, we establish a lower order-exact estimate for the rate of decrease (vanishing) of the rearrangement.

Відносні середні інтегральні коливання неспадної рівновимірної перестановки оцінено зверху через такі ж коливання початкової функції. На основі цієї оцінки отримано точну за порядком оцінку знизу швидкості спадання (зникнення) перестановки.

1. Введение. Пусть $Q_0 \subset \mathbb{R}^d$ — куб[1], $f \in L(Q_0)$ — неотрицательная функция. Для куба $Q \subset Q_0$ обозначим $f_Q = \dfrac{1}{|Q|}\displaystyle\int_Q f(x)\,dx$, где $|\cdot|$ — мера Лебега. Средним колебанием функции f на Q называется величина

$$\Omega(f;Q) = \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(x) - f_Q|\,dx.$$

Очевидно, $\Omega(f;Q) \le 2f_Q$. Величину $\dfrac{\Omega(f;Q)}{f_Q}$ естественно называть относительным[2] средним колебанием функции f на кубе Q $\left(\text{если } f_Q = 0, \text{ то считаем, что } \dfrac{\Omega(f;Q)}{f_Q} = 2\right)$.

Для $0 < \sigma \le |Q_0|$ введем в рассмотрение величину (см. [5, c. 101])

$$\nu(f;\sigma) = \sup_{|Q|\le\sigma} \frac{\Omega(f;Q)}{f_Q},$$

где верхняя грань берется по всем кубам $Q \subset Q_0$, мера[3] которых не превышает σ. Ясно, что $\nu(f;\sigma)$ не убывает, $\nu(f;\sigma) \le \nu(f;|Q_0|) \le 2$, $0 < \sigma \le |Q_0|$. Функция $\nu(f;\sigma)$ характеризует относительные колебания функции f по „малым” кубам. Некоторые свойства функции $\nu(f;\sigma)$ приведены в п. 2 (см. также [1, 2, 4, 5]).

В данной работе изучаются глобальные характеристики функции f, выраженные в терминах относительных колебаний $\nu(f;\sigma)$. Сначала напомним необходимые определения и известные в этом направлении результаты.

Для измеримой на кубе Q_0 неотрицательной функции f невозрастающей перестановкой называется невозрастающая на $(0,|Q_0|]$ функция f^*, равноизмеримая с f, т. е. такая, что при любом $\lambda > 0$ справедливо[4]

$$|Q_0(f > \lambda)| = |\{t \in (0,|Q_0|] : \ f^*(t) > \lambda\}|.$$

[1] Всюду в работе рассматриваются кубы, стороны которых параллельны координатным осям.

[2] Т. е. инвариантным относительно умножения функции f на постоянный положительный множитель.

[3] В [5] при определении $\nu(f;\sigma)$ верхняя грань берется по кубам $Q \subset Q_0$, длина стороны которых не превышает σ, но это несущественно.

[4] Для множества E и свойства $P = P(x)$ через $E(P)$ обозначаем множество тех точек $x \in E$, для которых справедливо свойство P.

Этим свойством перестановка f^* определяется лишь с точностью до множества точек разрыва[5]; для однозначности можем, например, считать, что f^* непрерывна справа. Тогда перестановку f^* можно определить равенством (см. [3])

$$f^*(t) = \sup_{|e|\geq t} \inf_{x\in e} f(x), \quad t \in (0, |Q_0|]\,,$$

где верхняя грань берется по всем измеримым подмножествам $e \subset Q_0$, лебегова мера которых $|e| \geq t$. Для $f \in L\,(Q_0)$ положим

$$f^{**}(t) = (f^*)_{[0,t]} = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*(u)\,du, \quad t \in (0, |Q_0|]\,.$$

В работах [4, 5, с. 101] была получена следующая оценка[6] относительных колебаний невозрастающей перестановки функции по интервалам $[0, t]$:

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t |f^*(u) - f^{**}(t)|\; du \leq 3\cdot 2^d\,\nu\left(f; 2^d\,t\right)\; f^{**}(t).$$

С помощью этой оценки в [4, 5, с. 104] установлено следующее ограничение на рост невозрастающей перестановки при $t \to 0+$:

$$f^{**}(t) \leq c_d\, f_{Q_0} \exp\left(c'_d \int\limits_{2^d\,t}^{|Q_0|} \nu(f;\tau)\,\frac{d\tau}{\tau}\right),$$

где постоянные c_d и c'_d не зависят от функции f. Это неравенство означает, что

$$\ln\frac{f^{**}(t)}{f_{Q_0}} \leq \ln c_d + c'_d \int\limits_{2^d\,t}^{|Q_0|} \nu(f;\tau)\,\frac{d\tau}{\tau}. \tag{1}$$

В данной работе получена аналогичная оценка снизу скорости убывания (исчезновения) перестановки $f^*(t)$ при $t \to |Q_0| - 0$. Для удобства будем рассматривать неубывающую равноизмеримую перестановку f_* функции f, которую можно определить равенством

$$f_*(t) = f^*\left(|Q_0| - t\right), \quad t \in (0, |Q_0|]\,.$$

Положим также

$$f_{**}(t) = (f_*)_{[0,t]} = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f_*(u)\,du, \quad t \in (0, |Q_0|]\,.$$

Тогда основные результаты данной работы можем сформулировать в виде следующих двух теорем.

---

[5]В силу монотонности f^* это множество не более чем счетно.

[6]В связи с различием в определении функции $\nu(f;\sigma)$ в цитируемых работах эта оценка имеет другой вид.

Теорема 1. *Пусть неотрицательная функция f суммируема на кубе Q_0. Тогда для $0 < t \leq 2^{-d}|Q_0|$ выполняется неравенство*

$$\frac{1}{t}\int_0^t |f_*(u) - f_{**}(t)|\,du \leq \left(2^d+1\right)\,\nu\left(f;2^d\,t\right)\,f_{**}(t).$$

Теорема 2. *Пусть неотрицательная функция f суммируема на кубе Q_0, $\nu(f;|Q_0|) \leq \frac{1}{e\,(1+2^d)}$. Тогда для $0 < t \leq \frac{|Q_0|}{2^d}$ выполняется неравенство*

$$f_{**}(t) \geq \frac{1}{4} f_{Q_0} \exp\left(-\left(1+2^d\right) e \int_{2^d\,t}^{|Q_0|} \nu(f;\tau)\,\frac{d\tau}{\tau}\right). \tag{2}$$

Доказательства этих теорем содержатся в п. 3. В этом же пункте приведена теорема 4, показывающая, что оценка (2) неулучшаемая с точностью до постоянных.

В завершение заметим, что $f_{**}(|E|) \leq f_E \leq f^{**}(|E|)$ для любого измеримого подмножества $E \subset Q_0$. Отсюда следует, что неравенства (1) и (2) можно объединить в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть неотрицательная функция f суммируема на кубе Q_0, $\nu(f;|Q_0|) \leq \frac{1}{e\,(1+2^d)}$. Тогда для любого измеримого подмножества $E \subset Q_0$ $\left(|E| \leq \frac{|Q_0|}{2^d}\right)$ выполняется неравенство*

$$\left|\ln\frac{f_E}{f_{Q_0}}\right| \leq c_1 + c_2 \int_{2^d\,|E|}^{|Q_0|} \nu(f;\tau)\,\frac{d\tau}{\tau},$$

где постоянные c_1 и c_2 не зависят от функции f.

2. Свойства относительных средних колебаний.

Лемма 1. *Если $f_Q > 0$ на некотором кубе Q, то*

$$\Omega(f;Q) < 2\,f_Q,$$

причем множитель 2 в правой части, вообще говоря, нельзя уменьшить.

Доказательство. Достаточно рассмотреть нетривиальный случай $\Omega(f;Q) > 0$. В этом случае $0 < |Q\,(f < f_Q)| < |Q|$ и поэтому

$$\int_{Q(f<f_Q)} (f_Q - f(x))\,dx \leq f_Q\,|Q\,(f < f_Q)| < f_Q\,|Q|. \tag{3}$$

Но поскольку

$$\Omega(f;Q) = \frac{2}{|Q|}\int_{Q(f<f_Q)} (f_Q - f(x))\,dx = \frac{2}{|Q|}\int_{Q(f\geq f_Q)} (f(x) - f_Q)\,dx,$$

то

$$\int\limits_{Q(f\geq f_Q)} (f(x)-f_Q)\,dx < f_Q\,|Q|. \tag{4}$$

Складывая (3) и (4), получаем

$$\Omega(f;Q)=\frac{1}{|Q|}\left(\int\limits_{Q(f<f_Q)}(f_Q-f(x))\,dx+\int\limits_{Q(f\geq f_Q)}(f(x)-f_Q)\,dx\right)<2\,f_Q.$$

Для доказательства второго утверждения леммы зададим произвольное $0<\varepsilon<10^{-2}$ и определим на $Q\equiv[0,1]$ функцию

$$f=\chi_{[0,\varepsilon/4)}+\varepsilon^3\chi_{[\varepsilon/4,1]}.$$

Тогда

$$f_Q=\frac{\varepsilon}{4}+\varepsilon^3\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)<\frac{\varepsilon}{3},\quad \Omega(f;Q)>2\cdot\frac{\varepsilon}{4}\left(1-\frac{\varepsilon}{3}\right),$$

$$\frac{\Omega(f;Q)}{f_Q}>\frac{\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{3}\right)}{\frac{\varepsilon}{4}+\varepsilon^3\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)}=\frac{2-\frac{2}{3}\varepsilon}{1+\varepsilon^2(4-\varepsilon)}>2-\varepsilon.$$

Лемма 1 доказана.

***Замечание* 1.** Построенная при доказательстве второй части леммы 1 функция f ограничена и „отделена от нуля", т. е.

$$\sup_{x\in Q}f(x)=1<+\infty,\qquad \inf_{x\in Q}f(x)=\varepsilon^3>0.$$

Можно показать (см. [6]), что

$$\sup_{Q'\subset Q}\frac{\Omega\,(f;Q')}{f_{Q'}}=2\,\frac{1-\varepsilon^{3/2}}{1+\varepsilon^{3/2}}<2,$$

где верхняя грань справа берется по всем интервалам $Q'\subset Q$.

Зафиксируем куб Q_0. В нетривиальном случае $\nu\,(f;|Q_0|)<2$ имеем $f_{Q_0}>0$. С другой стороны, из леммы 1 следует, что если $f_Q=0$ хотя бы на каком-нибудь кубе $Q\subset Q_0$, то $\nu(f;\sigma)\equiv 2$ при любом $0<\sigma\leq|Q_0|$. Следующая лемма уточняет этот вывод. Именно, условие $\nu(f;\sigma)<2$ при некотором $0<\sigma\leq|Q_0|$ гарантирует, что функция f положительна почти всюду на Q_0.

Лемма 2 (см. [5, с. 99]). *Если* $|Q_0(f=0)|>0$, *то* $\nu(f;\sigma)\equiv 2,\ 0<\sigma\leq|Q_0|$.

Доказательство. Считаем, что $f_{Q_0}>0$. Зафиксируем произвольные $0<\sigma\leq|Q_0|$ и $0<\delta<1$. Поскольку почти каждая точка множества $A=Q_0(f=0)$ является его точкой плотности, то по теореме Лебега найдется такой куб Q, что $|Q|\leq\sigma,\ f_Q>0$ и для множества $E=Q\setminus A$ имеет место неравенство

$$|E|<\frac{\delta}{2}|Q|.$$

Тогда из неравенства

$$\int\limits_{E\left(f\le f_Q\right)} f(x)\,dx \le f_Q\left|E\left(f\le f_Q\right)\right| = \frac{\left|E\left(f\le f_Q\right)\right|}{|Q|}\int\limits_E f(x)\,dx$$

следует, что

$$\frac{\left|E\left(f> f_Q\right)\right|}{|Q|}\int\limits_E f(x)\,dx + \int\limits_{E\left(f\le f_Q\right)} f(x)\,dx \le$$

$$\le \frac{1}{|Q|}\left(\left|E\left(f> f_Q\right)\right| + \left|E\left(f\le f_Q\right)\right|\right)\int\limits_E f(x)\,dx =$$

$$= \frac{|E|}{|Q|}\int\limits_E f(x)\,dx \le \frac{\delta}{2}\int\limits_E f(x)\,dx.$$

Отсюда получаем

$$\frac{|Q|}{2}\left(\Omega(f;Q) - (2-\delta)f_Q\right) = \int\limits_{E\left(f> f_Q\right)} \left(f(x) - f_Q\right)\,dx - \frac{2-\delta}{2}\int\limits_E f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{E\left(f> f_Q\right)} f(x)\,dx - f_Q\left|E\left(f> f_Q\right)\right| - \int\limits_E f(x)\,dx + \frac{\delta}{2}\int\limits_E f(x)\,dx \ge$$

$$\ge \int\limits_{E\left(f> f_Q\right)} f(x)\,dx - \frac{\left|E\left(f> f_Q\right)\right|}{|Q|}\int\limits_E f(x)\,dx -$$

$$-\int\limits_E f(x)\,dx + \frac{\left|E\left(f> f_Q\right)\right|}{|Q|} f(x)\,dx + \int\limits_{E\left(f\le f_Q\right)} f(x)\,dx = 0,$$

т. е.

$$\frac{\Omega(f;Q)}{f_Q} \ge 2-\delta.$$

В силу произвольности δ и σ отсюда следует утверждение леммы.

Следующая лемма показывает, что функция $\nu(f;\sigma)$ не может быстро возрастать.

Лемма 3. *Функция* $\dfrac{\nu(f;\sigma)}{\sigma}$ *почти убывает, т. е. существует такая постоянная* $c_d > 0$, *что для* $0<\sigma_1<\sigma_2\le|Q_0|$ *выполняется неравенство*

$$\frac{\nu\left(f;\sigma_1\right)}{\sigma_1} \ge c_d\,\frac{\nu\left(f;\sigma_2\right)}{\sigma_2}.$$

В качестве c_d *можно взять* $c_d = 1/\left(2^{2d+2}+1\right)$.

Доказательство. Сначала покажем, что для двух кубов $Q' \subset \widetilde{Q}$ таких, что $|Q'| = 2^{-d}\left|\widetilde{Q}\right|$, выполняется неравенство

$$\left|f_{Q'} - f_{\widetilde{Q}}\right| \leq 2^d\,\Omega\left(f;\widetilde{Q}\right). \tag{5}$$

Действительно,

$$\left|f_{Q'} - f_{\widetilde{Q}}\right| \leq \frac{1}{|Q'|}\int\limits_{Q'}\left|f(x) - f_{\widetilde{Q}}\right| dx \leq$$

$$\leq \frac{\left|\widetilde{Q}\right|}{|Q'|}\frac{1}{\left|\widetilde{Q}\right|}\int\limits_{\widetilde{Q}}\left|f(x) - f_{\widetilde{Q}}\right| dx = 2^d\Omega\left(f;\widetilde{Q}\right).$$

Пусть теперь произвольные $0 < \sigma_1 < \sigma_2 \leq |Q_0|$. Выберем произвольный куб $Q = \bigotimes_{k=1}^{d}\left[a_k, a_k + \sigma_2^{1/d}\right] \subset Q_0$, $|Q| = \sigma_2$. Положим[7] $N = 2\left(\left[\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{1/d}\right] + 1\right)$, $N \geq 4$, и разобьем каждую из сторон $\left[a_k, a_k + \sigma_2^{1/d}\right]$ куба Q на N отрезков равной длины $\frac{\sigma_2^{1/d}}{N} \in \left[\frac{1}{4}\sigma_1^{1/d}, \frac{1}{2}\sigma_1^{1/d}\right]$. В результате получим N^d кубов

$$Q_i = \bigotimes_{k=1}^{d}\left[a_k + \frac{i_k - 1}{N}\sigma_2^{1/d},\quad a_k + \frac{i_k}{N}\sigma_2^{1/d}\right],$$

где мультииндекс $i = (i_1, \ldots, i_d)$, $1 \leq i_k \leq N$, $k = 1, \ldots, d$. Зафиксируем произвольную пару мультииндексов

$$i = (i_1, \ldots, i_d) \neq l = (l_1, \ldots, l_d)$$

и построим дизъюнктивный набор кубов $Q^{(j)}$ следующим образом. Положим $i^{(0)} = i$, $Q^{(0)} = Q_{i^{(0)}}$. Если $Q^{(j)} \neq Q_l$, то положим

$$i^{(j+1)} = \left(i_1^{(j)} + \varepsilon_1^{(j)}, \ldots, i_d^{(j)} + \varepsilon_d^{(j)}\right),$$

где числа $\varepsilon_k^{(j)} \in \{0, \pm 1\}$ выбираются таким образом, чтобы сумма

$$\sum_{k=1}^{d}\left|i_k^{(j+1)} - l_k\right|$$

была минимальной. В результате получим конечный набор кубов

$$Q^{(0)} = Q_{i^{(0)}} = Q_i,\ Q^{(1)} = Q_{i^{(1)}}, \ldots, Q^{(m)} = Q_{i^{(m)}} = Q_l, \quad 1 \leq m \leq N.$$

При этом кубы $Q^{(j-1)}$ и $Q^{(j)}$ имеют хотя бы одну общую граничную точку и, таким образом, найдется такой куб (вообще говоря, не единственный) $\widetilde{Q}^{(j)} \supset Q^{(j-1)} \cup Q^{(j)}$, что $\left|\widetilde{Q}^{(j)}\right| = 2^d\left|Q^{(j-1)}\right| = 2^d\left|Q^{(j)}\right|$, $j = 1, \ldots, m$. Далее рассматриваем случай $m \geq 3$ (при $m = 1, 2$

[7] Через $[\,\cdot\,]$ обозначена функция целой части.

рассуждения лишь упрощаются). В силу построения кубов $Q^{(j)}$ для любого $j = 1, \ldots, m-2$ найдется такое $k = 1, \ldots, d$, что

$$\left| i_k^{(j+2)} - i_k^{(j)} \right| = 2.$$

Это означает, что при любом $j = 1, \ldots, m-2$

$$\left(\bigcup_{r=1}^{j} \mathrm{int} \widetilde{Q}^{(r)} \right) \bigcap \left(\bigcup_{r=j+2}^{m} \mathrm{int} \widetilde{Q}^{(r)} \right) = \varnothing.$$

Отсюда следует, что почти каждая точка множества

$$E = \bigcup_{j=1}^{m} \widetilde{Q}^{(j)}$$

содержится в пересечении внутренностей не более чем двух различных кубов $\widetilde{Q}^{(j)}$. Поэтому

$$\int\limits_E f(x)\, dx \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\widetilde{Q}^{(j)}} f(x)\, dx. \tag{6}$$

Заметим также, что в силу выбора числа N имеем[8]

$$\frac{\sigma_1}{4^d} \leq \left| Q^{(j)} \right| \leq \frac{\sigma_1}{2^d} \leq \left| \widetilde{Q}^{(j)} \right| \leq \sigma_1.$$

Поэтому, применяя также (5) и (6), получаем

$$\frac{|f_{Q_i} - f_{Q_l}|}{f_Q} \leq \frac{1}{f_Q} \sum_{j=1}^{m} \left| f_{Q^{(j-1)}} - f_{Q^{(j)}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{f_Q} \sum_{j=1}^{m} \left(\left| f_{Q^{(j-1)}} - f_{\widetilde{Q}^{(j)}} \right| + \left| f_{Q^{(j)}} - f_{\widetilde{Q}^{(j)}} \right| \right) \leq$$

$$\leq 2^{d+1} \frac{1}{f_Q} \nu\left(f; \sigma_1\right) \sum_{j=1}^{m} f_{\widetilde{Q}^{(j)}} = 2^{d+1} \nu\left(f; \sigma_1\right) \frac{|Q|}{\left| \widetilde{Q}^{(j)} \right|} \frac{\sum_{j=1}^{m} \int_{\widetilde{Q}^{(j)}} f(x)\, dx}{\int_Q f(x)\, dx} \leq$$

---

[8] Число

$$N = 2\left(\left[\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^{1/d} \right] + 1 \right) \Rightarrow \frac{N}{2} - 1 \leq \frac{\sigma_2^{1/d}}{\sigma_1^{1/d}} \leq \frac{N}{2} \Rightarrow \frac{\sigma_1^{1/d}}{4} \leq \frac{\sigma_2^{1/d}}{N} \equiv l\left(Q^{(j)} \right) \leq \frac{\sigma_1^{1/d}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_1^{1/d}}{2} \leq l\left(\widetilde{Q}^{(j)} \right) \equiv 2l\left(Q^{(j)} \right) \leq \sigma_1^{1/d} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{2^d} \leq \left| \widetilde{Q}^{(j)} \right| \leq \sigma_1.$$

$$\leq 2^{d+1}\nu\left(f;\sigma_1\right)\cdot 2^d\cdot\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\cdot 2\,\frac{\displaystyle\int_E f(x)\,dx}{\displaystyle\int_Q f(x)\,dx}\leq 2^{2d+2}\nu\left(f;\sigma_1\right)\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \tag{7}$$

Теперь, применяя очевидное неравенство

$$\frac{\sum_k a_k}{\sum_k b_k}\leq\max_k\frac{a_k}{b_k},\qquad a_k,\,b_k>0,$$

оцениваем

$$\frac{\Omega(f;Q)}{f_Q}=\frac{\sum_i\int_{Q_i}\left|f(x)-f_Q\right|\,dx}{\sum_l\int_{Q_l}f(x)\,dx}=\frac{\sum_i\frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i}\left|f(x)-f_Q\right|\,dx}{\sum_l\frac{1}{|Q_l|}\int_{Q_l}f(x)\,dx}\leq$$

$$\leq\frac{\sum_i\left(\frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i}\left|f(x)-f_{Q_i}\right|\,dx+\left|f_{Q_i}-f_Q\right|\right)}{\sum_l\frac{1}{|Q_l|}\int_{Q_l}f(x)\,dx}\leq$$

$$\leq\max_i\frac{\frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i}\left|f(x)-f_{Q_i}\right|\,dx}{\frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i}f(x)\,dx}+\frac{\sum_i\left|f_{Q_i}-f_Q\right|}{\sum_l\frac{1}{|Q_l|}\int_{Q_l}f(x)\,dx}\equiv S_1+S_2.$$

Ясно, что $S_1\leq\nu\left(f;\sigma_1\right)$, а из (7) следует, что

$$S_2=\frac{\sum_i\left|f_{Q_i}-\frac{1}{|Q|}\sum_l\int_{Q_l}f(x)\,dx\right|}{\sum_l\frac{1}{|Q_l|}\int_{Q_l}f(x)\,dx}=\frac{\sum_i|Q_i|\left|f_{Q_i}-\frac{1}{|Q|}\sum_l|Q_l|\,f_{Q_l}\right|}{\sum_l\int_{Q_l}f(x)\,dx}\leq$$

$$\leq\frac{\frac{1}{|Q|}\sum_i\sum_l|Q_i|\,|Q_l|\,\left|f_{Q_i}-f_{Q_l}\right|}{\displaystyle\int_Q f(x)\,dx}\leq\max_{i,l}\frac{\left|f_{Q_i}-f_{Q_l}\right|}{f_Q}\leq 2^{2d+2}\nu\left(f;\sigma_1\right)\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

В итоге получаем

$$\frac{\Omega(f;Q)}{f_Q}\leq S_1+S_2\leq\left(2^{2d+2}+1\right)\nu\left(f;\sigma_1\right)\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Поскольку куб $Q\subset Q_0,\ |Q|=\sigma_2$, произвольный, то доказательство леммы завершено.

3. Доказательства основных результатов. Доказательство теоремы 1 основано на использовании следующей леммы.

Лемма 4. *Пусть неотрицательная функция f суммируема на кубе Q_0 и число $0 < \alpha \leq \leq f_{Q_0}$. Тогда существует такой дизъюнктивный*[9] *набор кубов $\{Q_j\}_{j\geq 1}$, $Q_j \subset Q_0$, что*

$$\alpha > f_{Q_j} \geq \left(1 - 2^{d-1}\nu\left(f; 2^d\left|Q_j\right|\right)\right)\alpha, \tag{8}$$

$$f(x) \geq \alpha \quad \textit{почти всюду на} \quad Q_0 \setminus \left(\bigcup_{j\geq 1} Q_j\right). \tag{9}$$

Доказательство. Разделим Q_0 на 2^d двоичных куба и пусть $\widetilde{Q}$ — один из них. Если $f_{\widetilde{Q}} < \alpha$, то кубу $\widetilde{Q}$ присваиваем очередной номер j, и это будет один из кубов Q_j, его дальше делить не будем. Если же $f_{\widetilde{Q}} \geq \alpha$, то куб $\widetilde{Q}$ подлежит дальнейшему делению, и к нему применяем описанную процедуру отбора кубов Q_j.

В результате описанной процедуры отбора получим дизъюнктивный набор кубов $\{Q_j\}_{j\geq 1}$. Через Q'_j обозначим тот из кубов $\widetilde{Q}$, в результате деления которого был получен куб Q_j; при этом, очевидно,

$$\left|Q'_j\right| = 2^d\left|Q_j\right|, \quad f_{Q'_j} \geq \alpha. \tag{10}$$

Докажем (9). Если $x \notin \bigcup_{j\geq 1} Q_j$, то найдется последовательность стягивающихся к x кубов $\widetilde{Q}$, которые подлежали дальнейшему делению, т. е. для которых $f_{\widetilde{Q}} \geq \alpha$. В силу теоремы Лебега о дифференцировании интегралов получаем, что $f(x) \geq \alpha$ для почти всех $x \notin \bigcup_{j\geq 1} Q_j$.

Осталось доказать (8). Левое неравенство выполняется в силу выбора кубов Q_j. Для доказательства правого неравенства в (8) воспользуемся формулой (10). Тогда получим

$$0 \leq f_{Q'_j} - f_{Q_j} = f_{Q'_j} - \frac{1}{|Q_j|}\int\limits_{Q_j} f(x)\,dx = \frac{1}{|Q_j|}\int\limits_{Q_j}\left(f_{Q'_j} - f(x)\right)dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{|Q_j|}\int\limits_{Q_j\left(f<f_{Q'_j}\right)}\left(f_{Q'_j} - f(x)\right)dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{\left|Q'_j\right|}\int\limits_{Q_j\left(f<f_{Q'_j}\right)}\left(f_{Q'_j} - f(x)\right)dx =$$

$$= \frac{\left|Q'_j\right|}{|Q_j|}\frac{1}{|Q_j|}\int\limits_{Q_j\left(f<f_{Q'_j}\right)}\left(f_{Q'_j} - f(x)\right)dx =$$

$$= 2^d \cdot \frac{1}{2}\Omega\left(f; Q'_j\right) \leq 2^{d-1} f_{Q'_j}\,\nu\left(f; \left|Q'_j\right|\right).$$

Отсюда следует, что

[9] Набор кубов называется дизъюнктивным, если внутренности этих кубов попарно не пересекаются.

$$f_{Q_j} \geq \Big(1 - 2^{d-1}\nu\left(f; \left|Q'_j\right|\right)\Big)\, f_{Q'_j} \geq \Big(1 - 2^{d-1}\,\nu\left(f; \left|Q'_j\right|\right)\Big)\, \alpha.$$

Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы **1.** Положим $\alpha = f_{**}(t)$ и в результате применения леммы 4 получим набор кубов $\{Q_j\}_{j\geq 1}$. Обозначим $E = \bigcup_{j\geq 1} Q_j$.

Тогда

$$\int\limits_0^t |f_*(u) - f_{**}(t)|\, du = 2 \int\limits_{\{u\colon f_*(u)<\alpha\}} (\alpha - f_*(u))\, du =$$

$$= 2 \int\limits_{Q_0(f<\alpha)} (\alpha - f(x))\, dx = 2 \int\limits_{Q_0(f<\alpha)\cap E} (\alpha - f(x))\, dx =$$

$$= 2\sum_{j\geq 1}\int\limits_{Q_0(f<\alpha)\cap Q_j} (\alpha - f(x))\, dx = 2\sum_{j\geq 1}\int\limits_{Q_j(f<\alpha)} (\alpha - f(x))\, dx =$$

$$= 2\sum_{j\geq 1}\int\limits_{Q_j(f<\alpha)} \big(\alpha - f_{Q_j} + f_{Q_j} - f(x)\big)\, dx =$$

$$= 2\sum_{j\geq 1}\int\limits_{Q_j(f<\alpha)} \big(f_{Q_j} - f(x)\big)\, dx + 2\sum_{j\geq 1}\big(\alpha - f_{Q_j}\big)\, |Q_j(f<\alpha)| =$$

$$= 2\sum_{j\geq 1}\int\limits_{Q_j\left(f_{Q_j}\leq f<\alpha\right)} \big(f_{Q_j} - f(x)\big)\, dx + 2\sum_{j\geq 1}\int\limits_{Q_j\left(f<f_{Q_j}\right)} \big(f_{Q_j} - f(x)\big)\, dx +$$

$$+2\sum_{j\geq 1}\big(\alpha - f_{Q_j}\big)\, |Q_j(f<\alpha)| \equiv S_1 + S_2 + S_3.$$

Прежде всего заметим, что $S_1 \leq 0$. Далее, поскольку $f_{Q_j} < \alpha$, то

$$\frac{1}{|E|}\int\limits_E f(x)\, dx = \frac{1}{|E|}\sum_{j\geq 1}\int\limits_{Q_j} f(x)\, dx = \frac{1}{|E|}\sum_{j\geq 1}|Q_j|\, f_{Q_j} \leq \alpha\frac{1}{|E|}\sum_{j\geq 1}|Q_j| = \alpha.$$

Отсюда и из определения перестановки f_* следует

$$f_{**}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f_*(u)\, du = \alpha \geq \frac{1}{|E|}\int\limits_E f(x)\, dx \geq \frac{1}{|E|}\int\limits_0^{|E|} f_*(u)\, du,$$

и, таким образом, в силу монотонности f_* имеем $t \geq |E|$. Оценим S_2:

$$S_2 = 2\sum_{j\geq 1}\int\limits_{Q_j\left(f<f_{Q_j}\right)} \big(f_{Q_j} - f(x)\big)\, dx = \sum_{j\geq 1}\int\limits_{Q_j}\big|f(x) - f_{Q_j}\big| =$$

$$= \sum_{j \geq 1} \frac{\Omega\,(f; Q_j)}{f_{Q_j}} \int\limits_{Q_j} f(x)\,dx \leq \nu(f;t) \sum_{j\geq 1} \int\limits_{Q_j} f(x)\,dx \leq$$

$$\leq \nu(f;t)\,\alpha \sum_{j\geq 1} |Q_j| = \alpha\,\nu(f;t)\,|E| \leq \alpha\,\nu(f;t)\,t.$$

Чтобы оценить S_3, заметим, что из свойства (8) вытекает

$$\alpha - f_{Q_j} \leq 2^{d-1}\,\nu\left(f; 2^d\,|Q_j|\right)\,\alpha \leq 2^{d-1}\,\left(f; 2^d t\right)\,\alpha.$$

Поэтому

$$S_3 = 2\sum_{j\geq 1}\left(\alpha - f_{Q_j}\right)\,|Q_j(f<\alpha)| \leq 2^d\,\alpha\,\nu\left(f;2^d t\right)\,\sum_{j\geq 1}|Q_j| \leq 2^d\,\alpha\,\nu\left(f;2^d t\right)\,t.$$

В итоге получаем

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t |f_*(u) - f_{**}(t)|\,du \leq \alpha\,\left(\nu(f;t) + 2^d\nu\left(f;2^d t\right)\right) \leq \left(1+2^d\right)\,\nu\left(f;2^d t\right)\,\alpha.$$

Теорема 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Сначала заметим, что

$$f_{Q_0} - f_{**}\left(\frac{|Q_0|}{2^d}\right) = \frac{2^d}{|Q_0|}\int\limits_0^{|Q_0|\,2^{-d}}\left(f_{Q_0} - f_*(u)\right)\,du \leq$$

$$\leq \frac{2^{d-1}}{|Q_0|}\int\limits_0^{|Q_0|}|f_{Q_0} - f_*(u)|\,du = \frac{2^{d-1}}{|Q_0|}\int\limits_{Q_0}|f(x) - f_{Q_0}|\,dx \leq$$

$$\leq 2^{d-1}\nu\,(f;|Q_0|)\,f_{Q_0}.$$

Так как $\nu\,(f;|Q_0|) \leq 2^{-d}$, то отсюда следует, что

$$f_{**}\left(\frac{|Q_0|}{2^d}\right) \geq \left[1 - 2^{d-1}\nu\,(f;|Q_0|)\right]\,f_{Q_0} \geq \frac{1}{2}f_{Q_0}. \tag{11}$$

Далее в доказательстве используется параметр $a > 1$. При этом будет показано, что оптимальным является значение $a = e$ в том смысле, что при этом значении гарантируется наименьший множитель $\left(1+2^d\right)e$ перед интегралом справа в (2).

Из теоремы 1 следует, что

$$f_{**}(t) - f_{**}\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{a}{t}\int\limits_0^{t/a}\left(f_{**}(t) - f_*(u)\right)\,du \leq$$

$$\leq \frac{a}{2}\frac{1}{t}\int\limits_0^t |f_*(u) - f_{**}(t)|\, du \leq \frac{a}{2}\left(1+2^d\right)\nu\left(f; 2^d t\right)\, f_{**}(t).$$

Отсюда в свою очередь вытекает

$$f_{**}\left(\frac{t}{a}\right) \geq \left[1 - \frac{a}{2}\left(1+2^d\right)\,\nu\left(f; 2^d t\right)\right] f_{**}(t). \tag{12}$$

При $t = |Q_0|\,/2^d$ из (12) имеем

$$f_{**}\left(\frac{|Q_0|}{a\cdot 2^d}\right) \geq \left[1 - \frac{a}{2}\left(1+2^d\right)\,\nu\left(f; |Q_0|\right)\right] f_{**}\left(\frac{|Q_0|}{2^d}\right).$$

По индукции при $t = |Q_0|/\left(a^i\cdot 2^d\right)$, $i \geq 0$, из (12) получаем

$$f_{**}\left(\frac{|Q_0|}{a^{i+1}\cdot 2^d}\right) \geq \left[1 - \frac{a}{2}\left(1+2^d\right)\,\nu\left(f; \frac{|Q_0|}{a^i}\right)\right] f_{**}\left(\frac{|Q_0|}{a^i\cdot 2^d}\right).$$

Отсюда для $i \geq 0$ с учетом (11) имеем

$$f_{**}\left(\frac{|Q_0|}{a^{i+1}\cdot 2^d}\right) \geq f_{**}\left(\frac{|Q_0|}{2^d}\right)\prod_{j=0}^{i}\left[1 - \frac{a}{2}\left(1+2^d\right)\,\nu\left(f; \frac{|Q_0|}{a^j}\right)\right] \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} f_{Q_0}\prod_{j=0}^{i}\left[1 - \frac{a}{2}\left(1+2^d\right)\,\nu\left(f; \frac{|Q_0|}{a^j}\right)\right].$$

Если $\dfrac{|Q_0|}{a^{i+1}\cdot 2^d} \leq t \leq \dfrac{|Q_0|}{a^i\cdot 2^d}$, $i \geq 0$, то

$$f_{**}(t) \geq f_{**}\left(\frac{|Q_0|}{a^{i+1}\cdot 2^d}\right) \geq \frac{1}{2} f_{Q_0}\prod_{j=0}^{i}\left[1 - \frac{a}{2}\left(1+2^d\right)\,\nu\left(f; \frac{|Q_0|}{a^j}\right)\right]. \tag{13}$$

При $i = 0$, т. е. для $\dfrac{|Q_0|}{a\cdot 2^d} \leq t \leq \dfrac{|Q_0|}{2^d}$, получаем

$$f_{**}(t) \geq \frac{1}{4} f_{Q_0}. \tag{14}$$

Для $i \geq 1$ преобразуем произведение в правой части (13) к следующему виду:

$$\prod_{j=0}^{i}\left[1 - \frac{a}{2}\left(1+2^d\right)\,\nu\left(f; \frac{|Q_0|}{a^j}\right)\right] \geq \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{i}\left[1 - \frac{a}{2}\left(1+2^d\right)\,\nu\left(f; \frac{|Q_0|}{a^j}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\exp\left(\sum_{j=1}^{i}\ln\left[1 - \frac{a}{2}\left(1+2^d\right)\nu\left(f; \frac{|Q_0|}{a^j}\right)\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \exp \left(- \sum_{j=1}^{i} \ln \frac{1}{1 - \frac{a}{2}\,(1+2^d)\,\nu\left(f; \frac{|Q_0|}{a^j}\right)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \exp \left(- \sum_{j=1}^{i} \ln \left(1 + \frac{\frac{a}{2}\,(1+2^d)\,\nu\left(f; \frac{|Q_0|}{a^j}\right)}{1 - \frac{a}{2}\,(1+2^d)\,\nu\left(f; \frac{|Q_0|}{a^j}\right)} \right) \right).$$

Поскольку знаменатель дроби в правой части не меньше $\frac{1}{2}$, а $\ln(1+\gamma) \le \gamma$, то

$$\prod_{j=0}^{i} \left[1 - \frac{a}{2} \left(1+2^d\right) \nu \left(f; \frac{|Q_0|}{a^j}\right) \right] \ge \frac{1}{2} \exp \left(-a \left(1+2^d\right) \sum_{j=1}^{i} \nu \left(f; \frac{|Q_0|}{a^j}\right) \right).$$

Прежде чем оценивать сумму в правой части, заметим, что из неравенства

$$\nu\left(f; \frac{|Q_0|}{a^j}\right) \le \nu(f;\tau) \qquad \left(\frac{|Q_0|}{a^j} \le \tau \le \frac{|Q_0|}{a^{j-1}},\ j \ge 1 \right)$$

следует, что

$$\nu\left(f; \frac{|Q_0|}{a^j}\right) \le \frac{1}{\ln a} \int\limits_{|Q_0|\,a^{-j}}^{|Q_0|\,a^{-j+1}} \nu(f;\tau)\,\frac{d\tau}{\tau}.$$

Таким образом, для $\frac{|Q_0|}{a^{i+1}\cdot 2^d} \le t \le \frac{|Q_0|}{a^i \cdot 2^d}$, $i \ge 1$, из (13) вытекает

$$-\ln f_{**}(t) \le \ln 2 - \ln f_{Q_0} - \ln \left(\prod_{j=0}^{i} \left[1 - \frac{a}{2} \left(1+2^d\right) \nu \left(f; \frac{|Q_0|}{a^j}\right) \right] \right) \le$$

$$\le 2\ln 2 - \ln f_{Q_0} + \left(1+2^d\right) a \sum_{j=1}^{i} \nu \left(f; \frac{|Q_0|}{a^j}\right) \le$$

$$\le 2\ln 2 - \ln f_{Q_0} + \left(1+2^d\right) \frac{a}{\ln a} \sum_{j=1}^{i} \int\limits_{|Q_0|\,a^{-j}}^{|Q_0|\,a^{-j+1}} \nu(f;\tau)\,\frac{d\tau}{\tau} =$$

$$= 2\ln 2 - \ln f_{Q_0} + \left(1+2^d\right) \frac{a}{\ln a} \int\limits_{|Q_0|\,a^{-i}}^{|Q_0|} \nu(f;\tau)\,\frac{d\tau}{\tau} \le$$

$$\le 2\ln 2 - \ln f_{Q_0} + \left(1+2^d\right) \frac{a}{\ln a} \int\limits_{2^d\,t}^{|Q_0|} \nu(f;\tau)\,\frac{d\tau}{\tau}.$$

Поскольку наименьшее значение множителя $\dfrac{a}{\ln a}$ достигается при $a = e$ и равно e, то окончательно для $0 < t \le \dfrac{|Q_0|}{e \cdot 2^d}$ получаем

$$-\ln f_{**}(t) \le 2\ln 2 - \ln f_{Q_0} + \left(1 + 2^d\right) e \int\limits_{2^d\, t}^{|Q_0|} \nu(f;\tau)\, \frac{d\tau}{\tau},$$

а из (14) следует, что эта оценка остается справедливой и при $\dfrac{|Q_0|}{e \cdot 2^d} \le t \le \dfrac{|Q_0|}{2^d}$. Отсюда, очевидно, следует (2).

Теорема 2 доказана.

Покажем, что оценка (2) неулучшаема с точностью до постоянных. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть положительная, неубывающая на* $(0,1]$ *функция* $\nu(\sigma) \le 2$ *такова, что* $\dfrac{\nu(\sigma)}{\sigma}$ *не возрастает. Тогда для функции*

$$f(x) = \exp\left(-\int\limits_x^1 \nu(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}\right), \qquad 0 < x \le 1,$$

выполняется неравенство

$$\nu(f;\sigma) \le 2\nu(\sigma), \qquad 0 < \sigma \le 1.$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\frac{\Omega(f;I)}{f_I} \le 2\nu(|I|)$$

для любого интервала $I \subset (0,1]$. Зафиксируем интервал $I \equiv (a, a+t) \subset (0,1]$. Тогда вследствие монотонности функции f получим

$$\frac{\Omega(f;I)}{f_I} = \frac{\dfrac{2}{t}\displaystyle\int_{I(f<f_I)} (f_I - f(x))\; dx}{f_I} = \frac{2}{t} \int\limits_{I(f<f_I)} \left(1 - \frac{f(x)}{f_I}\right) dx \le$$

$$\le \frac{2}{t} \int\limits_I \left(1 - \frac{f(x)}{f(a+t)}\right) dx = \frac{2}{t} \int\limits_a^{a+t} \left(1 - \exp\left(-\int\limits_x^{a+t} \nu(\sigma)\, \frac{d\sigma}{\sigma}\right)\right) dx =$$

$$= \frac{2}{t} \int\limits_0^t \left(1 - \exp\left(-\int\limits_{a+x}^{a+t} \nu(\sigma)\, \frac{d\sigma}{\sigma}\right)\right) dx. \tag{15}$$

Поскольку $\dfrac{\nu(\sigma)}{\sigma}$ не возрастает, то максимальное значение внутреннего интеграла в правой части (15) достигается при $a = 0$. Это означает, что

$$\frac{\Omega(f;I)}{f_I} \le \frac{2}{t}\int\limits_0^t \left(1-\exp\left(-\int\limits_x^t \nu(\sigma)\,\frac{d\sigma}{\sigma}\right)\right)\,dx =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \left(1-\exp\left(-\int\limits_{xt}^t \nu(\sigma)\,\frac{d\sigma}{\sigma}\right)\right)\,dx \le$$

$$\le 2\int\limits_0^1 \left(1-\exp\left(-\nu(t)\int\limits_{xt}^t \frac{d\sigma}{\sigma}\right)\right)\,dx =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \left(1-\exp\left(-\nu(t)\ln\frac{1}{x}\right)\right)\,dx = 2\int\limits_0^1 \left(1-x^{\nu(t)}\right)\,dx =$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{1+\nu(t)}\right) = 2\frac{\nu(t)}{1+\nu(t)} \le 2\nu(t).$$

Теорема 4 доказана.

4. Заключение. Из теоремы 3 можно вывести ряд известных результатов. Например, легко видеть, что из условия сходимости интеграла $\int_0^{|Q_0|} \nu(f;\sigma)\,\dfrac{d\sigma}{\sigma}$ следует существенная ограниченность функций f и $\dfrac{1}{f}$. Более того, можно показать, что в этом случае обе эти функции существенно непрерывны, и получить оценки их равномерного модуля непрерывности. Можно также получить вложения класса Гурова – Решетняка в классы Геринга и Макенхаупта, Орлича и т. д.

Литература

1. *Franciosi M.* Higher inegrability results and Hölder continuity // J. Math. Anal. and Appl. – 1990. – **150**, № 1. – P. 161 – 165.
2. *Franciosi M.* The Gurov – Reshetnyak condition and VMO // J. Math. Anal. and Appl. – 1994. – **181**, № 1. – P. 17 – 21.
3. *Kolyada V. I.* On the embedding of certain classes of functions of several variables // Sibirsk. Math. Zh. – 1973. – **14**. – P. 776 – 790.
4. *Korenovskyi A.* One refinement of the Gurov – Reshetnyak inequality // Ric. Mat. – 1996. – **45**, № 1. – P. 197 – 204.
5. *Korenovskii A. A.* Mean oscillations and equimeasurable rearrangements of functions // Lect. Notes Unione Mat. Ital. – 2007. – **4**. – 189 p.
6. *Korenovskyi A.* The Gurov – Reshetnyak inequality on semi-axes // Ann. Mat. Pura ed Appl. – 2016. – **195**, № 2. – P. 659 – 680.

Получено 06.10.18