УДК 517.5

С. А. Пичугов (Днепр. нац. ун-т ж.-д. трансп.)

ВОГНУТЫЕ ОБОЛОЧКИ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

The inequality

$$\overline{\omega}(t) \leq \inf_{s>0} \left(\omega\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{\omega(s)}{s} t \right)$$

is proved, where $\omega(t)$ is a function of the modulus of continuity type and $\overline{\omega}(t)$ is its smallest concave majorant. The consequences obtained for Jackson's inequalities in $C_{2\pi}$ are presented.

Доведено нерівність

$$\overline{\omega}(t) \leq \inf_{s>0} \left(\omega\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{\omega(s)}{s} t \right),$$

де $\omega(t)$ — функція типу модуля неперервності, а $\overline{\omega}(t)$ — її найменша вгнута мажоранта. Наведено наслідки для нерівностей Джексона в $C_{2\pi}$.

Пусть $\omega(t)\colon R^+ \to R^+$ — функция типа модуля непрерывности, т. е. $\omega(t)$ — непрерывная неубывающая функция, $\omega(0) = 0$ и $\omega(t_1 + t_2) \leq \omega(t_1) + \omega(t_2)$; Ω — класс всех таких функций. Для наименьшей вогнутой мажоранты $\overline{\omega}(t)$ справедлива следующая лемма.

Лемма. *Для любой $\omega \in \Omega$ и всех $k \in N$ выполняются неравенства*

$$\overline{\omega}(kt) \leq (k+1)\omega(t). \tag{1}$$

Неравенства (1) *являются точными на классе Ω, т. е. при каждом $t > 0$*

$$\sup_{\omega \in \Omega} \frac{\overline{\omega}(kt)}{\omega(t)} = k + 1. \tag{2}$$

При $k = 1$ лемма доказана С. Б. Стечкиным [1], а при $k \in N$ — Н. П. Корнейчуком [2]. Пусть

$$\omega(f,h) := \max_{|t|\leq h} \max_x |f(x+t) - f(x)| = \max_{|t|\leq h} \|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|$$

— модуль непрерывности 2π-периодической непрерывной функции f в пространстве $C_{2\pi}$, $\|f\| = \max_x |f(x)|$. Тогда $\omega(f,h) \in \Omega$, и дополнительно выполняется свойство

$$\omega(f,h) = \omega(f,\pi) \tag{3}$$

для всех $h \geq \pi$.

Будем считать, что класс Ω содержит только те функции ω, для которых выполняется дополнительное свойство (3). Для любой такой ω из Ω существует функция $f \in C_{2\pi}$ такая, что [3] (§ 7.1) для всех $t > 0$

$$\omega(f,t) = \omega(t). \tag{4}$$

Мы докажем некоторое уточнение неравенства (1).

Теорема. *Пусть $\omega \in \Omega$. Тогда для всех $t > 0$*

$$\overline{\omega}(t) \le \inf_{s>0} \left(\omega \left(\frac{s}{2} \right) + \frac{\omega(s)}{s} t \right). \tag{5}$$

В частности,

$$\overline{\omega}(kt) \le \omega \left(\frac{t}{2} \right) + k\omega(t). \tag{6}$$

При всех $k \in N$ неравенство (6) *при каждом $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{k}\right)$ является неулучшаемым на классе Ω в том смысле, что*

$$\sup_{\omega \in \Omega} \frac{\overline{\omega}(kt)}{\omega \left(\dfrac{t}{2} \right) + k\omega(t)} = 1. \tag{7}$$

Доказательство. По теореме Петре [4]

$$\frac{1}{2}\overline{\omega}(f, 2t) = K(f, t; C, C^1) := \inf_{g \in C^1} (\|f - g\| + t\|g'\|) = \inf_{N>0} \{\|f - g\| + tN; \|g'\| \le N\}. \tag{8}$$

Согласно теореме Н. П. Корнейчука [3] (§ 8.3)

$$\inf\{\|f - g\|; \|g'\| \le N\} = \frac{1}{2} \max_{y \in [0,\pi]} (\omega(f, y) - Ny). \tag{9}$$

Из (4), (8) и (9) следует, что

$$\overline{\omega}(t) = \inf_{N>0} \left(\max_{y \in [0,\pi]} (\omega(y) - Ny) + Nt \right).$$

Для произвольного $s \in (0, \pi)$ положим $N = \dfrac{\omega(s)}{s}$, тогда

$$\overline{\omega}(t) \le \inf_{s} \left(\max_{y \in [0,\pi]} \left(\omega(y) - \frac{\omega(s)}{s} y \right) + \frac{\omega(s)}{s} t \right). \tag{10}$$

Заметим, что

$$\max_{y \in [0,\pi]} \left(\omega(y) - \frac{\omega(s)}{s} y \right) = \max_{y \in [0,s]} \left(\omega(y) - \frac{\omega(s)}{s} y \right). \tag{11}$$

Действительно, пусть $y > s$, т. е. имеет вид $y = ks + y'$, где $k \in N,\ y' \in [0, s]$. Тогда

$$\omega(y) - \frac{\omega(s)}{s} y = \omega(ks + y') - \frac{\omega(s)}{s}(ks + y') \le$$

$$\le (k\omega(s) + \omega(y')) - \left(k\omega(s) + \frac{\omega(s)}{s} y' \right) = \omega(y') - \frac{\omega(s)}{s} y'.$$

Теперь покажем, что

$$\max_{y \in [0,s]} \left(\omega(y) - \frac{\omega(s)}{s} y \right) \le \omega\left(\frac{s}{2} \right). \tag{12}$$

Для $y \in \left[0, \frac{s}{2}\right]$ это очевидно. Пусть $y \in \left[\frac{s}{2}, s\right]$, тогда

$$\omega(y) - \frac{\omega(s)}{s} y \leq \omega(s) - \frac{\omega(s)}{s}\frac{s}{2} = \frac{1}{2}\omega\left(2 \cdot \frac{s}{2}\right) \leq \omega\Big(\frac{s}{2}\Big).$$

Вследствие произвольности s из (10)–(12) следует (5).

Поскольку $\omega\left(\frac{t}{2}\right) + k\omega(t) \leq (k+1)\omega(t)$, то (7) следует из (2):

$$\sup_{\omega\in\Omega} \frac{\overline{\omega}(kt)}{\omega\left(\frac{t}{2}\right) + k\omega(t)} \geq \sup_{\omega\in\Omega} \frac{\overline{\omega}(kt)}{(k+1)\omega(t)} = 1.$$

Теорема доказана.

Соотношение (2) оказалось полезным для доказательства точных неравенств Джексона для наилучших равномерных приближений непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами. Если

$$e_{n-1}(f) := \inf_{\{C_k\}} \left\| f(x) - \sum_{|k|\leq n-1} C_k e^{ikx} \right\|,$$

то по теореме Н. П. Корнейчука [3] (§ 7.6)

$$e_{n-1}(f) \leq \frac{1}{2}\overline{\omega}\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big), \tag{13}$$

и из (2) следует, что для $k \in N$

$$e_{n-1}(f) \leq \frac{k+1}{2}\omega\Big(f, \frac{\pi}{nk}\Big).$$

Это неравенство при каждом $k \in N$ является точным равномерно по n, а именно [2]

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\frac{1}{2} \leq \sup_{f\in C_{2\pi}} \frac{e_{n-1}(f)}{(k+1)\omega\Big(f, \frac{\pi}{nk}\Big)} \leq \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Если к неравенству (13) вместо (2) применить (5), то получим следующую форму неравенства Джексона:

$$e_{n-1}(f) \leq \frac{1}{2}\inf_{s>0}\left(\omega\Big(f, \frac{s}{2}\Big) + \frac{\omega(f,s)}{s}\frac{\pi}{n}\right). \tag{15}$$

Отметим частные случаи значений s, при которых константа $\frac{1}{2}$ в правой части (15) является неулучшаемой:

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\frac{1}{2} \leq \sup_{f\in C_{2\pi}} \frac{e_{n-1}(f)}{\omega\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big) + \frac{1}{2}\omega\Big(f, \frac{2\pi}{n}\Big)} \leq \frac{1}{2},$$

при $k \in N$

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)\frac{1}{2} \le \sup_{f\in C_{2\pi}} \frac{e_{n-1}(f)}{\omega\left(f, \dfrac{\pi}{2nk}\right) + k\omega\left(f, \dfrac{\pi}{nk}\right)} \le \frac{1}{2}.$$

В частности,

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)\frac{1}{2} \le \sup_{f\in C_{2\pi}} \frac{e_{n-1}(f)}{\omega\left(f, \dfrac{\pi}{2n}\right) + \omega\left(f, \dfrac{\pi}{n}\right)} \le \frac{1}{2}. \tag{16}$$

Здесь оценки снизу непосредственно следуют из (14).

Заметим, что аналогичные (16) соотношения с такой же точной константой $1/2$ справедливы и в пространствах $L_p[0,2\pi],\ p\in[1,2]$.

Пусть

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

$$e_{n-1}(f)_p := \inf_{\{C_k\}} \left\| f(x) - \sum_{|k|\le n-1} C_k e^{ikx} \right\|_p,$$

$$\omega(f,h)_p = \sup_{|t|\le h} \|\Delta_t f(x)\|_p, \qquad \Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x).$$

Н. И. Черных доказал точные при всех $n\in N$ неравенства Джексона [5, 6]

$$\begin{gathered} e_{n-1}(f)_2 \le \frac{1}{2^{1/2}}\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)_2, \\ e_{n-1}(f)_p \le \frac{1}{2^{1-\frac{1}{p}}}\omega\left(f,\frac{2\pi}{n}\right)_p, \quad p\in[1,2), \end{gathered} \tag{17}$$

которые следовали из доказанных им более точных неравенств

$$\begin{gathered} e_{n-1}^2(f)_2 \le \frac{n}{4}\int\limits_0^{\pi/n} \sin nt \|\Delta_t f\|_2^2 dt, \\ e_{n-1}^p(f)_p \le \frac{1}{2^{p-1}}\frac{n}{4}\int\limits_0^{2\pi/n} \sin\frac{n}{2}t \|\Delta_t f\|_p^p\, dt, \quad p\in[1,2). \end{gathered} \tag{18}$$

Поскольку

$$\frac{n}{4}\int\limits_0^{\pi/n} \sin nt\|\Delta_t f\|_2^2\,dt = \frac{n}{4}\int\limits_0^{\pi/2n} \sin nt\|\Delta_t f\|_2^2\,dt + \frac{n}{4}\int\limits_{\pi/2n}^{\pi/n} \sin nt\|\Delta_t f\|_2^2\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{4}\omega^2\left(f,\frac{\pi}{2n}\right)_2 + \frac{1}{4}\omega^2\left(f,\frac{\pi}{n}\right)_2,$$

то

$$e_{n-1}(f)_2 \leq \frac{1}{2}\Big(\omega^2\left(f, \frac{\pi}{2n}\right)_2 + \omega^2\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big)_2\Big)^{1/2}. \tag{19}$$

Аналогичным образом при $p \in [1, 2)$

$$e_{n-1}(f)_p \leq \frac{1}{2}\left(\omega^p\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big)_p + \omega^p\Big(f, \frac{2\pi}{n}\Big)_p\right)^{1/p}. \tag{20}$$

Константа $1/2$ в неравенствах (19), (20) является точной в $L_p[0, 2\pi]$ при каждом n; экстремальные функции те же, что и для (17) (см. [5, 6]).

При $p \in (2, \infty)$ точные неравенства, аналогичные (17), (18), известны только при $n = 1$: неравенство

$$e_0(f)_p \leq \frac{1}{2^{1/p}}\omega(f, \pi)_p$$

получено в [7], а неравенство

$$e_0(f)_p \leq \frac{1}{2^{1/p}}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\|\Delta_t f\|_p^{p'}dt\right)^{1/p'}, \tag{21}$$

где $p' = p(p-1)^{-1}$, — в [8]. Из (21) следует аналог точных неравенств (19), (20) при $n = 1$ и $p > 2$:

$$e_0(f)_p \leq \frac{1}{2^{1/p}}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\omega^{p'}(f,t)_p dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\omega^{p'}(f,t)_p dt\right)^{1/p'} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\omega^{p'}\Big(f, \frac{\pi}{2}\Big)_p + \omega^{p'}(f, \pi)_p\right)^{1/p'}. \tag{22}$$

Экстремальной в (22) является последовательность δ-образных функций.

Литература

1. *Ефимов А. В.* Линейные методы приближения непрерывных периодических функций // Мат. сб. – 1961. – **54**, № 1. – С. 51 – 90.
2. *Корнейчук Н. П.* О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Мат. заметки. – 1982. – **32**, № 5. – С. 669 – 674.
3. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
4. *Peetre J.* Exact interpolation theorems for Lipschitz continuous functions // Ric. Mat. – 1969. – **18**. – P. 1 – 21.
5. *Черных Н. И.* О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами периодических функций в L_2 // Мат. заметки. – 1967. – **2**, № 5. – С. 513 – 522.
6. *Черных Н. И.* Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ $(1 \leq p \leq 2)$ с точной константой // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1992. – **198**. – С. 232 – 241.
7. *Пичугов С. А.* Константа Юнга пространства L_p // Мат. заметки. – 1988. – **43**, № 5. – С. 604 – 614.
8. *Иванов В. И.* О модуле непрерывности в L_p // Мат. заметки. – 1987. – **41**, № 5. – С. 382 – 385.

Получено 15.03.18