УДК 512.64

М. І. Гарсіа-Планас, Т. Климчук (Політехн. ун-т Каталонії, Барселона, Іспанія)

СТРУКТУРНА СТІЙКІСТЬ МАТРИЧНИХ В'ЯЗОК І МАТРИЧНИХ ПАР ВІДНОСНО КОНТРАГРЕДІЄНТНОЇ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

A complex matrix pencil $A-\lambda B$ is called structurally stable if there exists its neighborhood in which all pencils are strictly equivalent to this pencil. We describe all complex matrix pencils that are structurally stable. It is shown that there are no pairs (M,N) of $m\times n$ and $n\times m$ complex matrices $(m,n\geq 1)$ that are structurally stable under the contragredient equivalence $(S^{-1}MR, R^{-1}NS)$, in which S and R are nonsingular.

Комплексна матрична в'язка $A-\lambda B$ називається структурно стійкою, якщо існує її окіл, що складається зі строго еквівалентних їй в'язок. У статті описано всі структурно стійкі в'язки. Також доведено неіснування пар (M,N) комплексних матриць розміру $m\times n$ та $n\times m$, $m,n\geq 1$, структурно стійких відносно контрагредієнтної еквівалентності $(S^{-1}MR, R^{-1}NS)$, де S і R — невироджені матриці.

1. Вступ. Кожна матрична задача $\mathcal{M}$ над $\mathbb{C}$ задається множиною n-к $\mathcal{M}_0$ комплексних матриць і множиною дозволених перетворень $\mathcal{M}_1$ над ними. Матрична n-ка $\mathcal{A}=(A_1,\ldots,A_n)\in\mathcal{M}_0$ називається *структурно стійкою*, якщо кожна достатньо близька до неї n-ка $\mathcal{B}\in\mathcal{M}_0$ може бути зведена до $\mathcal{A}$ дозволеними перетвореннями. Таке означення використовується в [6, 7, 15]. Воно визначається по аналогії з означенням структурної стійкості динамічних систем, яке було введене в [1] (див. також [12, 14]). Якщо матрична n-ка $\mathcal{A}\in\mathcal{M}_0$ відома тільки приблизно (наприклад, одержана в результаті вимірювань), то важливо знати, чи є вона структурно стійкою.

Матриця розміру $m\times n$ є структурно стійкою відносно елементарних перетворень тоді і тільки тоді, коли її ранг дорівнює $\min(m,n)$. Кожна квадратна матриця A є структурно нестійкою відносно перетворень подібності, оскільки як завгодно малі збурення можуть змінити її власні числа.

У пункті 2 описано всі пари (A,B) комплексних матриць розміру $m\times n$, які є структурно стійкими відносно перетворень еквівалентності $(S^{-1}AR, S^{-1}BR)$, де R і S — невироджені матриці (тобто описано всі структурно стійкі матричні в'язки $A-\lambda B$). У пункті 3 показано, що не існує структурно стійких пар комплексних матриць (M,N) розміру $m\times n$ і $n\times m$ відносно контрагредієнтної еквівалентності $(S^{-1}MR, R^{-1}NS)$. Збурення матричних пар відносно еквівалентності і контрагредієнтної еквівалентності вивчається в [8, 9, 11].

2. Критерій структурної стійкості для матричних пар відносно перетворень еквівалентності. У цьому пункті кожна матрична пара складається з комплексних матриць однакового розміру.

Задача класифікації комплексних матричних в'язок $A-\lambda B$ є задачею класифікації пар матриць відносно перетворень еквівалентності

$$(A,B)\mapsto(S^{-1}AR, S^{-1}BR), \tag{1}$$

де S і R — невироджені матриці. Згідно з теоремою Кронекера для матричних в'язок (див. [5], розділ 1.8), пара (A,B) еквівалентна прямій сумі, однозначно визначеній із точністю до перестановки доданків, пар вигляду

$$(I_r, J_r(\lambda)),\ (J_r(0), I_r),\ (L_r, R_r),\ (L_r^T, R_r^T), \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

де

$$J_r(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{розміру } r \times r,\ \lambda \in \mathbb{C}),$$

$$L_r := \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_r := \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{розміру } (r-1) \times r). \tag{3}$$

Зауважимо, що $(L_1, R_1) = (0_{10}, 0_{01})$; через 0_{mn} позначено нульову матрицю розміру $m \times n$, де $m, n = 0, 1, 2, \ldots$. Пряма сума матричних пар визначається таким чином:

$$(A, B) \oplus (A', B') := (A \oplus A', B \oplus B').$$

Теорема 1. *Пара (A, B) комплексних матриць однакового розміру є структурно стійкою відносно перетворень еквівалентності тоді і тільки тоді, коли пара (A, B) або (A^T, B^T) еквівалентна парі вигляду*

$$\underbrace{(L_r, R_r) \oplus \cdots \oplus (L_r, R_r)}_{p \text{ разів}} \oplus \underbrace{(L_{r+1}, R_{r+1}) \oplus \cdots \oplus (L_{r+1}, R_{r+1})}_{q \text{ разів}}, \tag{4}$$

де $p \geq 1$ і $q \geq 0$.

Доведення. $\Longrightarrow$ Нехай пара (A, B) структурно стійка і є прямою сумою пар вигляду (2). Тоді вона не містить доданків вигляду $(I_r, J_r(\lambda))$ і $(J_r(0), I_r)$. Крім того, вона не містить доданків вигляду $(L_r, R_r) \oplus (L_s^T, R_s^T)$, оскільки $L_r \oplus L_s$ — квадратна вироджена матриця, яка як завгодно малими збуреннями може бути перетворена на невироджену. Отже, (A, B) є прямою сумою доданків вигляду (L_r, R_r) або прямою сумою доданків вигляду (L_r^T, R_r^T).

Нехай (A, B) є прямою сумою доданків вигляду (L_r, R_r) і не має вигляду (4). Тоді (A, B) містить прямий доданок $(L_r, R_r) \oplus (L_s, R_s)$ з $s - r \geq 2$. Покрзува [13] (теорема 3) описав усі відношення включення між замиканнями класів еквівалентності двох матричних в'язок. Використавши теорему 2.2 з [2], отримаємо, що як завгодно малими збуреннями пара $(L_r, R_r) \oplus \oplus (L_s, R_s)$ може бути зведена до пари, яка еквівалентна $(L_{r+1}, R_{r+1}) \oplus (L_{s-1}, R_{s-1})$, що суперечить структурній стійкості (A, B). Отже, пара (A, B) має вигляд (4).

$\Longleftarrow$ Нехай пара (A, B) має вигляд (4). Покажемо, що вона є структурно стійкою.

Для кожної матричної пари (C, D) позначимо через $\mathcal{B}(C, D)$ її *пачку*, що визначається таким чином (див. [4]). Нехай

$$\mathcal{J}_{r_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{J}_{r_k}(\lambda_k) \oplus \mathcal{L}, \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C} \cup \infty,$$

— канонічна форма Кронекера пари (C, D), де $\mathcal{J}_r(\lambda) := (I_r, J_r(\lambda))$ при $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathcal{J}_r(\infty) := := (J_r(0), I_r)$, і $\mathcal{L}$ — пряма сума пар вигляду (L_r, R_r) та (L_r^T, R_r^T). Тоді $\mathcal{B}(C, D)$ — множина всіх матричних пар, чиї канонічні форми Кронекера мають вигляд

$$\mathcal{J}_{r_1}(f(\lambda_1)) \oplus \cdots \oplus \mathcal{J}_{r_k}(f(\lambda_k)) \oplus \mathcal{L}, \qquad f : \mathbb{C} \cup \infty \to \mathbb{C} \cup \infty \text{ — бієкція.}$$

Зокрема, $\mathcal{B} := \mathcal{B}(A, B)$ складається зі всіх матричних пар, що еквівалентні (A, B).

Щоб отримати суперечність, припустимо, що в кожному околі (A, B) існує пара, яка не належить $\mathcal{B}$. Оскільки множина матричних пар однакового розміру розкладається на скінченну множину пачок, то існує така пачка $\mathcal{C} \neq \mathcal{B}$, що кожний окіл пари (A, B) містить пару з $\mathcal{C}$. Це неможливо для пачки $\mathcal{B}$, згідно з теоремою 3.3 [4], в якій описано відношення включення для замикання пачок.

Тому в пачці $\mathcal{B}$ міститься окіл пари (A, B), всі пари якого еквівалентні (A, B).

Теорему 1 доведено.

3. Всі матричні пари нестійкі відносно контрагредієнтної еквівалентності. У даному пункті розглядаються пари комплексних матриць розміру $m \times n$ та $n \times m$, $m, n = 1, 2, \ldots,$ відносно перетворень *контрагредієнтної еквівалентності*

$$(A, B) \mapsto (S^{-1}AR, R^{-1}BS), \qquad S \text{ і } R \text{ — невироджені матриці.}$$

Зауважимо, що матриці пари зустрічних лінійних відображень $U \rightleftarrows V$ перетворюються такими перетвореннями.

У статті [3] описано канонічну форму пар матриць відносно перетворень контрагредієнтної еквівалентності: кожна пара (A, B) контрагредієнтно еквівалентна прямій сумі, визначеній з точністю до перестановки доданків, пар вигляду

$$(I_r, J_r(\lambda)),\ (J_r(0), I_r),\ (L_r, R_r^T),\ (L_r^T, R_r), \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

де L_r і R_r визначені в (3).

Інше доведення цієї канонічної форми та її застосування наведено в [10].

Теорема 2. *Кожна пара (A, B) комплексних матриць відповідних розмірів $m \times n$ і $n \times m$ з $m \geq 1$ і $n \geq 1$ є структурно нестійкою відносно перетворень контрагредієнтної еквівалентності.*

Доведення. Достатньо показати, що пари (5) є структурно нестійкими. Якщо пари (A, B) і (A', B') контрагредієнтно еквівалентні, то матриці AB і $A'B'$ подібні. Позначимо через E_{pq} матрицю розміру $p \times q$, в якій на місці (1,1) стоїть як завгодно мале комплексне число $\varepsilon \neq 0$, а на інших місцях стоять нулі.

Пари $(I_r, J_r(\lambda))$ і $(I_r, J_r(\lambda) + E_{rr})$ не контрагредієнтно еквівалентні, оскільки матриці $I_r \cdot J_r(\lambda) = J_r(\lambda)$ і $I_r(J_r(\lambda) + E_{rr}) = J_r(\lambda) + E_{rr}$ не подібні.

Пари (L_r, R_r^T) і $(L_r, R_r^T + E_{r,r-1})$ не контрагредієнтно еквівалентні, оскільки матриці $L_r R_r^T = J_{r-1}(0)$ і $L_r(R_r^T + E_{r,r-1}) = J_{r-1}(0) + E_{r-1,r-1}$ не подібні.

Тому всі пари (5) структурно нестійкі.

Автори щиро вдячні професору Володимиру Васильовичу Сергейчуку за стимулюючі обговорення і корисні поради.

Література

1. *Andronov A. A., Pontryagin L. S.* Systèmes grossieres // Докл. АН СССР. – 1937. – **14**, № 5. – С. 247 – 250.
2. *Dmytryshyn A., Dopico F. M.* Generic skew-symmetric matrix polynomials with fixed rank and fixed odd grade // Linear Algebra and Appl. – 2018. – **536**. – P. 1 – 18.
3. *Добровольская Н. М., Пономарев В. А.* Пара встречных операторов // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 6. – С. 81 – 86.

4. *Edelman A., Elmroth E., Kågström B.* A geometric approach to perturbation theory of matrices and matrix pencils. Part II: A stratification-enhanced staircase algorithm // SIAM J. Matrix Anal. and Appl. – 1999. – **20**. – P. 667 – 699.
5. *Gabriel P., Roiter A. V.* Representations of finite-dimensional algebras // Encycl. Math. Sci. – 1992. – Vol. 73.
6. *García-Planas M. I., Magret M. D.* A generalized Sylvester equation: a criterion for structural stability of triples of matrices // Linear and Multilinear Algebra. – 1998. – **44**, № 2. – P. 93 – 109.
7. *García-Planas M. I., Magret M. D., Sergeichuk V. V., Zharko N. A.* Rigid systems of second-order linear differential equations // Linear Algebra and Appl. – 2006. – **414**. – P. 517 – 532.
8. *García-Planas M. I., Sergeichuk V. V.* Simplest miniversal deformations of matrices, matrix pencils, and contragredient matrix pencils // Linear Algebra and Appl. – 1999. – **302/303**. – P. 45 – 61.
9. *García-Planas M. I., Sergeichuk V. V.* Generic families of matrix pencils and their bifurcation diagrams // Linear Algebra and Appl. – 2001. – **332/334**. – P. 165 – 179.
10. *Horn R. A., Merino D. I.* Contragredient equivalence: A canonical form and some applications // Linear Algebra and Appl. – 1995. – **214**. – P. 43 – 92.
11. *Klimenko L., Sergeichuk V. V.* Block triangular miniversal deformations of matrices and matrix pencils // Matrix Methods: Theory, Algorithms and Appl. – Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2010. – P. 69-84.
12. *López de Medrano S.* Topological aspects of matrix problems // Representations of Algebras (Puebla, 1980): Lect. Notes Math. – 1981. – **903**. – P. 196 – 210.
13. *Pokrzywa A.* On perturbations and the equivalence orbit of a matrix pencil // Linear Algebra and Appl. – 1986. – **82**. – P. 99 – 121.
14. *Robbin J. W.* Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. – 1972. – **78**. – P. 923 – 952.
15. *Willems J. C.* Topological classification and structural stability of linear systems // J. Different. Equat. – 1980. – **35**, № 3. – P. 306 – 318.

Одержано 24.08.18,
після доопрацювання — 12.02.19