УДК 517.9

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ),
Я. А. Прикарпатський (Ін-т математики НАН України, Київ; Ун-т сіл. госп-ва у Кракові, Польща),
Д. Блекмор (Технол. ін-т Нью-Джерсі, США),
А. К. Прикарпатський (Технол. ун-т ім. Т. Костюшка, Краків, Польща)

ТЕОРІЯ БАГАТОВИМІРНИХ ОПЕРАТОРІВ ТРАНСМУТАЦІЇ ДЕЛЬСАРТА – ЛІОНСА. II

The differential-geometric and topological structures related to the Delsarte transmutation operators and the Gelfand – Levitan – Marchenko equations that describe these operators are studied by using sutable differential de Rham – Hodge – Skrypnik complexes. The correspondence between the spectral theory and special Berezansky-type congruence properties of the Delsarte transmutation operators is established. Some applications to multidimensional differential operators are presented, including the three-dimensional Laplace operator, the two-dimensional classical Dirac operator, and its multidimensional affine extension associated with self-dual Yang – Mills equations. Soliton solutions of a certain class of dynamical systems are discussed.

Вивчаються диференціально-геометричні та топологічні структури операторів трансмутації Дельсарта й асоційовані з ними рівняння типу Гельфанда – Левітана – Марченка за допомогою диференціальних комплексів де Рама – Ходжа – Скрипника. Встановлено відповідності між спектральною теорією та спеціальними конгруентними властивостями типу Березанського трансмутованих операторів Дельсарта. Наведено деякі застосування до багатовимірних диференціальних операторів, включаючи тривимірний оператор Лапласа, двовимірний класичний оператор Дірака і його багатовимірне афінне розширення, пов'язане з самоспряженими рівняннями Янга – Міллса. Обговорюються солітонні розв'язки певного класу асоційованих динамічних систем.

1. Деякі аспекти узагальненої теорії де Рама – Ходжа і асоційовані з нею бінарні трансформації типу Дельсарта – Дарбу. Диференціально-геометричний аналіз трансформацій типу Дельсарта – Дарбу був проведений у пункті 3 [52] для диференціальних операторних виразів, що діють у функціональному просторі $\mathcal{H} = L_2(\mathrm{T};H)$, де $\mathrm{T} = \mathbb{R}^2$ і $H := L_2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$. Ці трансформації, як виявилось, мають глибокий зв'язок із класичною теорією де Рама – Ходжа [57, 59 – 62, 64], побудованою в середині минулого століття для комплексів диференціальних операторів, визначених у загальному випадку на розшаруваннях до гладких компактних m-вимірних многовидів. Перш ніж розглядати проблему опису диференціально-геометричної і спектральної структури операторів трансмутацій типу Дельсарта – Дарбу, діючих в $\mathcal{H}$, спочатку зупинимося на основних положеннях узагальненої теорії де Рама – Ходжа, розвиненої Я. Б. Лопатинським та І. В. Скрипником [31, 32, 59 – 62] для вивчення спеціальних диференціальних комплексів. Розглянемо гладкий метричний простір M, що є відповідним чином компактифікованою формою простору $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тоді можна визначити на $M_\mathrm{T} := \mathrm{T} \times M$ стандартну алгебру Грассмана $\Lambda(M_\mathrm{T};\mathcal{H})$ диференціальних форм на $\mathrm{T}\times M$ і розглянути узагальнений зовнішній антидиференціальний оператор $d_\mathcal{L} \colon \Lambda(M_\mathrm{T};\mathcal{H}) \to \Lambda(M_\mathrm{T};\mathcal{H})$, який діє таким чином: для будь-яких $\beta^{(k)} \in \Lambda^k(M_\mathrm{T};\mathcal{H})$, $k = \overline{1,m}$,

$$d_\mathcal{L}\beta^{(k)} := \sum_{j=1}^{2} dt_j \wedge \mathrm{L}_j(t;x \mid \partial)\beta^{(k)} \in \Lambda^{k+1}(M_\mathrm{T};\mathcal{H}), \tag{1.1}$$

де

$$\mathrm{L}_j(t;x \mid \partial) := \frac{\partial}{\partial t_j} - L_j(t;x \mid \partial) \tag{1.2}$$

для всіх $j=\overline{1,2}$, — це відповідно визначені лінійні диференціальні оператори в $\mathcal{H}$, що комутують один з одним, тобто

$$[\mathrm{L}_1,\mathrm{L}_2]=0.$$

Ми покладемо в загальному, що диференціальні вирази

$$L_j(t;x\mid\partial):=\sum_{|\alpha|=0}^{n_j(L)}a_\alpha^{(j)}(t;x)\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \tag{1.3}$$

з коефіцієнтами $a_\alpha^{(j)}\in C^1\big(\mathrm{T};C^\infty(M;\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N)\big)$, $|\alpha|=\overline{0,n_j(L)}$, $n_j^\alpha\in\mathbb{Z}_+$, $j=\overline{0,1}$, є деякими замкненими нормальними щільно визначеними операторами у просторі Гільберта H для будь-яких $t\in\mathrm{T}$. Легко зауважити, що антидиференціювання $d_{\mathcal{L}}$, визначене в (1.1), є узагальненням звичайного зовнішнього антидиференціювання

$$d=\sum_{j=1}^{m}dx_j\wedge\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{s=1}^{2}dt_s\wedge\frac{\partial}{\partial t_s}, \tag{1.4}$$

для якого, очевидно, мають місце комутаційні співвідношення

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_k}\right]=0,\qquad\left[\frac{\partial}{\partial t_s},\frac{\partial}{\partial t_l}\right]=0,\qquad\left[\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial t_s}\right]=0$$

для всіх $j,k=\overline{1,m}$ і $s,l=\overline{1,2}$. Підставляючи в (1.4) $\partial/\partial x_j\longrightarrow\mathrm{A}_j$, $\partial/\partial t_s\longrightarrow\mathrm{L}_s$, $j=\overline{1,m}$, $s=\overline{1,2}$, отримуємо антидиференціювання

$$d_{\mathcal{A}}:=\sum_{j=1}^{m}dx_j\wedge\mathrm{A}_j(t;x\mid\partial)+\sum_{j=1}^{2}dt_s\wedge\mathrm{L}_s(t;x\mid\partial), \tag{1.5}$$

де диференціальні вирази $\mathrm{A}_j,\mathrm{L}_S:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ для всіх $j,k=\overline{1,m}$ і $s,l=\overline{1,2}$, задовольняють комутаційні співвідношення $[\mathrm{A}_j,\mathrm{A}_k]=0$, $[\mathrm{L}_s,\mathrm{L}_s]=0$, $[\mathrm{A}_j,\mathrm{L}_s]=0$. Тоді операція (1.5) визначає на $\Lambda(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})$ антидиференціювання, по відношенню до якого коланцюговий комплекс

$$\mathcal{H}\longrightarrow\Lambda^0(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})\xrightarrow{d_{\mathcal{A}}}\Lambda^1(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})\xrightarrow{d_{\mathcal{A}}}\ldots\xrightarrow{d_{\mathcal{A}}}\Lambda^{\mathrm{m+2}}(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})\xrightarrow{d_{\mathcal{A}}}0 \tag{1.6}$$

є, очевидно, замкненим, тобто $d_{\mathcal{A}}d_{\mathcal{A}}\equiv 0$. Оскільки антидиференціювання (1.1) є частковим випадком (1.5), то відповідний до нього коланцюговий комплекс (1.6) також є замкненим.

Нижче ми скористаємось ідеями, розвиненими в [57, 59 – 62]. Диференціальну форму $\beta\in\in\Lambda(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})$ назвемо $d_{\mathcal{A}}$-замкненою, якщо $d_{\mathcal{A}}\beta=0$; форму $\gamma\in\Lambda(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})$ назвемо точною або $d_{\mathcal{A}}$-гомологічною до нуля, якщо існує на M_{T} така форма $\omega\in\Lambda(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})$, що $\gamma=d_{\mathcal{A}}\omega$.

Розглянемо тепер стандартну [12, 57, 64, 65] алгебраїчну $*$-операцію Ходжа

$$*:\Lambda^k(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})\longrightarrow\Lambda^{m+2-k}(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H}),\quad k=\overline{0,m+2},$$

у такому вигляді: якщо $\beta\in\Lambda^k(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})$, то форма $*\beta\in\Lambda^{m+2-k}(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})$ є такою, що:

$(m-k+2)$-вимірний об’єм $|*\beta|$ форми $*\beta$ дорівнює k-вимірному об’єму $|\beta|$ форми β;

$(m+2)$-вимірна міра $\bar{\beta}^{\intercal}\wedge*\beta>0$ щодо фіксованої орієнтації на M_{T}.

Визначимо також на просторі $\Lambda(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})$ такий природний скалярний добуток: для будь-яких $\beta,\gamma\in\Lambda^k(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H}),\ k=\overline{0,m},$

$$(\beta,\gamma):=\int\limits_{M_{\mathrm{T}}}\bar{\beta}^{\intercal}*\gamma. \tag{1.7}$$

Маючи скалярний добуток (1.7), можна природним чином побудувати гільбертів простір

$$\mathcal{H}_{\Lambda}(M_{\mathrm{T}}):=\overset{m+2}{\underset{k=0}{\oplus}}\mathcal{H}^k_{\Lambda}(M_{\mathrm{T}}),$$

який буде потрібен для подальшого розгляду. Зазначимо, що $*$-операція Ходжа задовольняє властивість, яку легко перевірити: для будь-яких $\beta,\gamma\in\mathcal{H}^k_{\Lambda}(M_{\mathrm{T}}),\ k=\overline{0,m},$

$$(\beta,\gamma)=(*\beta,*\gamma),$$

тобто операція Ходжа $*:\mathcal{H}_{\Lambda}(M_{\mathrm{T}})\to\mathcal{H}_{\Lambda}(M_{\mathrm{T}})$ є унітарною і її стандартна спряжена операція по відношенню до скалярного добутку (1.7) задовольняє умову $(*)'=(*)^{-1}$.

Позначимо через $d^{'}_{\mathcal{L}}$ формально спряжений вираз до слабкої диференціальної операції (1.1). З допомогою операцій $d'_{\mathcal{L}}$ і $d_{\mathcal{L}}$ в $\mathcal{H}_{\Lambda}(M_{\mathrm{T}})$ можна природним чином визначити [12, 57, 59, 64, 65] узагальнений оператор Лапласа – Ходжа $\Delta_{\mathcal{L}}:\mathcal{H}_1(M_{\mathrm{T}})\longrightarrow\mathcal{H}_1(M_{\mathrm{T}})$ як

$$\Delta_{\mathcal{L}}=d'_{\mathcal{L}}d_{\mathcal{L}}+d'_{\mathcal{L}}d_{\mathcal{L}}. \tag{1.8}$$

Візьмемо форму $\beta\in\mathcal{H}_{\Lambda}(M_{\mathrm{T}})$, що задовольняє рівність

$$\Delta_{\mathcal{L}}\beta=0. \tag{1.9}$$

Таку форму називають [12, 57, 59, 65] гармонічною. Можна перевірити, що гармонічна форма $\beta\in\mathcal{H}_{\Lambda}(M_{\mathrm{T}})$ задовольняє дві спряжені умови

$$d'_{\mathcal{L}}\beta=0,\qquad d_{\mathcal{L}}\beta=0,$$

що легко випливають з (1.8) і (1.9).

Легко перевірити, що диференціальні оператори в $\mathcal{H}_{\Lambda}(M_{\mathrm{T}})$

$$d^*_{\mathcal{L}}:=*d'_{\mathcal{L}}(*)^{-1} \tag{1.10}$$

визначають також нову зовнішню операцію антидиференціювання в $\mathcal{H}_{\Lambda}(M_{\mathrm{T}})$.

Лема 1.1. *Відповідний дуальний до* (1.6) *коланцюговий комплекс*

$$\mathcal{H}\longrightarrow\Lambda^0(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})\xrightarrow{d^*_{\mathcal{L}}}\Lambda^1(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})\xrightarrow{d^*_{\mathcal{L}}}\ldots\xrightarrow{d^*_{\mathcal{L}}}\Lambda^{m+2}(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})\xrightarrow{d^*_{\mathcal{L}}}0$$

є точним.

Доведення випливає завдяки властивості замкнености $d^*_{\mathcal{L}}d^*_{\mathcal{L}}=0$, що справджується згідно з визначенням (1.10).

Позначимо через $\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L})}(M_{\mathrm{T}}),\ k=\overline{0,m+2},$ групи когомологій $d_{\mathcal{L}}$-замкненої, через $\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*)}(M_{\mathrm{T}}),\ k=\overline{0,m+2},\ k=\overline{0,m+2},$ групи когомологій $d^*_{\mathcal{L}}$-замкнених диференціальних форм відповідно, а через $\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*\mathcal{L})}(M_{\mathrm{T}}),\ k=\overline{0,m+2}$, абелеві групи гармонічних диференціальних форм із гільбертових підпросторів $\mathcal{H}^k_{\Lambda}(M_{\mathrm{T}}),\ k=\overline{0,m+2}$.

Перш ніж формулювати наступні результати, визначимо стандартні оснащені ланцюгами Гільберта – Шмідта [3, 4] позитивний і негативний гільбертові простори диференціальних форм

$$\mathcal{H}^k_{\Lambda,+}(M_{\mathrm{T}})\subset\mathcal{H}^k_{\Lambda}(M_{\mathrm{T}})\subset\mathcal{H}^k_{\Lambda,-}(M_{\mathrm{T}}),$$

відповідні оснащені ланцюги гармонічних форм

$$\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}})\subset\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*\mathcal{L})}(M_{\mathrm{T}})\subset\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*\mathcal{L}),-}(M_{\mathrm{T}})$$

і ланцюги груп когомологій

$$\begin{gathered}\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}})\subset\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L})}(M_{\mathrm{T}})\subset\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M_{\mathrm{T}}),\\ \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*),+}(M_{\mathrm{T}})\subset\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*)}(M_{\mathrm{T}})\subset\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*),-}(M_{\mathrm{T}})\end{gathered}\tag{1.11}$$

для всіх $k=\overline{0,m+2}$. Припустимо також, що оператор Лапласа – Ходжа (1.8) є редукованим на простір $\mathcal{H}^0_{\Lambda}(M)$. Тепер, використовуючи обґрунтування, як в [12, 57, 65], можна сформулювати таке узагальнення [57, 60 – 62] теореми де Рама – Ходжа.

Теорема 1.1. *Група гармонічних форм* $\mathcal{H}^k_{\Lambda,+}(M_{\mathrm{T}}),\ k=\overline{0,m+2}$, *є відповідно ізоморфною до груп когомологій* $\big(H^k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})\big)^{|\Sigma|},\ k=\overline{0,m+2}$, *де* $H^k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$ — k*-та когомологічна група многовиду* M_{T} *з комплексними коефіцієнтами,* $\Sigma\subset\mathbb{C}^p,\ p\in\mathbb{Z}_+$, — *множина відповідних „спектральних" параметрів, що визначають лінійний простір незалежних* $d^*_{\mathcal{L}}$*-замкнених* 0*-форм з* $\mathcal{H}^0_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M_{\mathrm{T}})$, *і, більше того, розклади на прямі суми*

$$\begin{gathered}\mathcal{H}^k_{\Lambda,+}(M_{\mathrm{T}})=\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}})\oplus\Delta_{\mathcal{L}}\mathcal{H}^k_{\Lambda,+}(M_{\mathrm{T}})=\\ =\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}})\oplus d_{\mathcal{L}}\mathcal{H}^{k-1}_{\Lambda,+}(M_{\mathrm{T}})\oplus d'_{\mathcal{L}}\mathcal{H}^{k+1}_{\Lambda,+}(M_{\mathrm{T}})\end{gathered}$$

справедливі для будь-яких $k=\overline{0,m+2}$.

Інший варіант твердження, подібного до наведеного вище, був сформульований у [59, 60] і є наступним узагальненням теореми де Рама – Ходжа.

Теорема 1.2. *Узагальнені групи когомологій* $\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}}),\ k=\overline{0,m+2}$, *ізоморфні відповідно до груп когомологій* $(H^k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C}))^{|\Sigma|},\ k=\overline{0,m+2}$.

Доведення ґрунтується на деяких спеціальних наслідках тотожностей типу Лагранжа.

Визначимо замкнений підпростір

$$\mathcal{H}^*_0:=\big\{\varphi^{(0)}(\eta)\in\mathcal{H}^0_{\Lambda(\mathcal{L}^*),-}(M_{\mathrm{T}})\colon d^*_{\mathcal{L}}\varphi^{(0)}(\eta)=0,\ \varphi^{(0)}(\eta)|_{\Gamma},\ \eta\in\Sigma\big\}$$

для деякої гладкої $(m+1)$-вимірної гіперповерхні $\Gamma\subset M_{\mathrm{T}}$ і $\Sigma\subset(\sigma(L)\cap\bar{\sigma}(L))\times\Sigma_\sigma\subset\mathbb{C}^p$, де $\mathcal{H}^0_{\Lambda(\mathcal{L}^*),-}(M_{\mathrm{T}})$ — як і вище, відповідно оснащена за Гельфандом [3, 4] група когомологій Гільберта – Шмідта нульового порядку гільбертового простору з коланцюгом, що заданий за допомогою виразу (1.11), $\sigma(L)$ і $\sigma(L^*)$ — відповідно взаємні узагальнені спектри множин диференціальних операторів L і L^* в H при $t=0\in\mathrm{T}$. Таким чином, вимір $\dim\mathcal{H}^*_0=\operatorname{card}\Sigma:=|\Sigma|$ вважається відомим. Наступна лема була вперше сформульована І. В. Скрипником [59, 60] і має фундаментальне значення для доведення теореми 1.1.

Лема 1.2. *Існують множина диференціальних* $(k+1)$*-форм* $Z^{(k+1)}\big[\varphi^{(0)}(\eta), d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)}\big] \in$ $\in \Lambda^{k+1}(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$, $k=\overline{0,m+2}$, *і множина* k*-форм* $Z^{(k)}\big[\varphi^{(0)}(\eta),\psi^{(k)}\big] \in \Lambda^{k}(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$, $k=$ $=\overline{0,m+2}$, *параметризованих множиною* $\Sigma \ni \eta$, *що є напівлінійними щодо* $\big(\varphi^{(0)}(\eta),\psi^{(k)}\big) \in$ $\in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}_{\Lambda,+}^k(M_{\mathrm{T}})$ *і такими, що*

$$Z^{(k+1)}\big[\varphi^{(0)}(\eta), d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)}\big] = dZ^{k}\big[\varphi^{(0)}(\eta),\psi^{(k)}\big] \tag{1.12}$$

для всіх $k=\overline{0,m+2}$ *і* $\eta\in\Sigma$.

Доведення ґрунтується на тотожності типу Лагранжа при узагальненні її з [59], яка справедлива для будь-якої пари $\big(\varphi^{0}(\eta),\psi(k)\big) \in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}_{\Lambda,+}^k(M_{\mathrm{T}})$:

$$\begin{aligned} 0 = \Big\langle d_{\mathcal{L}}^{*}\varphi^{(0)}(\eta), *(\psi^{(k)}\wedge\overline{\gamma})\Big\rangle = \Big\langle *d_{\mathcal{L}}'(*)^{-1}\varphi^{(0)}(\eta), *(\psi^{(k)}\wedge\overline{\gamma})\Big\rangle = \\ = \Big\langle *d_{\mathcal{L}}'(*)^{-1}\varphi^{(0)}(x), \psi^{(k)}\wedge\overline{\gamma})\Big\rangle = \\ = \Big\langle (*)^{-1}\varphi^{(0)}(\eta), d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)}\wedge\overline{\gamma}\Big\rangle + Z^{(k+1)}\big[\psi^{(0)}(\eta), d_{\mathcal{L}}\psi(k)\big]\wedge\overline{\gamma} = \\ = \Big\langle (*)_{-1}\varphi^{(0)}(\eta), d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)}\wedge\overline{\gamma}\Big\rangle + dZ^{(k)}\big[\varphi^{(0)}(\eta),\psi^{(k)}\big]\wedge\overline{\gamma}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

де $Z^{(k+1)}\big[\varphi^{(0)}(\eta), d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)}\big] \in \Lambda^{k+1}(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$, $k=\overline{0,m+2}$, та $Z^{(k)}\big[\varphi^{(0)}(\eta),\psi^{(k)}\big] \in \Lambda^{k}(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$, $k=\overline{0,m+2}$, — деякі напівлінійні диференціальні форми на M_{T}, параметризовані параметром $\lambda\in\Sigma$, і $\overline{\gamma}\in\Lambda^{m+1-k}(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$ — довільна константна $(m+1-k)$-форма. Таким чином, напівлінійні диференціальні $(k+1)$-форми $Z^{(k+1)}\big[\varphi^{(0)}(\eta), d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)}\big] \in \Lambda^{k+1}(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$ і k-форми $Z^{(k)}\big[\varphi^{(0)}(\eta),\psi^{(k)}\big] \in \Lambda^{k}(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$, $k=\overline{0,m+2}$, $\lambda\in\Sigma$, побудовані вище, є саме тими, які потрібні в лемі.

Ґрунтуючись на лемі 1.2, можна побудувати ізоморфізм групи когомологій, про який йдеться в теоремі 1.2. А саме, дотримуючись [59, 60], візьмемо деякий сингулярний симпліціальний [57, 58, 64, 65] комплекс $\mathcal{K}(M_{\mathrm{T}})$ компактного метричного простору M_{T} і введемо множину лінійних відображень $B_{\lambda}^{(k)}:\mathcal{H}_{\Lambda,+}^k(M_{\mathrm{T}}) \longrightarrow C_k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$, $k=\overline{0,m+2,}$ $\lambda\in\Sigma$, де $C_k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$, $k=\overline{0,m+2,}$ — довільна абелева група над полем $\mathbb{C}$, що генерована відповідно всіма k-ланцюгами сингулярних симплексів $S^{(k)}\subset M_{\mathrm{T}}$, $k=\overline{0,m+2}$, з симпліціального комплексу $\mathcal{K}(M_{\mathrm{T}})$ таким чином:

$$B_{\lambda}^{(k)}(\psi^{(k)}) := \sum_{S^{(k)}\in C_k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C}))} S^{(k)} \int\limits_{S^{(k)}} Z^{(k)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda),\psi^{(k)}\big], \tag{1.14}$$

де $\psi^{(k)}\in\mathcal{H}_{\Lambda,+}^k(M_{\mathrm{T}})$, $k=\overline{0,m+2}$. Справедливою є наступна теорема [59, 60], що ґрунтується на відображеннях (1.14).

Теорема 1.3. *Множина операторів* (1.14), *параметризована спектральним параметром* $\lambda\in\Sigma$, *реалізує групу когомології ізоморфізму, сформульованого в теоремі* 1.2.

Доведення можна провести, переходячи в (1.14) до відповідних когомологічних $\mathcal{H}_{\Lambda(\mathcal{L}),+}^k(M_{\mathrm{T}})$ і гомологічних $H_k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$ груп простору M_{T} для кожного $k=\overline{0,m+2}$. Якщо взяти елемент $\psi^{(k)} := \psi^{(k)}(\mu) \in \mathcal{H}_{\Lambda(\mathcal{L}),+}^k(M_{\mathrm{T}})$, $k=\overline{0,m+2}$, розв'язуючи рівняння $d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)}(\mu)=0$ з $\mu\in\Sigma_k$, що є деякою множиною асоційованих „спектральних” параметрів, маркуючих елементи підпростору $\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M_{\mathrm{T}})$, то з (1.14) і тотожності (1.12) легко отримати, що $dZ^{(k)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda),\ \psi^{(k)}(\mu)\big] = 0$ для всіх $(\lambda,\mu) \in \Sigma \times \Sigma_k,\ k = \overline{0, m+2}$. Це, в певному сенсі, означає, згідно з лемою Пуанкаре [7, 20, 57, 64], що існують диференціальні $(k-1)$-форми $\Omega^{(k-1)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(k)}(\mu\big] \in \Lambda^{k-1}(M;\mathbb{C}),\ k = \overline{0, m+2}$, такі, що

$$Z^{(k)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(k)}(\mu)\big] = d\Omega^{(k-1)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(k)}(\mu)\big]$$

для всіх пар $\big(\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(k)}(\mu)\big) \in \mathcal{H}^*_0 \times \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}})$, параметризованих через $(\lambda,\mu) \in \Sigma \times \Sigma_k$, $k = \overline{0, m+2}$. Як результат переходу в правій частині (1.14) до груп гомологій $H_k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$, $k = \overline{0, m+2}$, отримуємо, використовуючи теорему Стокса [20, 57, 64], що відображення

$$B^{(k)}_\lambda : \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}}) \longrightarrow H_k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$$

є ізоморфізмами для кожного $k = \overline{0, m+2}$ і $\lambda \in \Sigma$. З огляду на дуалізм Пуанкаре [12, 57, 64] між групами гомологій $H_k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C}),\ k = \overline{0, m+2}$, і групами когомологій $H^k(M;\mathbb{C}),\ k = \overline{0, m+2}$, відповідно отримуємо твердження теореми 1.3.

2. Спектральна структура операторів трансмутації типу Дельсарта – Ліонса в багатовимірному випадку. Візьмемо тепер до уваги, що диференціальні оператори $\mathrm{L}_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ j = \overline{1,2}$, мають спеціальний вигляд (1.2). Припустимо також, що диференціальні вирази (1.3) є нормальними замкненими операторами, що визначені на щільному підпросторі $D(L) \subset L_2(M;\mathbb{C}^N)$. Тоді, згідно з теоремою 1.3, можна знайти таку пару $(\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(k)}(\mu)) \in \mathcal{H}^*_0 \times \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}})$, параметризовану елементами $(\lambda,\mu) \in \Sigma \times \Sigma_k$, для якої справджується рівність

$$B^{(m)}_\lambda\big(\psi^{(0)}(\mu)\,dx\big) = S^{(m)}_{(t;x)} \int\limits_{\partial S^{(m)}_{(t;x)}} \Omega^{(m-1)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)\,dx\big], \tag{2.1}$$

де $S^{(m)}_{(t;x)} \in H_m(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$ — деякий довільний фіксований елемент, параметризований довільно вибраною точкою $(t;x) \in M_{\mathrm{T}} \cap \partial S^{(m)}_{(t;x)}$. Розглянемо інтегральні вирази

$$\begin{aligned} \Omega_{(t;x)}(\lambda,\mu) &:= \int\limits_{\sigma^{(m-1)}_{(t;x)}} \Omega^{(m-1)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)\,dx\big], \\ \Omega_{(t_0;x_0)}(\lambda,\mu) &:= \int\limits_{\sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}} \Omega^{(m-1)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)\,dx\big] \end{aligned} \tag{2.2}$$

з точкою $(t_0;x_0) \in M_{\mathrm{T}} \cap \partial S^{(m)}_{(t_0;x_0)}$ із фіксованими межами $\sigma^{(m-1)}_{(t;x)} := \partial S^{(m)}_{t;x}$, $\sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)} := \partial S^{(m)}_{t_0;x_0}$, гомологічними між собою, коли $(t;x_0) \longrightarrow (t;x) \in M_{\mathrm{T}},\ (\lambda,\mu) \in \Sigma \times \Sigma_k$, і інтерпретуємо їх як ядра [3, 4, 13] відповідних оборотних інтегральних операторів типу Гільберта – Шмідта $\Omega_{(t;x)}, \Omega_{(t_0;x_0)} : L^{(\rho)}_2(\Sigma;\mathbb{C}) \longrightarrow L^{(\rho)}_2(\Sigma;\mathbb{C})$, де ρ — деяка фінітна борелівська міра на множині параметрів Σ. Визначимо тепер оборотні операторні вирази

$$\mathbf{\Omega}_\pm : \psi^{(0)}(\mu) \longrightarrow \tilde{\psi}^{(0)}(\mu)$$

для $\psi^{(0)}(\mu)\,dx \in \mathcal{H}^m_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}})$ і деяких $\tilde{\psi}^{(0)}(\mu)\,dx \in \mathcal{H}^m_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}}),\ \mu \in \Sigma$, де, за визначенням, для будь-яких $\eta \in \Sigma$

$$\tilde{\psi}^{(0)}(\eta) := \psi^{(0)}(\eta) \cdot \Omega^{-1}_{(t;x)} \cdot \Omega_{(t_0;x_0)} =$$

$$= \int\limits_{\Sigma} d\rho(\mu) \int\limits_{\Sigma} d\rho(\xi)\psi^{(0)}(\mu)\Omega^{-1}_{(t;x)}(\mu,\xi)\Omega_{(t_0;x_0)}(\xi,\eta) \tag{2.3}$$

мотивоване виразом (2.1). А саме, розглянемо діаграму відображень

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^m_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}}) \arrow[r, "\Omega_{\pm}"] \arrow[d, "B^{(m)}_{\lambda}"'] & \mathcal{H}^m_{\Lambda(\tilde{\mathcal{L}}),+}(M_{\mathrm{T}}), \arrow[dl, "\tilde{B}^{(m)}_{\lambda}"] \\ H_m(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C}) & \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

яку припускаємо комутативною для деякого іншого асоційованого коланцюгового комплексу

$$\mathcal{H} \longrightarrow \Lambda^0(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H}) \xrightarrow{d_{\tilde{\mathcal{L}}}} \Lambda^1(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H}) \xrightarrow{d_{\tilde{\mathcal{L}}}} \ldots \xrightarrow{d_{\tilde{\mathcal{L}}}} \Lambda^{m+2}(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H}) \xrightarrow{d_{\tilde{\mathcal{L}}}} 0.$$

Тут, за визначенням, узагальнене антидиференціювання задано як

$$d_{\tilde{\mathcal{L}}} := \sum_{j=1}^{2} dt_j \wedge \tilde{\mathrm{L}}_j(t;x \mid \partial)$$

з операторами

$$\tilde{\mathrm{L}}_j = \partial/\partial t_j - \tilde{L}_j(t;x \mid \partial),$$

$$\tilde{L}_j(t;x \mid \partial) := \sum_{|\alpha|=0}^{n_j(\tilde{L})} \tilde{a}^{(j)}_{\alpha}(t;x)\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}},$$

де коефіцієнти

$$\tilde{a}^{(j)}_{\alpha} \in C^1\big(\mathrm{T};C^{\infty}(M;\mathrm{End}\mathbb{C}^N)\big), \quad |\alpha| = \overline{0,n_j(\tilde{L})}, \quad n_j(\tilde{L}) := n_j(L) \in \mathbb{Z}_+, \quad j = \overline{1,2}.$$

Відповідні ізоморфізми $\tilde{B}^{(m)}_{\lambda} : \mathcal{H}^m_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}}) \longrightarrow H_m(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C}),\ \lambda \in \Sigma$, діють, за визначенням, таким чином:

$$\tilde{B}^{(m)}_{\lambda}(\tilde{\psi}^{(0)}(\mu)\,dx) = S^{(m)}_{(t;x)} \int\limits_{\partial S^{(m)}_{(t;x)}} \tilde{\Omega}^{(m-1)}\big[\tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda), \tilde{\psi}^{(0)}(\mu)\,dx\big],$$

де $\tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda) \in \tilde{\mathcal{H}}^*_0 \subset \mathcal{H}^0_{\Lambda(\mathcal{L}^*),-}(M_{\mathrm{T}}),\ \lambda \in (\sigma(\tilde{L}) \cap \bar{\sigma}(\tilde{L}^*)) \times \Sigma_{\sigma}$,

$$\tilde{\mathcal{H}}^*_0 := \big\{\tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda) \in \mathcal{H}^m_{\Lambda(\mathcal{L}^*),-}(M_{\mathrm{T}}) \colon d^*_{\tilde{\mathcal{L}}}\tilde{\varphi}^{(0)}(x) = 0,\ \tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda)\mid_{\tilde{\Gamma}} = 0,\ \lambda \in \Sigma\big\}$$

для деякого гіперпростору $\tilde{\Gamma} \subset M_{\mathrm{T}}$. Відповідно визначаємо замкнений підпростір

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 := \Big\{\tilde{\psi}^{(0)}(\mu) \in \mathcal{H}^0_{\Lambda(\mathcal{L}^*),-}(M_{\mathrm{T}}) \colon d^*_{\tilde{\mathcal{L}}}\tilde{\psi}^{(0)}(\lambda) = 0,\ \tilde{\psi}^{(0)}(\mu)\mid_{\tilde{\Gamma}} = 0,\ \mu \in \Sigma\Big\} \tag{2.5}$$

для гіперпростору $\tilde{\Gamma} \subset M_{\mathrm{T}}$, введеного вище.

***Зауваження* 2.1.** Припустимо тепер, що елементи (2.3) належать замкненому підпростору (2.5), тобто

$$d_{\tilde{\mathcal{L}}}\tilde{\psi}^{(0)}(\mu) = 0.$$

Визначимо подібно до (2.5) замкнений підпростір $\tilde{\mathcal{H}}_0^* \subset \mathcal{H}^m_{\Lambda(\mathcal{L}^*),-}(M_{\mathrm{T}})$ таким чином:

$$\mathcal{H}_0 := \left\{\psi^{(0)}(\lambda) \in \mathcal{H}^0_{\Lambda(\mathcal{L}^*),-}(M_{\mathrm{T}}) \colon d_{\mathcal{L}}\psi^{(0)}(\lambda) = 0,\ \psi^{(0)}(\lambda)\,|_{\Gamma} = 0,\ \lambda \in \Sigma\right\}$$

для всіх $\mu \in \Sigma$. Тоді завдяки комутативності діаграми (2.4) існують два відповідні оборотні відображення

$$\mathbf{\Omega}_{\pm} \colon \mathcal{H}_0 \to \tilde{\mathcal{H}}_0 \tag{2.6}$$

залежно від шляху їх розширення на весь простір Гільберта $\mathcal{H}^m_{\Lambda,-}(M_{\mathrm{T}})$. Розширимо тепер оператори (2.6) на весь гільбертів простір $\mathcal{H}^m_{\Lambda,-}(M_{\mathrm{T}})$ за допомогою стандартного методу [8, 52, 54] варіації сталих, врахувавши, що ядра $\Omega_{(t;x)}(\lambda,\mu), \Omega_{(t_0;x_0)}(\lambda,\mu) \in L_2^{(p)}(\Sigma;\mathbb{C}) \otimes L_2^{(p)}(\Sigma;\mathbb{C})$, $\lambda, \mu \in \Sigma$. Можна записати такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
&\Omega_{(t;x)}(\lambda,\mu) - \Omega_{(t_0;x_0)}(\lambda,\mu) = \\
&= \int\limits_{\partial S^{(m)}_{(t;x)}} \Omega^{(m-1)}\big[\varphi^{(0)}(x), \psi^{(0)}(\mu)\, dx\big] - \int\limits_{\partial S^{(m)}_{(t_0;x_0)}} \Omega^{(m-1)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)\, dx\big] = \\
&= \int\limits_{S^{(m)}_{\pm}\left(\sigma^{(m-1)}_{(t;x)}, \sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}\right)} d\Omega^{(m-1)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)\, dx\big] = \\
&= \int\limits_{S^{(m)}_{\pm}\left(\sigma^{(m-1)}_{(t;x)}, \sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}\right)} Z^{(m)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)\, dx\big],
\end{aligned} \tag{2.7}$$

де, за визначенням, m-вимірні відкриті підпростори $S^{(m)}_{\pm}\Big(\sigma^{(m-1)}_{(t;x)}, \sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}\Big) \subset M_{\mathrm{T}}$ гладко натягнені без самоперетинів між двома гомологічними циклами $\sigma^{(m-1)}_{(t;x)} = \partial S^{(m)}_{(t;x)}$ і $\sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)} = \partial S^{(m)}_{(t_0;x_0)} \in C_{m-1}(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$ таким чином, що границя

$$\partial\Big(S^{(m)}_{+}\big(\sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}, \sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}\big) \cup S^{(m)}_{-}\big(\sigma^{(m-1)}_{(t;x)}, \sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}\big)\Big) = \varnothing.$$

Використовуючи співвідношення (2.7), легко знайти інтегральні вирази в $\mathcal{H}_-$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega}_{\pm} = \mathbf{1} - &\int\limits_{\Sigma} d\rho(\eta)\tilde{\psi}^{(0)}(\xi)\Omega^{-1}_{(t_0;x_0)}(\xi,\eta)\times \\
\times &\int\limits_{S^{(m)}_{\pm}\left(\sigma^{(m-1)}_{(t;x)}, \sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}\right)} Z^{(m)}\big[\varphi^{(0)}(\eta), (\cdot)\, dx\big],
\end{aligned} \tag{2.8}$$

визначені для фіксованих пар $\big(\varphi^{(0)}(\xi), \psi^{(0)}(\eta)\big) \in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}_0$ і $\big(\tilde{\varphi}^{(0)}(\xi), \tilde{\psi}^{(0)}(\mu)\big) \in \tilde{\mathcal{H}}_0^* \times \tilde{\mathcal{H}}_0$, $\lambda, \mu \in \Sigma$, що є обмеженими оборотними операторами типу Вольтерра [5, 13, 21, 37, 38] на всьому гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Більше того, для диференціальних операторів $\tilde{\mathrm{L}}_j : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, $j = \overline{1,2}$, легко отримати вирази

$$\tilde{\mathrm{L}}_j = \mathbf{\Omega}_{\pm} \mathrm{L}_j \mathbf{\Omega}_{\pm}^{-1} \tag{2.9}$$

для $j = \overline{1,2}$, в яких ліва частина не залежить від знаків $\pm$ у правій частині. Таким чином, інтегральні оператори Вольтерра (2.8) є операторами трансмутації Дельсарта – Ліонса, що відображають задану множину $\mathcal{L}$ диференціальних операторів у нову множину $\tilde{\mathcal{L}}$ диференціальних операторів, перетворених за допомогою операторів трансмутації Дельсарта (2.9).

Припустимо тепер, що всі диференціальні оператори $L_j(t; x \mid \partial)$, $j = \overline{1,2}$, розглянуті вище, не залежать від змінної $t \in \mathrm{T}$. Тоді, очевидно, можна взяти

$$\mathcal{H}_0 := \Big\{ \psi_\mu^{(0)}(\xi) \in L_{2.-}(M; \mathbb{C}^N) \colon L_j \psi_\mu^{(0)}(\xi) = \mu_j \psi_\mu^{(0)}(\xi),$$

$$j = \overline{1,2},\ \psi_\mu^{(0)}(\xi)|_{\tilde{\Gamma}} = 0,\ \mu = (\mu_1, \mu_2) \in \sigma(\tilde{L}) \cap \overline{\sigma}(L^*),\ \xi \in \Sigma_\sigma \Big\},$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 := \Big\{ \tilde{\psi}_\mu^{(0)}(\xi) \in L_{2.-}(M; \mathbb{C}^N) \colon \tilde{L}_j \tilde{\psi}_\mu^{(0)}(\xi) = \mu_j \tilde{\psi}_\mu^{(0)}(\xi),$$

$$j = \overline{1,2},\ \tilde{\psi}_\mu^{(0)}(\xi)\ |_{\tilde{\Gamma}} = 0,\ \mu = (\mu_1,\ \mu_2) \in \sigma(\tilde{L}) \cap \overline{\sigma}(L^*),\ \xi \in \Sigma_\sigma \Big\},$$

$$\mathcal{H}_0^* := \Big\{ \varphi_\lambda^{(0)}(\eta) \in L_{2.-}(M; \mathbb{C}^N) \colon L_j^* \varphi_\lambda^{(0)}(\eta) = \bar{\lambda}_j \varphi_\lambda^{(0)}(\eta),\ j = \overline{1,2},$$

$$\varphi_\lambda^{(0)}(\eta)|_{\tilde{\Gamma}} = 0,\ \lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2) \in \sigma(\tilde{L}) \cap \overline{\sigma}(L^*),\ \eta \in \Sigma_\sigma \Big\},$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_0^* := \Big\{ \tilde{\varphi}_\lambda^{(0)}(\eta) \in L_{2.-}(M; \mathbb{C}^N) \colon \tilde{L}_j^* \tilde{\varphi}_\lambda^{(0)}(\eta) = \bar{\lambda}_j \varphi_\lambda^{(0)}(\eta),$$

$$j = \overline{1,2},\ \tilde{\varphi}_\lambda^{(0)}(\eta)\ |_{\tilde{\Gamma}} = 0,\ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \sigma(\tilde{L}) \cap \overline{\sigma}(L^*),\ \eta \in \Sigma_\sigma \Big\}$$

і побудувати відповідні оператори трансмутації Дельсарта – Ліонса

$$\mathbf{\Omega}_{\pm} = 1 - \int\limits_{\sigma(\tilde{L}) \cap \overline{\sigma}(L^*)} d\rho_\sigma(\lambda) \int\limits_{\Sigma_\sigma \times \Sigma_\sigma} d\rho_{\Sigma_\sigma}(\xi)\, d\rho_{\Sigma_\sigma}(\eta) \times$$

$$\times \int\limits_{S_{\pm}^{(m)} \sigma_{(t_0;x_0)}^{(m-1)}, \sigma_{(t_0;x_0)}^{(m-1)}} dx\, \tilde{\psi}_\lambda^{(0)}(\xi) \Omega_{x_0}^{-1}(\lambda; \xi; \eta) \bar{\varphi}_\lambda^{(0),\intercal}(\eta)(\cdot), \tag{2.10}$$

що діють на просторі Гільберта $L_{2,+}(M; \mathbb{C}^N)$, де для будь-яких $(\lambda; \xi, \eta) \in \big(\sigma(\tilde{L}) \cap \overline{\sigma}(L^*)\big) \times \Sigma_\sigma^2$ ядра

$$\Omega_{(x_0)}(\lambda; \xi, \eta) := \int\limits_{\sigma_{x_0}^{(m-1)}} \Omega^{(m-1)} \big[\varphi_\lambda^{(0)}(\xi), \psi_\lambda^{(0)}(\eta)\, dx\big]$$

для $(\xi, \eta) \in \Sigma_\sigma^2$ і кожного $\lambda \in \sigma(\tilde{L}) \cap \overline{\sigma}(L^*)$ належать $L_2^{(\rho)}(\Sigma_\sigma; \mathbb{C}) \otimes L_2^{(\rho)}(\Sigma_\sigma; \mathbb{C})$. Більше того, оскільки $\partial \mathbf{\Omega}_\pm / \partial t_j = 0,\ j = \overline{1,2}$, легко отримати множину диференціальних виразів

$$\tilde{L}_j(x \mid \partial) := \mathbf{\Omega}_\pm L_j(x \mid \partial) \mathbf{\Omega}_\pm^{-1}, \quad j = \overline{1,2}, \tag{2.11}$$

що комутують, очевидно, між собою.

Оператори Вольтерра (2.10) мають деякі додаткові властивості, а саме, визначимо інтегральний оператор типу Фредгольма в H:

$$\mathbf{\Omega} := \mathbf{\Omega}_+^{-1} \mathbf{\Omega}_-, \tag{2.12}$$

який можна записати у вигляді

$$\mathbf{\Omega} {=} \mathbf{1} + \Phi(\mathbf{\Omega}), \tag{2.13}$$

де оператор $\Phi(\mathbf{\Omega}) \in \mathcal{B}_\infty(H)$ є компактним. Більше того, враховуючи співвідношення (2.11), легко переконатися, що виконуються комутаторні умови

$$[\mathbf{\Omega}, L_j] = 0 \tag{2.14}$$

для $j = \overline{1,2}$.

Позначимо через $\hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}) \in H_- \otimes H_-$ і $\hat{K}_+(\mathbf{\Omega}),\ \hat{K}_-(\mathbf{\Omega}) \in H_- \otimes H_-$ ядра відповідних [3, 4, 37, 38] операторів $\Phi(\mathbf{\Omega}) \in \mathcal{B}_\infty(H)$ і $\mathbf{\Omega}_\pm - \mathbf{1} \in \mathcal{B}_\infty(H)$. Тоді, враховуючи факт, що носій $\operatorname{supp} K_+(\mathbf{\Omega}) \cap \operatorname{supp} K_-(\mathbf{\Omega}) = \sigma_x^{(m-1)} \cup \sigma_{x_0}^{(m-1)}$, з (2.12), (2.13) отримуємо відоме лінійне інтегральне рівняння Гельфанда – Левітана – Марченка

$$\hat{K}_+(\mathbf{\Omega}) + \Phi(\hat{\mathbf{\Omega}}) + \hat{K}_+(\mathbf{\Omega})_+ * \hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}) = \hat{K}_-(\mathbf{\Omega}), \tag{2.15}$$

що дозволяє знайти факторизацію [37, 38] фредгольмівського операторного ядра (2.12) $\hat{K}_+(\mathbf{\Omega})(x; y) \in H_- \otimes H_-$ для всіх $y \in \operatorname{supp} K_+(\mathbf{\Omega})$. Умови (2.14) можна записати таким чином:

$$(L_{j,\mathrm{ext}} \otimes \mathbf{1}) \hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}) = (1 \otimes L_{j,\mathrm{ext}}^*) \hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}) \tag{2.16}$$

для $j = \overline{1,2}$, де $L_{j,\mathrm{ext}} \in \mathcal{L}(H_-),\ j = \overline{1,2}$, і його спряжений $L_{j,\mathrm{ext}}^* \in \mathcal{L}(H_-),\ j = \overline{1,2}$, є відповідно розширеннями [3, 4, 55] диференціальних операторів L_j і $L_j^* \in \mathcal{L}(H),\ j = \overline{1,2}$.

Беручи до уваги співвідношення (2.11), можна записати [3, 55] умови на ядра подібно до (2.16):

$$(\tilde{L}_{j,\mathrm{ext}} \otimes \mathbf{1}) \hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}) = (\mathbf{1} \otimes L_{j,\mathrm{ext}}^*) \hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}), \tag{2.17}$$

де, як і вище, $\tilde{L}_{j,\mathrm{ext}} \in \mathcal{L}(H_-),\ j = \overline{1,2}$, — відповідно оснащені розширення диференціальних операторів $\tilde{L}_j \in \mathcal{L}(H),\ j = \overline{1,2}$.

Перейдемо тепер до аналізу питання про загальну диференціальну структуру трансформованих операторних розширень (2.9). Очевидно, що умови (2.15) і (2.16) на ядра $\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}) \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$ операторів трансмутації Дельсарта – Ліонса є необхідними для того, щоб операторні розширення (2.9) існували і були диференційовними. Поставимо тепер питання: чи ці умови є достатніми? Для вивчення цього питання розглянемо оператори Вольтерра (2.8), (2.10) з ядрами, що задовольняють умови (2.15), (2.16), вважаючи, що відповідно орієнтовані поверхні $S_{\pm}^{(m)}\big(\sigma_{(t;x)^{(m-1)}}, \sigma_{(t_0;x_0)^{(m-1)}}\big) \in C_m(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$ задано таким чином:

$$S_{+}^{(m)}(\sigma_{(t;x)^{(m-1)}}, \sigma_{(t_0;x_0)^{(m-1)}}) = \big\{(t';x') \in M_{\mathrm{T}} : t' = P(t;x \mid x'), \quad t \in \mathrm{T}\big\},$$

$$S_{-}^{(m)}(\sigma_{(t;x)^{(m-1)}}, \sigma_{(t_0;x_0)^{(m-1)}}) = \big\{(t';x') \in M_{\mathrm{T}} : t' = P(t;x \mid x') \in \mathrm{T}\backslash[t_0, t]\big\},$$

де відображення $P \in C^{\infty}(M_{\mathrm{T}} \times M; \mathrm{T})$ є гладким і таким, що границі $\partial S_{\pm}^{(m)}\left(\sigma_{(t;x)}^{(m-1)}, \sigma_{(t_0;x_0)}^{(m-1)}\right) = \\ = \pm\left(\sigma_{(t;x)}^{(m-1)} - \sigma_{(t_0;x_0)}^{(m-1)}\right)$ з циклами $\sigma_{(t;x)}^{(m-1)}$ і $\sigma_{(t_0;x_0)}^{(m-1)} \in \mathcal{K}(M_{\mathrm{T}})$ гомологічні між собою для будь-яких вибраних точок $(t_0;x_0)$ і $(t;x) \in M_{\mathrm{T}}$. Тоді легко переконатися за допомогою простих, але громіздких обчислень, що ґрунтуються на міркуваннях з [17, 19], у тому, що результуючі вирази для правої частини

$$\tilde{\mathrm{L}} = \mathrm{L} + \big[\mathrm{K}_{\pm}(\mathbf{\Omega}), \mathrm{L}\big] \cdot \mathbf{\Omega}_{\pm}^{-1} \tag{2.18}$$

є диференціальними виразами $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, що збігаються між собою.

Розглядаючи оборотні оператори $\mathbf{\Omega}_{\pm}^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, що входять у (2.18), можна зауважити, що завдяки функціональній симетрії між замкненими підпросторами $\mathcal{H}_0$ і $\tilde{\mathcal{H}}_0 \subset \tilde{\mathcal{H}}_-$ співвідношення (2.6) та (2.3) є реверсивними, тобто існують оборотні операторні відображення $\mathbf{\Omega}_{\pm}^{-1}$: $\tilde{\mathcal{H}}_0 \to \mathcal{H}_0$ такі, що

$$\mathbf{\Omega}_{\pm}^{-1} : \tilde{\psi}^{(0)}(\lambda) \longrightarrow \psi^{(0)}(\lambda) := \tilde{\psi}^{(0)}(\lambda) \cdot \tilde{\Omega}_{(t;x)}^{-1} \tilde{\Omega}_{(t;x)} \tag{2.19}$$

для деяких відповідних ядер $\tilde{\Omega}_{(t;x)}(\lambda,\mu)$ і $\tilde{\Omega}_{(t_0;x_0)}(\lambda,\mu) \in L_2^{(\rho)}(\Sigma;\mathbb{C}) \otimes L_2^{(\rho)}(\Sigma;\mathbb{C})$, що пов'язані природно з перетвореним диференціальним виразом $\tilde{\mathrm{L}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Таким чином, завдяки виразам (2.19) можна записати подібно до (2.10) відповідні інверсні інтегральні оператори

$$\mathbf{\Omega}_{\pm}^{-1} = \mathbf{1} - \int\limits_{\Sigma} d\rho(\xi) \int\limits_{\Sigma} d\rho(\eta) \psi^{(0)}(\xi) \tilde{\Omega}_{t_0;x_0}^{-1}(\xi,\eta) \times$$

$$\times \int\limits_{S_{\pm}^{(m)}\left(\sigma_{(t;x)}^{(m-1)}, \sigma_{(t_0;x_0)}^{(m-1)}\right)} \tilde{Z}^{(m)}\big[\tilde{\varphi}^{(0)}(\eta), (\cdot)\, dx\big],$$

які визначені для фіксованих пар $\big(\tilde{\varphi}^{(0)}(\xi), \tilde{\psi}^{(0)}(\eta)\big) \in \tilde{\mathcal{H}}_0^* \times \tilde{\mathcal{H}}_0$ і $\big(\varphi^{(0)}(\xi), \psi^{(0)}(\eta)\big) \in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}_0$, $\xi, \eta \in \Sigma$, і є обмеженими оборотними операторами типу Вольтерра в усьому просторі Гільберта $\mathcal{H}$. А саме, умови сумісності $\mathbf{\Omega}_{\pm}\mathbf{\Omega}_{\pm}^{-1} = \mathbf{1} = \mathbf{\Omega}_{\pm}^{-1}\mathbf{\Omega}_{\pm}$ повинні бути виконаними тотожно в $\mathcal{H}$, обумовлювати деякі обмеження, визначати міри ρ, Σ і можливі асимптотичні умови на коефіцієнтні функції диференціального виразу $\mathrm{L} \in \mathcal{L}$. Такого типу обмеження були вже згадані в [28, 66, 67], де, зокрема, розглядалися зв'язки з локальною та нелокальною проблемами Рімана.

В рамках загальної конструкції, викладеної вище, можна дати природну інтерпретацію так званих трансформацій Беклунда для коефіцієнтних функцій заданого диференціального операторного виразу $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. А саме, дотримуючись символічного розгляду в [29], ми переінтерпретуємо підхід, запропонований там, для побудови перетворень Беклунда, використавши техніку, що ґрунтується на теорії операторів трансмутації Дельсарта. Визначимо два різні трансформовані за Дельсартом диференціальні операторні вирази

$$\mathrm{L}_1 = \mathbf{\Omega}_{1,\pm}\mathrm{L}\mathbf{\Omega}_{1,\pm}^{-1}, \qquad \mathrm{L}_2 = \mathbf{\Omega}_{2,\pm}\mathrm{L}\mathbf{\Omega}_{2,\pm}^{-1}, \tag{2.20}$$

де $\mathbf{\Omega}_{1,+}, \mathbf{\Omega}_{2,-} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ — деякі оператори Вольтерра трансмутації Дельсарта в $\mathcal{H}$ із борелівськими спектральними мірами ρ_1 і ρ_2 на Σ такими, що виконуються умови

$$\mathbf{\Omega}_{1,+}^{-1}\mathbf{\Omega}_{1,-} = \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_{2,+}^{-1}\mathbf{\Omega}_{2,-}. \tag{2.21}$$

Використовуючи тепер умови (2.20) і співвідношення (2.21), легко переконатися, що оператор $\mathrm{B} := \mathbf{\Omega}_{2,-}\mathbf{\Omega}_{1,+}^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ задовольняє операторні рівняння

$$\mathrm{L}_2\mathrm{B} = \mathrm{B}\mathrm{L}_1, \qquad \mathbf{\Omega}_{2,\pm}\mathrm{B} = \mathrm{B}\mathbf{\Omega}_{1,\pm}, \tag{2.22}$$

які мотивують наступне означення.

Означення 2.1. *Оборотне символічне відображення* $\mathrm{B}\colon \mathcal{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{L}\ (\mathcal{H})$ *будемо називати перетворенням Дарбу – Беклунда оператора* $\mathrm{L}_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *в оператор* $\mathrm{L}_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, *якщо виконується умова*

$$[\mathrm{QB}, \mathrm{L}_1] = 0 \tag{2.23}$$

для деякого лінійного диференціального виразу $\mathrm{Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Умову (2.23) можна реалізувати таким чином. Візьмемо будь-який диференціальний вираз $\mathrm{q} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, що задовольняє символічне рівняння

$$[\mathrm{qB}, \mathrm{L}] = 0.$$

Тоді, використовуючи перетворення, подібне до (2.20), з (2.21) знаходимо

$$[\mathrm{QB}, \mathrm{L}_1] = 0,$$

де завдяки (2.22)

$$\mathrm{QB} := \mathbf{\Omega}_{1,+}q\mathrm{B}\mathbf{\Omega}_{1,+}^{-1} = \mathbf{\Omega}_{1,+}\mathrm{q}\mathbf{\Omega}_{2,+}^{-1}\mathrm{B}.$$

Отже, вираз $\mathrm{Q} = \mathbf{\Omega}_{1,+}q\mathbf{\Omega}_{2,+}^{-1}$ теж є диференціальним завдяки умовам (2.22).

Міркування, пов'язане з символічним відображенням $\mathrm{B}\colon \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, приводить до ефективного знаряддя для побудови автоперетворення Беклунда для коефіцієнтів диференціальних операторних виразів $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, що мають багато застосувань [9, 13, 26, 34, 47, 49, 54, 56] у спектральній і солітонній теоріях.

Повернемось тепер до вивчення структури трансформацій Дельсарта – Ліонса для в'язок поліноміальних диференціальних операторів

$$\mathrm{L}(\lambda; x \mid \partial) := \sum_{j=0}^{n(L)} L_j(x \mid \partial)\lambda^j, \tag{2.24}$$

де $n(L) \in \mathbb{Z}_+$ і $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплекснозначний параметр. Потрібно знайти відповідні до (2.24) перетворення Дельсарта – Ліонса $\mathbf{\Omega}_{\lambda,\pm} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, такі, що для деяких в'язок поліноміальних диференціальних операторів $\tilde{\mathrm{L}}(\lambda; x \mid \partial) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ виконуються трансмутаційні умови Дельсарта – Ліонса [16]

$$\tilde{\mathrm{L}}\boldsymbol{\Omega}_{\lambda,\pm} = \boldsymbol{\Omega}_{\lambda,\pm}\mathrm{L}$$

для майже всіх $\lambda \in \mathbb{C}$. Для знаходження таких перетворень $\boldsymbol{\Omega}_{\lambda,\pm} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ розглянемо залежний від параметра $\tau \in \mathbb{R}$ диференціальний оператор $\mathrm{L}_\tau(x \mid \partial) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\tau)$

$$\mathrm{L}_\tau(x \mid \partial) := \sum_{j=0}^{n(L)} L_j(x \mid \partial)\partial^j/\partial\tau^j,$$

що діє в функціональному просторі $\mathcal{H}_\tau = C^{q(L)}(\mathbb{R}_\tau; \mathcal{H})$ для деякого $q(L) \in \mathbb{Z}_+$. Тоді можна легко побудувати відповідні перетворення Дельсарта – Ліонса $\boldsymbol{\Omega}_{\tau,\pm} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\tau)$ типу Вольтерра для деякого диференціального виразу

$$\tilde{\mathrm{L}}_\tau(x \mid \partial) := \sum_{j=0}^{n(L)} \tilde{L}_j(x \mid \partial)\partial^j/\partial\tau^j,$$

якщо справджуються трансмутаційні умови Дельсарта – Ліонса [16]

$$\tilde{\mathrm{L}}_\tau\boldsymbol{\Omega}_{\tau,\pm} = \boldsymbol{\Omega}_{\tau,\pm}\mathrm{L}_\tau$$

в $\mathcal{H}_\tau$. Отже, використовуючи результати, отримані вище, можна записати, що перетворення

$$\boldsymbol{\Omega}_{\tau,\pm} = \mathbf{1} - \int\limits_\Sigma d\rho_\Sigma(\xi) \int\limits_\Sigma d\rho_\Sigma(\eta)\tilde{\psi}_\tau^{(0)}(\lambda;\xi)\Omega^{-1}_{(\tau_0;x_0)}(\lambda;\xi,\eta)\times$$
$$\times \int\limits_{S_\pm^{(m)}(\sigma^{(m-1)}_{(\tau;x)},\sigma^{(m-1)}_{(\tau_0;x_0)})} Z^{(m)}\big[\varphi_\tau^{(0)}(\lambda;\eta),(\cdot)\,dx\big] \tag{2.25}$$

визначене за допомогою замкнених підпросторів $\mathcal{H}_{\tau,0} \subset \mathcal{H}_{\tau,-}$ і $\mathcal{H}^*_{\tau,0} \subset \mathcal{H}^*_{\tau,-}$:

$$\mathcal{H}_{\tau,0} := \big\{\psi_\tau^{(0)}(\lambda;\xi) \in \mathcal{H}_{\tau,-} : \mathrm{L}_\tau\psi_\tau^{(0)}(\lambda;\xi) = 0,$$
$$\psi_\tau^{(0)}(\lambda;\xi)|_{\tau=0} = \psi^{(0)}(\lambda;\xi) \in \mathcal{H},\ \mathrm{L}\psi^{(0)}(\lambda;\xi) = 0,$$
$$\psi^{(0)}(\lambda;\xi)|_\Gamma = 0,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \xi \in \Sigma\big\},$$

$$\mathcal{H}^*_{\tau,0} := \big\{\varphi_\tau^{(0)}(\lambda;\eta) \in \mathcal{H}^*_{\tau,-} : \mathrm{L}_\tau\varphi_\tau^{(0)}(\lambda;\eta) = 0,$$
$$\varphi_\tau^{(0)}(\lambda;\eta)|_{\tau=0} = \varphi^{(0)}(\lambda;\eta) \in \mathcal{H}^*,\ \mathrm{L}\varphi^{(0)}(\lambda;\eta) = 0,$$
$$\varphi^{(0)}(\lambda;\eta)|_\Gamma = 0,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \eta \in \Sigma\big\}.$$

Оскільки оператори $L_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $j = \overline{0, r(L)}$, не залежать від параметра $\tau \in \mathbb{R}$, з (2.25) можна легко визначити

$$\boldsymbol{\Omega}_\pm = \mathbf{1} - \int\limits_\Sigma d\rho_\Sigma(\xi) \int\limits_\Sigma d\rho_\Sigma(\eta)\tilde{\psi}^{(0)}(\lambda;\xi)\Omega^{-1}_{(x_0)}(\lambda;\xi,\eta)\times$$

$$\times \int\limits_{S_{\pm}^{(m)}(\sigma_{(x)}^{(m-1)},\sigma_{(x_0)}^{(m-1)})} Z_0^{(m)}[\varphi^{(0)}(\lambda;\eta),(\cdot)\,dx], \tag{2.26}$$

де ми поклали $\sigma_x^{(m-1)} := \sigma_{(\tau_0;x)}^{(m-1)}$, $\sigma_{x_0}^{(m-1)} := \sigma_{(\tau_0;x_0)}^{(m-1)} \in C_{m-1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$ і

$$Z_0^{(m)}\left[\varphi^{(0)}(\lambda;\eta),\psi^{(0)}dx\right] := Z^{(m)}\left[\varphi_\tau^{(0)}(\lambda;\eta),\psi_\tau^{(0)}dx\right]\Big|_{d\tau=0}.$$

Відповідно до (2.26) замкнені підпростори $\mathcal{H}_0 \in \mathcal{H}_-$ і $\mathcal{H}_0^* \in \mathcal{H}_-^*$ задаються таким чином:

$$\mathcal{H}_0 := \left\{\psi^{(0)}(\lambda;\xi) \in \mathcal{H}_- : \mathrm{L}\psi^{(0)}(\lambda;\xi) = 0,\ \psi^{(0)}(\lambda;\xi)|_\Gamma = 0,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \xi \in \Sigma\right\},$$

$$\mathcal{H}_{\tau,0}^* := \left\{\varphi^{(0)}(\lambda;\eta) \in \mathcal{H}_-^* : \mathrm{L}\varphi^{(0)}(\lambda;\eta) = 0,\ \varphi^{(0)}(\lambda;\eta)|_\Gamma = 0,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \eta \in \Sigma\right\}.$$

Отже, використовуючи вирази (2.26), можна побудувати перетворену за Дельсартом – Ліонсом лінійну диференціальну в'язку $\tilde{\mathrm{L}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, коефіцієнти якої певним чином асоційовані з коефіцієнтами в'язки $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ через деякі співвідношення типу Беклунда, які корисні для застосувань (див. [8, 24, 28, 30, 49, 51, 54]) у теорії солітонів.

3. Оператори трансмутації Дельсарта – Ліонса для спеціальних багатовимірних диференціальних виразів та їх застосування.

***Приклад* 3.1.** Збурений самоспряжений оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$.

Розглянемо оператор Лапласа $-\Delta_m$ в $H := L(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$, який збурений оператором множення на функцію $q \in W_2^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$, тобто оператор

$$L(x \mid \partial) := -\Delta_m + q(x), \tag{3.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^m$. Оператор (3.1) є самоспряженим в H. Застосовуючи результати з пункту 1 до диференціального виразу (3.1) у гільбертовому просторі H, можна записати оборотні оператори трансмутації Дельсарта – Ліонса:

$$\mathbf{\Omega}_\pm = \mathbf{1} - \int\limits_{\sigma(L)} d\rho_\sigma(\xi) \int\limits_{\sigma(L)} d\rho_\sigma(\xi) \int\limits_{\Sigma_\sigma} d\rho_{\Sigma_\sigma}(\xi) \int\limits_{\Sigma_\sigma} d\rho_{\Sigma_\sigma}(\eta) \times$$

$$\times \tilde{\psi}^{(0)}(\lambda;\xi)\Omega_{(x_0)}^{-1}(\lambda;\xi,\eta) \int\limits_{S_{\pm}^{(m)}\left(\sigma_{(x)}^{(m-1)},\sigma_{(x_0)}^{(m-1)}\right)}^{(0)} dy\bar{\varphi}^{(0)\intercal}(\lambda;\eta)(\cdot), \tag{3.2}$$

де $\sigma_x^{(m-1)} \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$ — замкнена, можливо, не компактна, симпліціальна гіперповерхня в $\mathbb{R}^m$, параметризована біжучою точкою $x \in \sigma_x^{(m-1)}$, і $\sigma_{x_0}^{(m-1)} \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$ — відповідна гомологічна до $\sigma_x^{(m-1)}$ симпліціальна гіперповерхня в $\mathbb{R}^m$, параметризована точкою $x_0 \in \sigma_{x_0}^{(m-1)}$. Існують два m-вимірні підпростори, що пов'язують їх, наприклад $S_\pm^{(m)}\left(\sigma_x^{(m-1)},\sigma_{x_0}^{(m-1)}\right) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$, такі, що $S_+^{(m)}\left(\sigma_x^{(m-1)},\sigma_{x_0}^{(m-1)}\right) \cup S_-^{(m)}\left(\sigma_x^{(m-1)},\sigma_{x_0}^{(m-1)}\right) = \mathbb{R}^m$. Беручи до уваги ці підпростори, можна записати компактно оператори трансмутації Дельсарта – Ліонса (3.2) для (3.1):

$$\mathbf{\Omega}_\pm = \mathbf{1} + \int\limits_{S_{\pm}^{(m)}(\sigma_x^{(m-1)},\sigma_{x_0}^{(m-1)})} dy\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega})(x;y)(\cdot), \tag{3.3}$$

де, як і раніше, $x \in \sigma_x^{(m-1)}$ і ядра $\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}) \in H_- \otimes H_-$ задовольняють рівняння (2.17), або, еквівалентно,

$$-\Delta_m(x;\partial)\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega})(x;y) + \Delta_m(y;\partial)\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega})(x;y) =$$
$$= (q(y) - \tilde{q}(x))\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega})(x;y)$$

для всіх $x, y \in \operatorname{supp}\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega})$. Візьмемо для простоти некомпактну замкнену симпліціальну гіперповерхню $\sigma_x^{(m-1)} = \sigma_{x,\gamma}^{(m-1)} := \{y \in \mathbb{R}^m : \langle x-y,\gamma\rangle = 0\}$ і вироджений симпліціальний цикл $\sigma_{x_0}^{(m-1)} := x_0 = \infty \in \mathbb{R}^m$, де $\gamma \in \mathbb{S}^{m-1}$ — довільний версор, $\|\gamma\| = 0$. Тоді, очевидно,

$$S_\pm^{(m)}\big(\sigma_{x,\gamma}^{(m-1)}, \sigma_\infty^{(m-1)}\big) := S_{\pm\gamma,x}^{(m)} = \big\{y \in \mathbb{R}^m : \langle x-y, \pm\gamma\rangle \geq 0\big\}$$

і оператори трансмутації (3.3) наберуть вигляду

$$\mathbf{\Omega}_{\pm\gamma} = \mathbf{1} + \int\limits_{S_{\pm\gamma,x}^{(m)}} dy \hat{K}_{\pm\gamma}(\mathbf{\Omega})(x;y)(\cdot), \tag{3.4}$$

де $\operatorname{supp}\hat{K}_{\pm\gamma}(\mathbf{\Omega}) = S_{\pm\gamma,x}^{(m)}$, $S_{+\gamma,x}^{(m)} \cap S_{-\gamma,x}^{(m)} = \sigma_{x,\gamma}^{(m-1)} \cup \sigma_\infty^{(m-1)}$ і $S_{+\gamma,x}^{(m)} \cup S_{-\gamma,x}^{(m)} = \mathbb{R}^m$ для будь-якого напрямку $\gamma \in \mathbb{S}^{m-1}$.

Оборотні оператори трансмутації Вольтерра, подібні до (3.4), були побудовані раніше Л. Д. Фаддєєвим [17] для самоспряженого збуреного оператора Лапласа (3.1) в $\mathbb{R}^3$. Він назвав їх [17] операторами перетворення з вольтеррівським напрямком $\gamma \in \mathbb{S}^{m-1}$. Легко бачити, що вирази Фаддєєва (3.4) є спеціальним випадком загального виразу (3.3).

Визначимо тепер, використавши (3.3), оператор Фредгольма у просторі Гільберта H:

$$\mathbf{\Omega} := (\mathbf{1} + K_+(\mathbf{\Omega}))^{-1}(\mathbf{1} + K_-(\mathbf{\Omega})) = \mathbf{1} + \Phi(\mathbf{\Omega}) \tag{3.5}$$

з компактною частиною $\Phi(\mathbf{\Omega}) \in \mathcal{B}_\infty(H)$. Тоді справджується комутаторна рівність

$$[L, \Phi(\mathbf{\Omega})] = \mathbf{0}$$

разом із рівнянням Гельфанда – Левітана – Марченка

$$K_+(\mathbf{\Omega}) + \hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}) + \hat{K}_+(\mathbf{\Omega}) + \hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}) = \hat{K}_-(\mathbf{\Omega})$$

для відповідних ядер $\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega})$ і $\hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}) \in H_- \otimes H_-$.

У статті [17] ретельно проаналізовано спектральну структуру ядер $\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}) \in H_- \otimes H_-$ у (3.4) за допомогою аналітичних властивостей відповідних функцій Гріна оператора (3.1). Як можна бачити з (3.2), ці властивості сильно залежать від структури спектральних мір ρ_σ на $\sigma(L)$ і ρ_{Σ_σ} на Σ_σ, а також від аналітичної поведінки ядра $\Omega_\infty(\lambda;\xi,\eta) \in L_2^{(\rho)}(\Sigma_\sigma;\mathbb{C}) \otimes L_2^{(\rho)}(\Sigma_\sigma;\mathbb{C})$, $\xi, \eta \in \Sigma_\sigma$, для всіх $\lambda \in \sigma(L)$. У [17] було встановлено, що для будь-якого напрямку $\gamma \in \mathbb{S}^{m-1}$ залежність ядер $\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}) \in H_- \otimes H_-$ від регуляризованого визначника резольвенти $R_\mu(L) \in \mathcal{B}(H)$, $\mu \in \mathbb{C}/\sigma(L)$, є регулярною для оператора (3.1). Цю залежність можна пояснити, якщо використати підхід із пункту 2.

***Приклад* 3.2.** Двовимірний оператор Дірака.

Визначимо в $H := L_2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$ двовимірний оператор типу Дірака

$$\tilde{\mathrm{L}}_1(x;\partial) := \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 & \tilde{u}_1(x) \\ \tilde{u}_2(x) & \partial/\partial x_2 \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

де $x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ і коефіцієнти $\tilde{u}_j \in W_2^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, $j = \overline{1,2}$. Трансформаційні властивості оператора (3.6) були ретельно вивчені Л. П. Нижником в [41 – 45]. Зокрема, він побудував деякий спектральний клас операторів трансмутації Дельсарта – Ліонса у вигляді

$$\mathbf{\Omega}_\pm = \mathbf{1} + \int\limits_{S_\pm^{(2)}(\sigma_x^{(1)},\sigma_\infty^{(1)})} dy \hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega})(x;y)(\cdot), \tag{3.7}$$

де для двох ортонормованих версорів γ_1 і $\gamma_2 \in \mathbb{S}^1$, $\|\gamma_1\| = 1 = \|\gamma_2\|$,

$$S_+^{(2)}\big(\sigma_x^{(1)},\sigma_\infty^{(1)}\big) := \big\{y \in \mathbb{R}^2 : \langle x-y,\gamma_1\rangle \geq 0\big\}\cap$$
$$\cap\big\{y \in \mathbb{R}^2 : \langle x-y,\gamma_2\rangle \geq 0\big\},$$
$$S_-^{(2)}\big(\sigma_x^{(1)},\sigma_\infty^{(1)}\big) := \big\{y \in \mathbb{R}^2 : \langle x-y,\gamma_1\rangle \leq 0\big\}\cup$$
$$\cup\big\{y \in \mathbb{R}^2 : \langle x-y,\gamma_2\rangle \leq 0\big\}.$$

У випадку, коли $\langle x,\gamma_j\rangle = x_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,2}$, відповідне ядро

$$\hat{K}_+(\mathbf{\Omega}) = \begin{pmatrix} K_{+,11}^{(1)}\delta_{\langle y-x,\gamma_1\rangle} + K_{+,11}^{(0)}(x;y) & K_{+,12}^{(1)}\delta_{\langle y-x,\gamma_2\rangle} + K_{+,12}^{(0)} \\ K_{+,21}^{(1)}\delta_{\langle y-x,\gamma_1\rangle} + K_{+,21}^{(0)}(x;y) & K_{+,22}^{(1)}\delta_{\langle y-x,\gamma_2\rangle} + K_{+,22}^{(0)} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

є сингулярним з особливостями типу дельта-функції Дірака, локалізованими на $\langle y-x,\gamma_2\rangle = 0$ і $\langle y-x,\gamma_1\rangle = 0$, і з регулярними коефіцієнтами $K_{+,ij}^{(l)} \in C^1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ для всіх $i,j = \overline{1,2}$ і $l = \overline{0,1}$. Така властивість трансмутаційних ядер для збуреного оператора Лапласа (3.1) спостерігалася також в [17], де це було мотивовано необхідними умовами диференціальності для перетвореного оператора $\tilde{L}(x;\partial) \in \mathcal{L}(H)$. Як можна легко переконатися, деякі причини існування вказаних сингулярностей містяться в (3.8).

Розглянемо тепер загальний вираз типу (3.3) для відповідних підпросторів $S_\pm^{(2)}\big(\sigma_x^{(1)},\sigma_\infty^{(1)}\big)$, що пов’язують замкнений некомпактний цикл $\sigma_x^{(1)} \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ і нескінченну точку $\sigma_\infty^{(1)} := \infty \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$. Біжуча точка $x \in \sigma_x^{(1)}$ є довільною, але, як правило, фіксованою. Ядра $\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}) \in H_-\times H_-$ у (3.7) задовольняють стандартні умови (2.16), (2.17), тобто

$$(\tilde{\mathrm{L}}_{1,\mathrm{ext}}\otimes\mathbf{1})\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}) = (\mathbf{1}\otimes\mathrm{L}_{1,\mathrm{ext}}^*)\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}), \tag{3.9}$$
$$[\mathrm{L}_1,\Phi(\mathbf{\Omega})] = 0$$

для деякого матричного диференціального оператора Дірака $\mathrm{L}_1 \in \mathcal{L}(H)$ у формі (3.1). Разом з цим оператором Дірака в [41 – 45] вивчався матричний диференціальний оператор другого порядку

$$\tilde{\mathrm{L}}_2(x;\partial) := \mathbf{1}\frac{\partial}{\partial t} + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} \pm \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \tilde{v}_2 & -2\dfrac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \\ -2\dfrac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} \pm \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \tilde{v}_1 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

у параметричному просторі $\mathcal{H} := C^1(\mathbb{R}; H)$, для якого було розвинено теорію розсіяння і наведено її застосування для побудови солітоноподібних точних розв'язків до так званої нелінійної динамічної системи Деві – Стюартсона в частинних похідних. Останнє ґрунтувалося на факті, що два оператори $\tilde{\mathrm{L}}_1$ і $\tilde{\mathrm{L}}_2 \in \mathcal{L}(H)$ комутують один з одним. А саме, розглянемо оператори Вольтерра $\mathbf{\Omega}_\pm \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, що реалізують такі трансмутації Дельсарта – Ліонса:

$$\tilde{\mathrm{L}}_1\mathbf{\Omega}_\pm = \mathbf{\Omega}_\pm \mathrm{L}_1, \qquad \tilde{\mathrm{L}}_2\mathbf{\Omega}_\pm = \mathbf{\Omega}_\pm \mathrm{L}_2. \tag{3.11}$$

Тут ми поклали

$$\mathrm{L}_1(x;\partial) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

$$\mathrm{L}_2(x;\partial) := \mathbf{1}\frac{\partial}{\partial t} + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} \pm \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \alpha_2(x_2) & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} \pm \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \alpha_1(x_1) \end{pmatrix},$$

де $\alpha_j \in W_2^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $j = \overline{1,2}$, — деякі задані функції. Очевидно, що оператори (3.12) комутують один з одним. Тоді, якщо оператори $\mathbf{\Omega}_\pm \in \mathcal{B}(H)$ існують і задовольняють (3.11), справджуються комутаційні умови

$$\big[\tilde{\mathrm{L}}_1, \tilde{\mathrm{L}}_2\big] = 0, \tag{3.13}$$

що стверджувалося вище і ефективно використовувалося в [41 – 45].

Нагадаємо тепер, що для існування операторів $\mathbf{\Omega}_\pm \in \mathcal{B}(H)$ повинні виконуватися додаткові умови на ядра (3.9) і

$$\big(\tilde{\mathrm{L}}_{2,\mathrm{ext}} \otimes \mathbf{1}\big)\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}) = \big(\mathbf{1} \otimes \mathrm{L}_{2,\mathrm{ext}}^*\big)\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}), \tag{3.14}$$

$$\big[\mathrm{L}_2, \Phi(\mathbf{\Omega})\big] = 0,$$

де, як і раніше, оператор $\Phi(\mathbf{\Omega}) \in \mathcal{B}_\infty(H)$ визначено через (3.5) як

$$\mathbf{\Omega} := \mathbf{1} + \Phi(\mathbf{\Omega}).$$

Завдяки очевидній комутаційній умові (3.13) множина рівнянь (3.9), (3.14) є сумісною і приводить до виразу типу (3.7), де ядро $\hat{K}_+(\mathbf{\Omega}) \in H_- \otimes H_-$ задовольняє множину диференціальних рівнянь, узагальнюючи такі ж із [41 – 45]:

$$\frac{\partial K_{+,11}}{\partial x_1} + \frac{\partial K_{+,11}}{\partial y_1} + \tilde{u}_1 K_{+,21} = 0, \qquad \frac{\partial K_{+,12}}{\partial x_1} + \frac{\partial K_{+,12}}{\partial y_1} + \tilde{u}_1 K_{+,22} = 0,$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial K_{+,21}}{\partial x_2}+\frac{\partial K_{+,21}}{\partial x_1}+\tilde{u}_2K_{+,11}=0, \qquad \frac{\partial K_{+,22}}{\partial x_2}+\frac{\partial K_{+,22}}{\partial y_2}+\tilde{u}_2K_{+,12}=0,\\
\pm\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial x_2}K_{+,21}=\frac{\partial K_{+,11}}{\partial t}+\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)\pm\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\right]K_{+,11}+(\alpha_2(x_2)-\tilde{v}_2(x))K_{+,11},\\
\pm\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial x_1}K_{+,21}=\frac{\partial K_{+,22}}{\partial t}+\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)\pm\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\right]K_{+,22}+(\alpha_1(x_1)-\tilde{v}_1(x))K_{+,22},\\
\mp2\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial x_2}K_{+,22}=\frac{\partial K_{+,12}}{\partial t}+\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)\pm\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\right]K_{+,12}+(\alpha_1(x_1)-\tilde{v}_2(x))K_{+,22},\\
2\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial x_1}K_{+,22}=\frac{\partial K_{+,21}}{\partial t}+\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)\pm\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\right]K_{+,21}+(\alpha_2(x_2)-\tilde{v}_1(x))K_{+,11}.
\end{gathered} \tag{3.15}$$

Більше того, справджуються умови

$$\begin{gathered}
\tilde{u}_1(x)=-K_{+,12}^{(0)}\Big|_{y=x}, \qquad \tilde{u}_2(x)=-K_{+,21}^{(0)}\Big|_{y=x},\\
\tilde{v}_2(x)|_{x_1=-\infty}=\alpha_2(x_2), \qquad \tilde{v}_1(x)|_{x_2=-\infty}=\alpha_1(x_1)
\end{gathered} \tag{3.16}$$

для всіх $x\in\mathbb{R}^2$ і $y\in\operatorname{supp}\hat{K}_+(\mathbf{\Omega})$, де ми врахували розклад

$$\hat{K}_+(\mathbf{\Omega})=\sum_{s=0}^{p(K_+)}K_+^{(s)}\delta_{\sigma_x^{(1)}}^{(s-1)} \tag{3.17}$$

для деякого визначеного цілого $p(K_+)\in\mathbb{Z}_+$ по відношенню до функції Дірака $\delta_{\sigma_x^{(1)}}: W_2^q(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})\to\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{Z}_+$, і похідних, маючи носій (див. [19], розділ 3), що збігається із замкненим циклом $\sigma_x^{(1)}\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$.

***Зауваження* 3.1.** Розглянемо спеціальний випадок (3.8), обговорений раніше в [41 – 45]. Можна легко отримати, що $p(K_+)=1$ і $\sigma_x^{(1)}=\partial\big(\cap_{j=\overline{1,2}}\big\{y\in\mathbb{R}^2\colon\langle y-x,\gamma_j\rangle=0\big\}\big)\subset\subset\operatorname{supp}\hat{K}_+(\mathbf{\Omega})$. Раніше було також показано, що рівняння типу (3.15), (3.16) мають розв'язки, якщо рівняння Гельфанда – Левітана – Марченка (2.15) має розв'язки.

Використовуючи тепер точні форми операторів L_1 і $\mathrm{L}_2\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, легко отримати з (3.9) і (3.14) відповідну множину диференціальних рівнянь для компонент ядра $\hat{\Phi}(\mathbf{\Omega})\in H_-\otimes H_-$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial y_1}=0, \qquad \frac{\partial\Phi_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial y_1}=0,\\
\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial y_2}=0, \qquad \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial y_2}=0,\\
\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial t}\pm\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\Phi_{11}+(\alpha_2(y_2)-\alpha_2(x_2))\Phi_{11}=0,\\
\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial t}\pm\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\Phi_{12}+(\alpha_1(y_1)-\alpha_2(x_2))\Phi_{12}=0,\\
\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial t}+\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)\Phi_{21}+(\alpha_2(y_2)-\alpha_1(x_1))\Phi_{21}=0,
\end{gathered} \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial t} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)\Phi_{22} + (\alpha_1(y_1) - \alpha_1(x_1))\Phi_{22} = 0$$

для всіх $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Рівняння (3.18) узагальнюють рівняння, знайдені раніше в [41 – 45], і були використані для інтегрування відомого диференціального рівняння Деві – Стюартсона [8, 18, 41, 44, 45, 47, 66] і знаходження так званих солітонних розв'язків. Стосовно нашого узагальненого випадку ядро (3.17) є розв'язком таких рівнянь типу Гельфанда – Левітана – Марченка:

$$\begin{aligned} &K_+^{(0)}(x;y) + \Phi^{(0)}(x;y) + \int\limits_{S_+^{(2)}(\sigma_x^{(1)},\sigma_\infty^{(1)})} K_+^{(0)}(x;\xi)\Phi^{(0)}(\xi;y)\,d\xi + \\ &\qquad + \int\limits_{\sigma_x^{(1)}} K_+^{(1)}(x;\xi)\Phi^{(0)}(\xi;y)d\sigma_x^{(1)} = 0, \\ &K_+^{(1)}(x;y) + \Phi^{(1)}(x;y) + \int\limits_{S_+^{(2)}(\sigma_x^{(1)},\sigma_\infty^{(1)})} K_+^{(0)}(x;\xi)\Phi^{(1)}(\xi;y)\,d\xi + \\ &\qquad + \int\limits_{\sigma_x^{(1)}} K_+^{(1)}(x;\xi)\Phi^{(1)}(\xi;y)d\sigma_x^{(1)} = 0, \end{aligned} \tag{3.19}$$

де $y \in S_+^{(2)}\big(\sigma_x^{(1)}, \sigma_\infty^{(1)}\big)$ для всіх $x \in \mathbb{R}^2$ і, за означенням,

$$\hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}) := \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)}\delta_{\sigma_x^{(1)}} \tag{3.20}$$

є відповідним розкладом ядра (3.17). Оскільки ядро (3.20) є сингулярним, диференціальні рівняння (3.18) можна трактувати в природно узагальненому сенсі розподілів [19].

Беручи до уваги точну форму „одягнених" диференціальних операторів $\mathrm{L}_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ j = \overline{1,2}$, заданих через (3.6) і (3.10), легко отримуємо, що умова комутативності (3.13) приводить до того, що $\tilde{\mathrm{L}}_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ j = \overline{1,2}$, є еквівалентною до згаданої вище динамічної системи Деві – Стюартсона

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{u}_1}{dt} &= -(\tilde{u}_{1,xx} + \tilde{u}_{1,yy}) + 2(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2), \\ \frac{d\tilde{u}_2}{dt} &= \tilde{u}_{2,xx} + \tilde{u}_{2,yy} + 2(\tilde{v}_2 - \tilde{v}_1), \\ \tilde{v}_{1,x} &= (\tilde{u}_1\tilde{u}_2)_y, \quad \tilde{v}_{2,x} = (\tilde{u}_1\tilde{u}_2)_x \end{aligned} \tag{3.21}$$

на функціональному нескінченновимірному многовиді $M_u \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$. Точні солітоноподібні розв'язки (3.21) задаються виразами (3.16), де ядро $K_+^{(1)}(\mathbf{\Omega})$ розв'язує друге лінійне рівняння (3.19). З іншого боку, існує точний вираз (2.3), який розв'язує множину „одягнених" рівнянь

$$\tilde{\mathrm{L}}_1\tilde{\psi}^{(0)}(\eta) = 0, \qquad \tilde{\mathrm{L}}_2\tilde{\psi}^{(0)}(\eta) = 0.$$

Оскільки ядра $\Omega(\lambda,\mu) \in L_2^{(\rho)}(\Sigma;\mathbb{C}) \otimes L_2^{(\rho)}(\Sigma;\mathbb{C})$ для $\lambda,\mu \in \Sigma,\ (t;x) \in M_{\mathrm{T}} \cap\ S_+^{(2)}(\sigma_x^{(1)}, \sigma_\infty^{(1)})$ задані за допомогою точних виразів (2.2), то можна знайти з використанням простих обчислень відповідний аналітичний вираз для функцій $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in M_u$, що розв'язують динамічну систему (3.21). Цю процедуру часто називають перетворенням типу Дарбу. Її було використано в [54] як частковий випадок конструкції, запропонованої вище, для знаходження солітоноподібних розв'язків для системи Деві – Стюартсона (3.21) і пов'язаних з нею модифікованих двовимірних потоків типу Кортевега – де Вріза на $M_{u.}$ Більше того, як можна зауважити із технічної конструкції методу, використаного для побудови операторів трансмутації Дельсарта – Ліонса $\mathbf{\Omega}_{\pm} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, множина розв'язків (3.21), отримана за допомогою перетворень Дарбу, збігається повністю з відповідною множиною розв'язків, отриманих за допомогою розв'язку асоційованої системи інтегральних рівнянь Гельфанда – Левітана – Марченка (3.18), (3.19).

***Приклад* 3.3.** Узагальнений афінний диференціальний комплекс де Рама – Ходжа і асоційовані узагальнені самоспряжені потоки Янга – Міллса.

Розглянемо множину афінних диференціальних виразів в $\mathcal{H} := C^1(\mathbb{R}^{m+1}; H)$, $H := := L_2(\mathbb{R}^m; \mathbb{C}^N)$:

$$\mathrm{L}_i(\lambda) := \mathbf{1}\frac{\partial}{\partial p_i} - \lambda\frac{\partial}{\partial x_i} + A_i(x; p \mid t), \tag{3.22}$$

де $x \in \mathbb{R}^m, (t,p) \in \mathbb{R}^{m+1}$, матриці $A_i \in C^1\big(\mathbb{R}^{m+1}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^m; \operatorname{End}\mathbb{C}^N)\big)$, $i = \overline{1,m}$, і параметр $\lambda \in \mathbb{C}$. Тепер можна легко побудувати точний узагальнений диференціальний комплекс де Рама – Ходжа на $M_{\mathrm{T}} := \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^m$ як

$$\mathcal{H} \to \Lambda(M_{\mathrm{T}}; \mathcal{H}) \overset{d_{\mathcal{L}(\lambda)}}{\to} \Lambda^1(M_{\mathrm{T}}; \mathcal{H}) \overset{d_{\mathcal{L}(\lambda)}}{\to} \ldots \overset{d_{\mathcal{L}(\lambda)}}{\to} \Lambda^{2m+1}(M_{\mathrm{T}}; \mathcal{H}) \overset{d_{\mathcal{L}(\lambda)}}{\to} 0, \tag{3.23}$$

де, за означенням, диференціювання

$$d_{\mathcal{L}(\lambda)} := dt \wedge \mathrm{B}(\lambda) + \sum_{i=1}^{m} dp_i \wedge \mathrm{L}_i(\lambda) \tag{3.24}$$

і афінна матриця

$$\mathrm{B}(\lambda) := \partial/\partial t - \sum_{s=0}^{n(B)+q} B_s(x; p \mid t)\lambda^{n(B)-s} \tag{3.25}$$

з матрицями $B_s \in C^1\big(\mathbb{R}^{m+1}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^m; \operatorname{End}\mathbb{C}^N)\big)$, $s = \overline{0, n(B)+q}$, $n(B)$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Афінний комплекс (3.23) буде замкненим і точним для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$ тоді і тільки тоді, коли справджуються узагальнені самоспряжені рівняння Янга – Міллса [24]

$$\begin{gathered}
\partial A_i/\partial p_j - \partial A_j/\partial p_i - [A_i, A_j] = 0, \qquad \partial A_i/\partial x_j - \partial A_j/\partial x_i = 0, \\
\partial B_0/\partial x_i = 0, \quad \partial B_{n(B)+q}/\partial p_i = 0, \qquad \partial B_s/\partial x_i = \partial B_{s-1}/\partial p_i + [A_i, B_{s-1}] = 0, \\
\partial A_i/\partial t + \partial B_{n(B)}/\partial p_i - \partial B_{n(B)+1}/\partial x_i + [A_i, B_{n(B)}] = 0
\end{gathered} \tag{3.26}$$

для всіх $i, j = \overline{1,m}$ і $s = \overline{0, n(B)} \vee \overline{n(B)+q, n(B)+2}$. Припустимо тепер, що умови (3.26) на M_{T} виконано. Тоді, виконуючи заміну $\mathbb{C} \ni \lambda \to \partial/\partial\tau : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\tau \in \mathbb{R}$, знаходимо множину явних диференціальних виразів

$$\begin{gathered}\mathrm{L}_{i(\tau)} := \mathbf{1}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial x_i} + A_i(x;p\mid t),\\ \mathrm{B}_{(\tau)} := \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{s=0}^{n(B)+q} B_s(x;p\mid t)\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{n(B)-s},\end{gathered} \tag{3.27}$$

де матриці $A_i,\ i=\overline{1,m}$, і $B_s,\ s=\overline{0,n(B)+q}$, не залежать від змінної $\tau\in\mathbb{R}$. Тепер за допомогою операторних диференціальних виразів (3.27) можна побудувати новий диференціальний комплекс, пов'язаний із комплексом (3.23):

$$\mathcal{H}_{(\tau)} \to \Lambda(M_{\mathrm{T},\tau};\mathcal{H}_{(\tau)}) \overset{d_{\mathcal{L}}}{\to} \Lambda^1(M_{\mathrm{T},\tau};\mathcal{H}_{(\tau)}) \overset{d_{\mathcal{L}}}{\to} \ldots \overset{d_{\mathcal{L}}}{\to} \Lambda^{2m+2}(M_{\mathrm{T},\tau};\mathcal{H}_{(\tau)}) \overset{d_{\mathcal{L}}}{\to} 0, \tag{3.28}$$

де, за означенням, $\mathcal{H}_{(\tau)} := C^1(\mathbb{R}^{m+1};H_{(\tau)}),\ H_{(\tau)} := L_2(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}_\tau;\mathbb{C}^N)$ і

$$d_{\mathcal{L}} := dt\wedge\mathrm{B}_{(\tau)} + \sum_{i=1}^{m} dp_i\wedge\mathrm{L}_{i(\tau)}.$$

Завдяки умові (3.26) справедливою є така лема.

Лема 3.1. *Диференціальний комплекс* (3.28) *є замкненим і точним.*

Таким чином, можна побудувати стандартний узагальнений типу де Рама–Ходжа розклад простору Гільберта

$$\mathcal{H}_\Lambda(M_{\mathrm{T},\tau}) := \overset{k=2m+2}{\underset{k=0}{\oplus}} \mathcal{H}^k_\Lambda(M_{\mathrm{T},\tau}),$$

а також відповідне оснащення Гільберта–Шмідта

$$\mathcal{H}_{\Lambda,+}(M_{\mathrm{T},\tau}) \subset \mathcal{H}_\Lambda(M_{\mathrm{T},\tau}) \subset \mathcal{H}_{\Lambda,-}(M_{\mathrm{T},\tau}).$$

Використовуючи результати, отримані в пункті 1, можна визначити замкнені підпростори Дельсарта $\mathcal{H}_{0(\tau)}$ і $\tilde{\mathcal{H}}_{0(\tau)} \subset \mathcal{H}_{(\tau)-}$, асоційовані з точним комплексом (3.28):

$$\begin{gathered}\mathcal{H}_{0(\tau)} := \Big\{\psi^{(0)}_{(\tau)}(\xi)\in\mathcal{H}^0_{\Lambda,-}(M_{\mathrm{T},\tau})\colon \mathrm{L}_{j(\tau)}\psi^{(0)}_{(\tau)}(\xi)=0,\\ \mathrm{B}_{(\tau)}\psi^{(0)}_{(\tau)}(\xi)=0,\ \psi^{(0)}_{(\tau)}(\xi)|_\Gamma=0,\ \psi^{(0)}_{(\tau)}(\xi)|_{t=0}=e^{\lambda\tau}\psi^{(0)}_\lambda(\eta)\in\mathcal{H}^0_{\Lambda,-}(M_{\mathbb{R}^m,\tau}),\\ \mathrm{L}_j(\lambda)\psi^{(0)}_\lambda(\eta)=0,\ \xi=(\lambda;\eta)\in\Sigma\colon=\mathbb{C}\times\Sigma^{(m)}_{\mathbb{C}}\Big\},\\ \tilde{\mathcal{H}}_{0(\tau)} := \Big\{\tilde\psi^{(0)}_{(\tau)}(\xi)\in\mathcal{H}^0_{\Lambda,-}(M_{\mathrm{T},\tau})\colon \tilde{\mathrm{L}}^{(0)}_{j(\tau)}\tilde\psi^{(0)}_{(\tau)}(\xi)=0,\\ \tilde{\mathrm{B}}_{(\tau)}\tilde\psi^{(0)}_{(\tau)}(\xi)=0,\ \tilde\psi^{(0)}_{(\tau)}(\xi)|_{\tilde\Gamma}=0,\ \tilde\psi^{(0)}_{(\tau)}(\xi)|_{t=0}=e^{\lambda\tau}\tilde\psi^{(0)}_\lambda(\eta)\in\mathcal{H}^0_{\Lambda,-}(M_{\mathbb{R}^m,\tau}),\\ \tilde{\mathrm{L}}_j(\lambda)\tilde\psi^{(0)}_\lambda(\eta)=0,\ \xi=(\lambda;\eta)\in\Sigma\colon=\mathbb{C}\times\Sigma^{(m)}_{\mathbb{C}}\Big\},\end{gathered} \tag{3.29}$$

де Γ і $\tilde\Gamma\subset M_{\mathrm{T},\tau}$ — деякі гладкі гіперпростори. Подібні вирази відповідають спряженим замкненим підпросторам $\mathcal{H}^*_{0(\tau)}$ і $\tilde{\mathcal{H}}^*_{0(\tau)}\subset\mathcal{H}^*_{\tau,-}$:

$$\begin{gathered}\tilde{\mathcal{H}}_{0(\tau)} := \Big\{\varphi^{(0)}_{(\tau)}(\xi) \in \mathcal{H}^0_{\Lambda,-}(M_{\mathrm{T},\tau})\colon \mathrm{L}^*_{j(\tau)}\varphi^{(0)}_{(\tau)}(\xi) = 0,\\ \mathrm{B}_{(\tau)}\varphi^{(0)}_{(\tau)}(\xi) = 0,\ \varphi^{(0)}_{(\tau)}(\xi)|_{\Gamma} = 0,\ \varphi^{(0)}_{(\tau)}(\xi)|_{t=0} = e^{-\bar{\lambda}\tau}\varphi^{(0)}_{\lambda}(\eta) \in \mathcal{H}^0_{\Lambda,-}(M_{\mathbb{R}^m,\tau}),\\ \mathrm{L}^*_j(\lambda)\varphi^{(0)}_{\lambda}(\eta) = 0,\ \xi = (\lambda;\eta) \in \Sigma : = \mathbb{C} \times \Sigma^{(m)}_{\mathbb{C}}\Big\},\\ \tilde{\mathcal{H}}_{0(\tau)} := \Big\{\tilde{\varphi}^{(0)}_{(\tau)}(\xi) \in \mathcal{H}^0_{\Lambda,-}(M_{\mathrm{T},\tau})\colon \tilde{\mathrm{L}}^*_{j(\tau)}\tilde{\varphi}^{(0)}_{(\tau)}(\xi) = 0,\\ \tilde{\mathrm{B}}^*_{(\tau)}\tilde{\varphi}^{(0)}_{(\tau)}(\xi) = 0,\ \tilde{\varphi}^{(0)}_{(\tau)}(\xi)|_{\tilde{\Gamma}} = 0,\ \tilde{\varphi}^{(0)}_{(\tau)}(\xi)|_{t=0} = e^{-\bar{\lambda}\tau}\tilde{\varphi}^{(0)}_{\lambda}(\eta) \in \mathcal{H}^0_{\Lambda,-}(M_{\mathbb{R}^m,\tau}),\\ \tilde{\mathrm{L}}^*_j(\lambda)\tilde{\varphi}^{(0)}_{\lambda}(\eta) = 0,\ \xi = (\lambda;\eta) \in \Sigma : = \mathbb{C} \times \Sigma^{(m)}_{\mathbb{C}}\Big\}.\end{gathered} \tag{3.30}$$

Враховуючи замкнені підпростори (3.30), (3.29), можна відповідно побудувати ядро типу Дарбу $\tilde{\Omega}_{(t,x;\tau)}(\eta,\xi) \in L^{(\rho)}_2(\Sigma^{(m)}_{\mathbb{C}};\mathbb{C}) \otimes L^{(\rho)}_2(\Sigma^{(m)}_{\mathbb{C}};\mathbb{C}),\ \eta,\xi \in \Sigma^{(m)}_{\mathbb{C}}$, і пізніше відповідні трансмутаційні відображення Дельсарта $\mathbf{\Omega}_{\pm} \in \mathcal{B}(H_{(\tau)})$. А саме, припустимо, що виконуються умови

$$\psi^{(0)}_{(\tau)}(\xi) := \tilde{\psi}^{(0)}_{(\tau)}(\xi) \cdot \tilde{\Omega}^{-1}_{(t,p;x;\tau)}\tilde{\Omega}_{(t_0,p_0,x_0;\tau)} \tag{3.31}$$

для будь-якого $\xi \in \mathbb{C}{\times}\Sigma^{(m)}_{\mathbb{C}}$, де

$$\tilde{\Omega}_{(t,x;\tau)}(\mu,\xi) := \int\limits_{\sigma_{(t;x;\tau)}} \tilde{\Omega}^{(2m+1)}_{(\tau)}[e^{-\bar{\lambda}\tau}\tilde{\varphi}^{(0)}(\mu), e^{\lambda\tau}\tilde{\psi}^{(0)}(\eta)\, dx \wedge dp \wedge dt],$$

$$\begin{gathered}\tilde{Z}^{(2m+1)}_{(\tau)}\left[e^{-\bar{\lambda}\tau}\tilde{\varphi}^{(0)}(\mu),\ \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda\tau}\tilde{\psi}^{(0)}(\xi_{(i)}) \wedge d\tau \wedge dx \overset{m}{\underset{j\neq i}{\wedge}} dp_j\right] :=\\ := d\tilde{\Omega}^{(2m)}_{(\tau)}\left[e^{-\bar{\lambda}\tau}\tilde{\varphi}^{(0)}(\mu),\ \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda\tau}\tilde{\psi}^{(0)}(\xi_{(i)}) \wedge d\tau \wedge dx \overset{m}{\underset{j\neq i}{\wedge}} dp_j\right],\end{gathered}$$

і, відповідно до (1.13), справджується співвідношення

$$\begin{gathered}\left\langle d^*_{\tilde{\mathcal{L}}}\tilde{\varphi}^{(0)}(\mu)e^{-\bar{\lambda}\tau},\ *\sum_{i=1}^{m} e^{\lambda\tau}\tilde{\psi}^{(0)}(\xi_{(i)})\, dt \wedge d\tau \wedge dx \overset{m}{\underset{j\neq i}{\wedge}} dp_j\right\rangle =\\ = \left\langle (*)^{-1}\tilde{\varphi}^{(0)}(\mu)e^{-\bar{\lambda}\tau},\ d_{\tilde{\mathcal{L}}}\left(\sum_{i=1}^{m} e^{\lambda\tau}\tilde{\psi}^{(0)}(\xi_{(i)})\, dt \wedge d\tau \wedge dx \overset{m}{\underset{j\neq i}{\wedge}} dp_j\right)\right\rangle +\\ +d\tilde{Z}^{(2m+1)}_{(\tau)}\left[\tilde{\varphi}^{(0)}(\mu)e^{-\bar{\lambda}\tau},\ \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda\tau}\tilde{\psi}^{(0)}(\xi_{(i)})\, dt \wedge d\tau \wedge dx \overset{m}{\underset{j\neq i}{\wedge}} dp_j\right],\end{gathered} \tag{3.32}$$

що визначає точну $(2m+1)$-форму $\tilde{Z}^{(2m+1)}_{(\tau)} \in \Lambda^{2m+1}(M_{\mathrm{T},\tau};\mathbb{C})$. Обчислимо тепер трансформовані за Дельсартом диференціальні вирази

$$\mathrm{L}_{j(\tau)} := \hat{\mathbf{\Omega}}^{-1}_{(\tau)\pm}\tilde{\mathrm{L}}_{j(\tau)}\hat{\mathbf{\Omega}}_{(\tau)\pm}, \qquad \mathrm{B}_{(\tau)} := \hat{\mathbf{\Omega}}^{-1}_{(\tau)\pm}\tilde{\mathrm{B}}_{(\tau)}\hat{\mathbf{\Omega}}_{(\tau)\pm} \tag{3.33}$$

для будь-якого $j = \overline{1, m}$, де, за визначенням,

$$\begin{gathered}\tilde{\mathrm{L}}_{j(\tau)} := \mathbf{1}\frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial x_j} + \bar{A}_j, \\ \mathrm{B}_{(\tau)} := \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{s=0}^{n(B)+q} \bar{B}_s \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^{n(B)-s}\end{gathered} \tag{3.34}$$

з усіма матрицями $\bar{A}_j \in \operatorname{End}\mathbb{C}^m$, $j = \overline{1, m}$, і $\bar{B}_s \in \operatorname{End}\mathbb{C}^m$, $s = \overline{0, n(B) + q}$, що є сталими. Це означає, зокрема, що справджуються комутаційні співвідношення

$$[\tilde{\mathrm{L}}_{j(\tau)}, \tilde{\mathrm{L}}_{i(\tau)}] = 0, \qquad [\tilde{\mathrm{L}}_{j(\tau)}, \tilde{\mathrm{B}}_{(\tau)}] = 0$$

для всіх $i, j = \overline{1, m}$. Завдяки виразам (3.33), справедливими є індуковані комутаційні співвідношення

$$[\mathrm{L}_{j(\tau)}, \mathrm{L}_{i(\tau)}] = 0, \qquad [\mathrm{L}_{j(\tau)}, \mathrm{B}_{(\tau)}] = 0,$$

що збігаються точно зі співвідношеннями (3.26). Більше того, редукуючи диференціальні вирази (3.33) на функціональні підпростори $\mathcal{H}_{(\lambda)} := e^{\lambda\tau}\mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, отримуємо множину афінних диференціальних виразів (3.22) та (3.25). Запишемо тепер відповідно зредуковані оператори трансмутації Дельсарта

$$\begin{gathered}\hat{\mathbf{\Omega}}_{\pm} = \mathbf{1} - \int\limits_{\Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)}} d\rho_{\Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)}}(\nu) \int\limits_{\Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)}} d\rho_{\Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)}}(\eta)\psi^{(0)}(\lambda;\nu)\tilde{\Omega}^{-1}_{(t_0,p_0;x_0)}(\lambda;\nu,\eta)\times \\ \times \int\limits_{S_{\pm}^{(2m+1)}(\sigma^{(2m)}_{(t,p;x)},\sigma^{(2m)}_{(tt_0,p_0;x_0)})} \tilde{Z}^{(2m+1)}\left[\tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda;\nu), (\cdot)\sum_{i=1}^{m} dt \wedge dx \overset{m}{\underset{j\neq i}{\wedge}} dp_j\right],\end{gathered} \tag{3.35}$$

де $\sigma^{(2m)}_{(t,p;x)}$ і $\sigma^{(2m)}_{(tt_0,p_0;x_0)} \in \mathcal{K}(M_{\mathrm{T}})$ — деякі $2m$-вимірні замкнені сингулярні симплекси і, за визначенням,

$$\begin{gathered}\tilde{Z}^{(2m+1)}\left[\tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda;\nu), \sum_{i=1}^{m}\tilde{\psi}^{(0)}(\lambda;\eta_{(i)})\, dt \wedge dx \overset{m}{\underset{j\neq i}{\wedge}} dp_j\right] := \\ := \tilde{Z}^{(2m+1)}_{(\tau)}\left[e^{-\bar{\lambda}\tau}\tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda;\nu), \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda\tau}\tilde{\psi}^{(0)}(\lambda;\eta_{(i)})d\tau \wedge dt \wedge dx \overset{m}{\underset{j\neq i}{\wedge}} dp_j\right]\Bigg|_{d\tau=0}, \\ d\tilde{\Omega}_{(t,p;x)}(\lambda;\nu,\eta) := \tilde{Z}^{(2m+1)}\left[\tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda;\nu), \sum_{i=1}^{m}\tilde{\psi}^{(0)}(\lambda;\eta_{(i)})\, dt \wedge dx \overset{m}{\underset{j\neq i}{\wedge}} dp_j\right],\end{gathered} \tag{3.36}$$

оскільки $(2m + 1)$-форма (3.36) завдяки (3.32) є теж точною для будь-яких $(\lambda;\nu,\eta) \in \mathbb{C} \times$ $\times\, (\Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)}\partial \times \Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)})$. Таким чином, операторний вираз (3.35), якщо його застосувати до оператора (3.34), редукованого на функціональний підпростір $\mathcal{H}_{(\lambda)} \simeq \mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, приводить до диференціальних виразів

$$\mathrm{L}_j(\lambda) := \hat{\mathbf{\Omega}}_{\pm}^{-1}\tilde{\mathrm{L}}_j(\lambda)\hat{\mathbf{\Omega}}_{\pm}, \qquad \mathrm{B}(\lambda) := \hat{\mathbf{\Omega}}_{\pm}^{-1}\tilde{\mathrm{B}}(\lambda)\hat{\mathbf{\Omega}}_{\pm},$$

де $\mathrm{L}_j(\lambda)\mathcal{H}_{(\lambda)} = \mathrm{L}_{j(\tau)}\mathcal{H}_{(\lambda)}$, $\mathrm{B}(\lambda)\mathcal{H}_{(\lambda)} = \mathrm{B}_{(\tau)}(\lambda)\mathcal{H}_{(\lambda)}$, $j = \overline{1,m}$, збігається з афінними диференціальними виразами (3.22) і (3.25). Стосовно застосування цих результатів для знаходження точних солітоноподібних розв'язків самоспряжених рівнянь Янга – Міллса (3.26) достатньо згадати, що співвідношення (3.31), редуковане на підпростір $\mathcal{H}_{(\lambda)} \simeq \mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, приводить до відображення

$$\psi^{(0)}(\lambda;\eta) := \tilde{\psi}^{(0)}(\lambda;\eta) \cdot \tilde{\Omega}^{-1}_{(t,p;x)}\tilde{\Omega}_{(t_0,p_0;x_0)}, \tag{3.37}$$

де ядра $\tilde{\Omega}_{(t,p;x;\tau)}(\lambda;\eta,\xi) \in L_2^{(\rho)}\big(\Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)};\mathbb{C}\big) \otimes L_2^{(\rho)}(\Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)};\mathbb{C})$, $\eta,\xi \in \Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)}$, для всіх $(t,p;x) \in M_{\mathrm{T}}$ і $\lambda \in \mathbb{C}$. Оскільки елемент $\psi^{(0)}(\lambda;\eta) \in \mathcal{H}_-$ для будь-яких $(\lambda;\xi) \in \mathbb{C}\times\Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)}$ задовольняє множину диференціальних рівнянь

$$L_i(\lambda)\psi^{(0)}(\lambda;\eta) = 0, \qquad B(\lambda)\psi^{(0)}(\lambda;\eta) = 0, \tag{3.38}$$

для всіх $i = \overline{1,m}$, з (3.37) і (3.38) знаходимо точні вирази для відповідних матриць A_j і $B_s \in C^1\big(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{m+1}; S\big(\mathbb{R}^m; \mathrm{End}\,\mathbb{C}^N\big)\big)$, $j = \overline{1,m}$, $s = \overline{0, n(B)+q}$, задовольняючи самоспряжені рівняння Янга – Міллса (3.26). Таким чином, справджується наступна теорема.

Теорема 3.1. *Інтегральні вирази* (3.35) *в* $\mathcal{H}$ *є операторами трансмутації Дельсарта, що відповідають афінним диференціальним виразам* (3.22), (3.26) *і константним операторам*

$$\tilde{\mathrm{L}}_i(\lambda) := \mathbf{1}\frac{\partial}{\partial p_i} - \lambda\frac{\partial}{\partial x_i} + \bar{A}, \qquad \tilde{\mathrm{B}}(\lambda) := \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{s=0}^{n(B)+q} \bar{B}_s\lambda^{n(B)-s} \tag{3.39}$$

для будь-яких $\lambda \in \mathbb{C}$. *Відображення* (3.37) *реалізує ізоморфізм між замкненими підпросторами*

$$\mathcal{H}_0 := \Big\{\psi^{(0)}(\lambda;\eta) \in \mathcal{H}_- : d_{\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)}\psi^{(0)}(\lambda;\eta) = 0,\ \psi^{(0)}(\lambda;\eta)\,\big|_{t=0} =$$
$$= \psi_\lambda^{(0)}(\eta) \in H_-,\ \psi^{(0)}(\lambda;\eta)\,\big|_{\Gamma} = 0,\ (\lambda;\eta) \in \mathbb{C}\times\Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)}\Big\}$$

і

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 := \Big\{\tilde{\psi}^{(0)}(\lambda;\eta) \in \mathcal{H}_- : d^{(0)}_{\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)}\tilde{\psi}(\lambda;\eta) = 0,\ \tilde{\psi}^{(0)}(\lambda;\eta)\,\big|_{t=0} =$$
$$= \tilde{\psi}_\lambda^{(0)}(\eta) \in H_-,\ \tilde{\psi}^{(0)}(\lambda;\eta)\,\big|_{\tilde{\Gamma}} = 0,\ (\lambda;\eta) \in \mathbb{C}\times\Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)}\Big\}$$

для будь-якого параметра $\lambda \in \mathbb{C}$. *Більше того, вирази* (3.37) *генерують стандартні перетворення типу Дарбу для множини операторів* (3.39) *і* (3.22), (3.25) *через відповідну множину лінійних рівнянь* (3.38), *таким чином продукуючи точні солітоноподібні розв'язки самоспряженого рівняння Янга – Міллса* (3.26).

Як простий частковий наслідок з теореми 3.1 можна одержати всі результати, отримані в [24], де відображення Дельсарта – Ліонса (3.37) було вибране *a priori* без будь-якого доведення і мотивації в формі деякого афінного калібрувального перетворення.

Результати, подібні до отриманих вище, можуть бути з невеликими змінами застосовані також до узагальненого диференціального комплексу де Рама – Ходжа (3.23) із зовнішнім диференціюванням (3.24), де

$$\begin{gathered}\mathrm{L}_i(\lambda) := \mathbf{1}\frac{\partial}{\partial p_i} - \left(\sum_{k=0}^{n_i(L)} a_{ik}\lambda^{k+1}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=0}^{n_i(L)} A_{ik}\lambda^k, \\ \tilde{\mathrm{B}}(\lambda) := \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{s=0}^{n(B)+q} \bar{B}_s\lambda^{n(B)-s},\end{gathered} \tag{3.40}$$

або

$$\begin{gathered}\mathrm{L}_i(\lambda) := \mathbf{1}\frac{\partial}{\partial p_i} - \left(\sum_{k=0}^{n_i(L)} a_{ik}^{(j)}\lambda^{k+1}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=0}^{n_i(L)} A_{ik}\lambda^k, \\ \tilde{\mathrm{B}}(\lambda) := \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{s=0}^{n(B)+q} \bar{B}_s\lambda^{n(B)-s}\end{gathered} \tag{3.41}$$

для $i = \overline{1,m}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Випадок (3.40) проаналізовано в [30] за допомогою відповідного афінного калібрувального перетворення, яке було використане в [24]. На жаль, отримані там результати є надто складними і ними важко оперувати, тому потрібно використовувати більш мотивовані математично, зрозумілі і менш громіздкі методи для знаходження перетворень Дельсарта – Ліонса і пов'язаних з ними точних солітоноподібних розв'язків.

4. Узагальнені комплекси де Рама – Ходжа, асоційовані класи Черна та застосування до інтегровних багатовимірних диференціальних систем на ріманових многовидах.

4.1. Узагальнена зв'язність, форма кривизни та інтегровність диференціальних систем. Ми розглядаємо гладкий скінченновимірний многовид Рімана M і два лінійних розшарування волокон на ньому: дотичне розшарування $T(M)$ і розшарування $E(M)$ разом із деяким дійсним скалярним добутком $\langle,\cdot,\cdot\rangle_E$ на їхніх волокнах E. Асоційовані векторні поля на M є гладкими перерізами $T(M)$ і $E(M)$. Можемо ввести [25, 27, 33, 65] на $E(M)$ зв'язність Γ за допомогою

$$d_{\mathrm{A}} : \mathcal{E}(M) \to \Lambda^1(M) \otimes \mathcal{E}(M), \tag{4.1}$$

яка задовольняє властивість

$$d_{\mathrm{A}}(f\alpha + \beta) := df \otimes \alpha + fd_{\mathrm{A}}\alpha + d_{\mathrm{A}}\beta$$

для будь-якої гладкої функції $f \in D(M)$ і $\alpha, \beta \in E(M)$. Нехай $\Lambda(M) := \oplus_{p=0}^{\dim M}\Lambda^p(M)$ визначає звичайну [1, 2, 25, 27, 65] алгебру Грассмана диференціальних форм на M. Якщо визначити асоційовані лінійні розшарування $\Lambda^p(M,E) := \Lambda^p(M) \otimes E(M)$ для $p = \overline{0,m}$, то відображення зв'язності (4.1) можна природно розширити на $\Lambda^p(M,E)$ таким чином:

$$d_{\mathrm{A}} : \Lambda^p(M,E) \to \Lambda^{p+1}(M,E), \tag{4.2}$$

причому задовольняється правило Лейбніца

$$d_{\mathrm{A}}\big(f^{(p)} \wedge \alpha^{(q)}\big) := df^{(p)} \wedge \alpha^{(q)} + (-1)^p f^{(p)} \wedge d_{\mathrm{A}}\alpha^{(q)}$$

для будь-яких $f^{(p)} \in \Lambda^p(M)$ і $\alpha^{(q)} \in \Lambda^q(M,E)$, $q,p = \overline{0,m}$.

Операція зв'язності (4.2) має цікаву і важливу властивість: композиція $d_{\mathrm{A}}^2 := d_{\mathrm{A}}d_{\mathrm{A}}$ є лінійною над гладким кільцем функцій $D(M)$:

$$d_{\mathrm{A}}^2\big(f\alpha^{(p)}+\beta^{(p)}\big)=fd_{\mathrm{A}}^2\alpha^{(p)}+d_{\mathrm{A}}^2\beta^{(p)},$$

де $f\in D(M)$ і $\alpha^{(p)},\beta^{(p)}\in\Lambda^p(M,E)$, $p=\overline{0,m}$, є довільними. Вихідне лінійне тензорне відображення $\Omega^{(2)}:=d_{\mathrm{A}}^2:E(M)\to\Lambda^2(M,E)$ називається *тензором кривизни* і має багато застосувань у геометричному аналізі інтегровних багатовимірних диференціальних систем на M. Ідеали типу Громова [23] генеруються інтегровними ідеалами Картана [7, 11, 25, 56, 63] $I(\alpha)\subset\Lambda(M,\operatorname{End}E):=\Lambda(M)\otimes\operatorname{End}E(M)$ на M. Можна побудувати гладке вкладення інтегрального підмноговиду $i_\alpha: M_\alpha\to M$ для ідеалу $I(\alpha)\subset\Lambda(M,\operatorname{End}E)$, яке задовольняє таку умову: 2-форма кривизни $\Omega^{(2)}\in\Lambda^2(M,E)$, редукована на M_α, анулюється, тобто $i_\alpha^*\Omega^{(2)}=0$. З цього також випливає, що асоційований редукований коланцюг

$$E\to\Lambda^0(M_\alpha,E)\overset{d_\alpha}{\to}\Lambda^1(M_\alpha,E)\overset{d_\alpha}{\to}\ldots\overset{d_\alpha}{\to}\Lambda^{m_\alpha}(M_\alpha,E)\overset{d_\alpha}{\to}0 \tag{4.3}$$

є комплексом де Рама, тобто $d_\alpha^2=0$, де $d_\alpha:=i_\alpha^*d_{\mathrm{A}}$ і $m_\alpha:=\dim M_\alpha$. Оскільки підмноговид $M_\alpha\subset M$ також має індуковану структуру Рімана $g_\alpha: T(M_\alpha)\times T(M_\alpha)\to\mathbb{R}$, можна побудувати з (4.3) відповідний узагальнений комплекс де Рама – Ходжа просторів Гільберта $H_\Lambda^p(M_\alpha)$, $p=\overline{0,m_\alpha}$, властивості яких, як показано в [10, 25, 50, 53], дозволяють описати так звані оператори трансмутації Дельсарта – Ліонса типу Вольтерра. Це допоможе побудувати інтегровні багатовимірні диференціальні системи на многовидах Рімана і знайти їхні спеціальні типи точних розв'язків.

З іншого боку, можна розглянути узагальнений ланцюг модулів над M

$$E\to\Lambda^0(M,E)\overset{d_{\mathrm{A}}}{\to}\Lambda^1(M,E)\overset{d_{\mathrm{A}}}{\to}\ldots\overset{d_{\mathrm{A}}}{\to}\Lambda^m(M,E)\to0, \tag{4.4}$$

який не є комплексом де Рама – Ходжа, але визначає [6, 33, 35, 65] такий важливий об'єкт, як характеристичні класи і символи Черна. Їхні властивості і асоційовані геометричні аспекти задачі інтегровності багатовимірних диференціальних систем типу Громова [23] розглянуто в наступному підпункті.

4.2. Класи Черна і асоційовані диференціальні інваріанти. Відображення зв'язності (4.2) на M можна записати локально на відкритому околі $U\subset M$ за допомогою виразу

$$d_{\mathrm{A}}\,|_U=d+A^{(1)}, \tag{4.5}$$

де $A^{(1)}\in\Lambda(U,\operatorname{End}E)$ — відповідно визначені $\operatorname{End}E(U)$-значні диференціальні 1-форми на $U\subset M$. У локальних координатах точки $u\in U$ можна записати

$$A^{(1)}:=\sum_{i=1}^m A_i(u)\,du^i,$$

де $A_i(u)\in\operatorname{End}E(U)$, $i=\overline{1,m}$. Використовуючи вираз (4.5), отримуємо локальний вираз для 2-форми кривизни $\Omega^{(2)}|_U\in\Lambda^2(U)\otimes\operatorname{End}E(U)$:

$$\Omega^{(2)}\,\big|_U=dA^{(1)}+A^{(1)}\wedge A^{(1)}. \tag{4.6}$$

Вираз (4.6) є зручним для локального визначення когомологій характеристичних класів Черна, пов'язаних з комплексом (4.4):

$$\mathrm{ch}_j(\mathrm{A})\,|_U:=\mathrm{tr}\big(\Omega^{(2)}\,|_U\big)^j\in\Lambda^{2j}(U), \tag{4.7}$$

де $j \in \mathbb{Z}_+$. Завдяки властивості лінійності векторного розшарування $E(M)$ вираз (4.7) можна інваріантно розширити на весь многовид M як коректно визначені диференціальні форми на M, таким чином визначаючи класи Черна

$$\mathrm{ch}_j(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\Omega^{(2)})^j \in \Lambda^{2j}(M) \tag{4.8}$$

для $j \in \mathbb{Z}_+$ на M. Для подальших застосувань потрібні такі леми.

Лема 4.1. *Усі диференціальні 2-форми* $\mathrm{ch}_j(A) \in \Lambda^{2j}(M)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, *є замкненими, тобто*

$$d\,\mathrm{ch}_j(\mathrm{A}) = 0. \tag{4.9}$$

Доведення проводиться підстановкою локального виразу (4.6) у (4.8) і перевіркою (4.9).

Як наслідок леми можна зауважити, що включення

$$\big[\mathrm{ch}_j(\mathrm{A})\big] \in H^{2j}(M,\mathbb{R})$$

справедливі на M для всіх $j \in \mathbb{Z}_+$.

Лема 4.2. *Класи когомологій де Рама* $\big[\mathrm{ch}_j(A)\big] \in H^{2j}(M,\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}_+$, *не залежать від вибору відображення зв'язності*

$$d_{\mathrm{A}} : \Lambda(M,E) \to \Lambda(M,E)$$

або від вибору ермітової метрики на E.

Доведення. Стандартна конструкція гомотопного циліндра [33, 64, 65], застосована до двох різних зв'язностей, доводить першу частину твердження леми. Такі самі гомотопні аргументи доводять незалежність від метрики.

Як результат цієї леми можна визначити для кожного ермітового розшарування $E(M)$ над M множину відповідних характеристичних класів Черна

$$\mathrm{ch}_j(E,M) := \big[\mathrm{ch}_j(\mathrm{A})\big]$$

для $j \in \mathbb{Z}_+$, за допомогою яких символ Черна $\mathrm{ch}(E,M)$ цього лінійного розшарування $E(M)$ визначається як

$$\mathrm{ch}(E,M) := \oplus_{j\in\mathbb{Z}_+}(j!)^{-1}\mathrm{ch}_j(E,M) = \big[\mathrm{tr}\exp\big(\Omega^{(2)}\big)\big].$$

Символ Черна, як відомо [6, 33, 65], має багато застосувань у сучасній диференціальній топології і математичній фізиці.

Стосовно застосування до сильно інтегровних багатовимірних диференціальних систем на многовидах Рімана розглянемо геометричну картину Картана, розвинену в [7, 8, 11, 25, 56, 63]. В цьому підході нелінійну багатовимірну диференціальну систему $\hat{\alpha}$ записано у вигляді інтегровного ідеалу Картана $I(\alpha) \subset \Lambda(M, \mathrm{End}\,E)$ з коефіцієнтами з $\mathrm{End}\,E(M)$, де $E(M)$ — спеціально вибране ермітове лінійне розшарування над відповідно вибраним багатовимірним многовидом M. Відповідний інтегральний підмноговид $M_\alpha \subset M$ ідеалу $I(\alpha)$ в загальному випадку є локально еквівалентним множині незалежних змінних інтегровної нелінійної диференціальної системи.

Зауважимо, що ми називаємо розглядувану багатовимірну диференціальну систему сильно інтегровною, якщо вона дозволяє відповідну зв'язність Γ_λ, параметрично залежну від $\lambda \in \in \mathbb{R}$, 2-форма кривизни якої $\Omega_\lambda^{(2)} \in \Lambda^2(M, \operatorname{End} E)$ анулюється на інтегральному підмноговиді $M_\alpha \subset M$ ідеалу $I(\alpha) \subset \Lambda(M, \operatorname{End} E)$. Остання умова, очевидно, еквівалентна включенню

$$\Omega_\lambda^{(2)} \in I(\alpha) \tag{4.10}$$

для всіх допустимих значень $\lambda \in \mathbb{R}$. Якщо зв'язність Γ тривіально залежить від параметра $\lambda \in \mathbb{R}$, то багатовимірна диференціальна система називається інтегровною.

З іншого боку, умова (4.10) використовується [25, 56] для знаходження відповідного відображення зв'язності (4.2), якщо воно існує. Вихідний алгоритм пошуку сильно залежить [7, 25, 56] від властивостей гомологічної групи зв'язності Γ_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, на головному розшаруванні $P(M, G)$, природно асоційованому з розшаруванням $E(M)$, де G називається структурною групою зв'язності Γ_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$. Щодо деталей алгоритму див. [7, 25, 56].

Умова (4.10) є надто важливою на підставі леми 4.2. Дійсно, оскільки співвідношення (4.9) є справедливим, якщо $H^{2j}(M, \mathbb{R}) = 0$, $j \in Z_+$, безпосередньо знаходимо

$$\operatorname{ch}_j(\mathrm{A}) := d\chi_j(\mathrm{A})$$

для деяких відповідно визначених глобально диференціальних $(2j{-}1)$-форм $\chi_j(A) \in \Lambda^{2j-1}(M)$, $j \in Z_+$, на M. Більше того, оскільки всі степені $(\Omega^{(2)})^j$ належать $I(\alpha)$ для $j \in \mathbb{Z}_+$, з умови $i_\alpha^* I(\alpha) = 0$, де $i_\alpha : M_\alpha \to M$ — відображення вкладення інтегрального підмноговиду, отримуємо, що $i_\alpha^* \operatorname{ch}_j(A) = 0$, або, еквівалентно,

$$d\chi_j(\mathrm{A}) = 0 \tag{4.11}$$

для всіх $j \in \mathbb{Z}_+$. Це приводить до нових диференціальних інваріантів типу Черна на M_α. Можна сформулювати отриманий результат таким чином.

Теорема 4.1. *Якщо інтегровна багатовимірна нелінійна диференціальна система $\hat{\alpha}$ еквівалентна інтегровному ідеалу Картана $I(\alpha) \subset \Lambda(M, \operatorname{End} E)$ на многовиді Рімана M і задовольняє умови $H^{2j}(M, \mathbb{R}) = 0$, $j \in \mathbb{Z}_+$, то вона має множину диференціальних інваріантів Картана* (4.11) *на інтегральному підмноговиді $M_\alpha \subset M$ ідеалу $I(\alpha)$. Якщо ці інваріанти є нетривіальними, то вони описують, зокрема, відповідно асоційований простір модулів лінійного розшарування $E(M)$.*

Варто зазначити, що більшість диференціальних інваріантів (4.11) редукуються до нуля при великих індексах $j \in \mathbb{Z}_+$. Фактично всі диференціальні інваріанти $\chi_j(A)$ для $j \geq \geq [\dim M_\alpha/2] + 1$ є нулями. Зокрема, для випадку багатовимірних інтегровних нелінійних диференціальних систем, для яких $\dim M_\alpha = 2$ або 3, повинен існувати хоча б один диференціальний інваріант. Більше того, якщо для таких диференціальних систем відповідні структурні групи мають алгебри Лі без сліду, то не існує інваріантів на M_α.

Цей результат досить повчальний для математичної теорії геометрично інтегровних багатовимірних нелінійних диференціальних систем, які мають відповідні відображення зв'язності (4.2) на $\Lambda(M, E)$ з додатковими умовами когомології $H^{2j}(M, \mathbb{R}) = 0$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Зокрема, для існування цих відображень зв'язності на $\Lambda(M, E)$ в багатовимірному випадку $\dim M_\alpha \geq 4$, нетривіальні диференціальні інваріанти можуть існувати. Це приводить до певних топологічних перешкод, які потрібно розглянути. Дійсно, нетривіальний диференціальний інваріант обумовлює нетривіальні топологічні обмеження $H^s(M,\mathbb{R}) \neq 0$ для деяких $s \in \mathbb{Z}_+$, що суперечить когомологічній умові анулювання при цих значеннях $s \in \mathbb{Z}_+$, описаній вище. Якщо $H^{2s}(M,\mathbb{R}) \neq 0$ для деяких $s \in \mathbb{Z}_+$, то пов'язані характеристичні класи Черна $\mathrm{ch}_s(E,M)$ для цих $s \in \mathbb{Z}_+$ є, в загальному, сильно нетривіальними і завдяки лемі Пуанкаре визначають диференціальні $(2s-1)$-форми $\chi_s(A) \in \Lambda^{2s-1}_{\mathrm{loc}}(M)$ тільки локально. Ці локальні диференціальні форми, редуковані на інтегральний підмноговид $M_\alpha \subset M$, генерують множину диференціальних багатозначних квазіінваріантів $\chi_s(A) \in \Lambda^{2s-1}_{\mathrm{loc}}(M_\alpha)$, де $d\chi_s(A) = 0$, існування яких може означати, зокрема, що нелінійні диференціальні системи є в деякому сенсі некоректно заданими. Зауважимо, що ці асоційовані структури нелінійних диференціальних систем також вивчалися за допомогою відповідних комплексів де Рама – Ходжа (4.3).

5. Висновки. Отримані результати присвячено розвитку узагальненої теорії де Рама – Ходжа спеціальних диференціальних комплексів, яка приводить до ефективних аналітичних виразів для відповідних операторів трансмутації типу Вольтерра в заданому просторі Гільберта $\mathcal{H}$. Зокрема, показано, що їх можна ефективно застосувати до вивчення інтегральної операторної структури операторів трансмутації Дельсарта для поліноміальних в'язок диференціальних операторів в $\mathcal{H}$, яка має багато застосувань в спектральній теорії таких операторних в'язок і в теорії солітонів [39, 44, 45, 47, 56] багатовимірних інтегровних динамічних систем на функціональних многовидах.

Якщо розглядають спектральний диференціальний оператор $\mathcal{L}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, то вважають, що його спектр є відомим. За допомогою загальної форми операторів трансформації Дельсарта можна побудувати інший трансформований, більш складніший диференціальний оператор $\tilde{\mathrm{L}} = \hat{\mathbf{\Omega}}_\pm \mathrm{L}\, \hat{\mathbf{\Omega}}_\pm^{-1}$ в $\mathcal{H}$ з іншим спектром. Такі трансформовані оператори можна ефективно використовувати для вивчення спектральних властивостей диференціальних операторів [15 – 17, 41, 42, 44, 45] і конструювати широкий клас нетривіальних диференціальних операторів із вже заданим спектром, як це зроблено в [34, 36] для одного виміру. Ці трансформовані за Дельсартом оператори також корисні для вивчення узагальнених спектральних властивостей диференціальних операторів і операторних в'язок у багатьох вимірах.

Як показано в [17, 40 – 42, 44, 45] для двовимірного оператора Дірака і тривимірного збуреного оператора Лапласа, ядра відповідних операторів трансмутації Дельсарта задовольняють деякі спеціальні лінійні інтегральні рівняння типу Фредгольма (рівняння Гельфанда – Левітана – Марченка), які є важливими для розв'язання відповідної оберненої спектральної задачі та інших задач математичної фізики. Такі рівняння можна легко конструювати також для багатьох вимірів, що дає можливість сформулювати відповідну обернену спектральну задачу для опису широкого класу багатовимірних операторів із вже заданими спектральними характеристиками. Також можна використовувати такі результати для вивчення так званих повністю інтегровних нелінійних еволюційних рівнянь, особливо для побудови за допомогою спеціальних перетворень типу Дарбу [34] їхніх точних розв'язків.

Також проаналізовано диференціально-геометричні аспекти узагальнених комплексів де Рама – Ходжа, природно пов'язані з інтегровними багатовимірними диференціальними системами типу Громова. Показано важливість характеристичних класів Черна для вивчення диференціальних систем. Побудовано спеціальні диференціальні інваріанти типу Черна і розглянуто їх важливість і застосування до аналізу інтегровності багатовимірних нелінійних диференціальних систем на многовидах Рімана.

Автори вдячні колегам з Інституту математики НАН України, механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Т. Шевченка та механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені І. Франка за корисні обговорення теорії операторів трансмутації Дельсарта. Особливо хочемо відзначити плідні дискусії і корисні поради та зауваження, надані професором Л. П. Нижником та доцентом Я. В. Микитюком під час підготовки рукопису до публікації.

Література

1. *Abraham R., Marsden J.* Foundations of mechanics. – New York: Cummings, 1978. – 806 p.
2. *Arnold V. I.* Mathematical methods of classical mechanics. – New York: Springer, 1978. – 472 p.
3. *Berezansky Yu.* Expansion in eigenfunction of self-adjoint operators. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1968.
4. *Berezin F. A., Shubin M. A.* Schrödinger equation // Math. and Its Appl. – Netherlands: Springer, 1991. – **66**.
5. *Bukhgeim A. L.* Volterra equations and inverse problems. – Moscow: Nauka, 1983 (in Russian).
6. *Donaldson S.* An application of gauge theory to four dimensional topology // J. Different. Geom. – 1983. – **18**. – P. 279 – 315.
7. *Blackmore D. L., Prykarpatsky Ya. A., Samulyak R. V.* The integrability of Lie-invariant geometric objects generated by ideals in Grassmann algebras // J. Nonlinear Math. Phys. – 1998. – **5**. – P. 54 – 67.
8. *Blackmore D., Prykarpatsky A. K., Samoylenko V. Hr.* Nonlinear dynamical systems of mathematical physics: spectral and differential-geometrical integrability analysis. – New Jersey: World Sci. Publ., 2011.
9. *Blackmore D., Prykarpatsky A. K., Zagrodzinski J.* Lax-type flows on Grassmann manifolds and dual momentum mappings // Rep. Math. Phys. – 1997. – **40**, № 3. – P. 539 – 549.
10. *Bogoliubov N. N., Prykarpatsky Ya. A., Samoilenko A. M., Prykarpatsky A. K.* A generalized de Rham – Hodge theory of multidimensional Delsarte transformations of differential operators and its applications for nonlinear dynamic systems // Phys. Particles and Nuclei. – 2005. – **36**, № 1. – P. 110 – 121.
11. *Cartan E.* Lecons sur invariants integraux. – Paris: Hermann, 1971. – 260 p.
12. *Chern S. S.* Complex manifolds. – Chicago Univ. Publ., 1956.
13. *Danford N., Schwartz J. T.* Linear operators. – New York: InterSci. Publ., 1963. – Vol. 2.
14. *Datta B. N., Sarkissian D. R.* Feedback control in distributed parameter gyroscopic systems: a solution of the partial eigenvalue assignment problem // Mech. Syst. and Sign. Proces. – 2002. – **16**, № 1. – P. 3 – 17.
15. *Delsarte J.* Sur certaines transformations fonctionelles relative aux equations lineaires aux derives partielles du second ordre // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1938. – **206**. – P. 178 – 182.
16. *Delsarte J., Lions J.* Transmutations d'operateurs differentielles dans le domain complex // Comment. Math. Helv. – 1957. – **52**. – P. 113 – 128.
17. *Faddeev L. D.* Inverse problem in quantum scattering theory // J. Soviet Math. – 1976. – **5**, № 3.
18. *Faddeev L., Takhtadjyan L.* Hamiltonian methods in the theory of solitons // Theor., Math. and Comput. Phys. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.
19. *Gelfand I. M., Shilov G. E.* Generalized functions. Vol. 2: Spaces of fundamental and generalized functions. – Amer. Math. Soc., 2016.
20. *Godbillon C.* Geometrie differentielle et mechanique analytique. – Paris: Hermann, 1969.
21. *Gokhberg I. C., Krein M. G.* Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space // Transl. Math. Monogr. – Amer. Math. Soc., 2004.
22. *Golenia J., Prykarpatsky Y. A., Samoilenko A. M., Prykarpatsky A. K.* The general differential-geometric structure of multidimensional Delsarte transmutation operators in parametric functional spaces and their applications in soliton theory. Pt 2 // Opuscula Math. – 2004. – № 24.
23. *Gromov M.* Partial differential relations. – New York: Springer, 1986. – 536 p.
24. *Gu C. H.* Generalized self-dual Yahg – Mills flows, explicit solutions and reductions // Acta Appl. Math. – 1995. – **39**. – P. 349 – 360.
25. *Hentosh O. Ye., Prytula M. M., Prykarpatsky A. K.* Differential-geometric integrability fundamentals of nonlinear dynamical systems on functional manifolds. – Lviv: Lviv. Univ. Publ., 2006. – 408 p.
26. *Hruslov E. J.* Asymptotics of the solution of the Cauchy problem for the KdV equation with step-like initial data // Math. USSR-Sb. – 1976. – **28**. – P. 229 – 248.
27. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry. – New York: John Wiley and Sons, 1963. – Vol. 1. – 344 p.; 1969. – Vol. 2. – 357 p.

28. *Konopelchenko B. G.* On the integrable equations and degenerate dispersion laws in multidimensional spaces // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1983. – **16**. – P. L311 – L316.
29. *Levi D., Pilloni L., Santini P. M.* Backlund transformations for nonlinear evolution equations in $(2+1)$-dimensions // Phys. Lett. A. – 1981. – **81**, № 8. – P. 419 – 423.
30. *Liu Wen.* Darboux transformations for a Lax integrable systems in $2n$-dimensions // arXive:solve-int/9605002 v1 15 may 1996
31. *Lopatynski Y. B.* On harmonic fields on Riemannian manifolds // Ukr. Math. J. – 1950. – **2**, № 1. – P. 56 – 60 (in Russian).
32. *Лопатинский Я. Г.* Введение в современную теорию дифференциальных уравнений в частных производных. – Киев: Наук. думка, 1980.
33. *Moore J. D.* Lectures on Seiberg – Witten invariants. – Second ed. – Springer, 2001. – 160 p.
34. *Matveev V. B., Salle M. I.* Darboux – Backlund transformations and applications. – New York: Springer, 1993.
35. *Mishchenko A. S., Fomenko A. T.* Introduction to differential geometry and topology. – Moscow Univ. Publ., 1983. – 439 p.
36. *Marchenko V. A.* Sturm – Liouville operator and applications. – Basel: Birkhäuser, 1986.
37. *Mykytiuk Ya. V.* Factorization of Fredholmian operators // Math. Stud. Proc. Lviv Math. Soc. – 2003. – **20**, № 2. – P. 185 – 199 (in Ukrainian).
38. *Mykytiuk Ya. V.* Factorization of Fredholmian operators in operator algebras // Math. Stud. Proc. Lviv Math. Soc. – 2004. – **21**, № 1. – P. 87 – 97 (in Ukrainian).
39. *Newell A. C.* Solitons in mathematics and physics. – Arisona: SIAM Publ., 1985.
40. *Newton R. G.* Inverse Schrödinger scattering in three dimensions. – Berlin etc.: Springer, 1989.
41. *Нижник Л. П.* Интегрирование нелинейных многомерных уравнений методом обратной задачи // Докл. АН СССР. – 1980. – **254**, № 2. – С. 332 – 335.
42. *Нижник Л. П.* Обратная задача рассеяния для гиперболических уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991.
43. *Nizhnik L. P., Pochynaiko M. D.* Integration of the nonlinear two-dimensional spatial Schrödinger equation by the inverse-problem method // Funct. Anal. and Appl. – 1982. – **16**, № 1. – P. 66 – 69.
44. *Nizhnik L. P.* The inverse scattering problems for the hyperbolic equations and their applications to non-linear integrable equations // Rep. Math. Phys. – 1988. – **26**, № 2. – P. 261 – 283.
45. *Nizhnik L. P.* Inverse scattering problem for the wave equation and its application // Parameter Identification and Inverse Problems in Hydrology, Geology and Ecology. – 1996. – P. 233 – 238.
46. *Nimmo J. C. C.* Darboux transformations from reductions of the KP-hierarchy. – 2002. – 11 p. – (Preprint / Univ. Glasgow).
47. *Novikov S. P., Manakov S. V., Pitaevskii L. P., Zakharov V. E.* Theory of solitons. The inverse scattering method. – Springer, 1984.
48. *Pochynaiko M. D., Sydorenko Yu. M.* Integrating some (2 + 1)-dimensional integrable systems by methods of inverse scattering problem and binary Darboux transformations // Mat. Stud. – 2003. – № 20. – P. 119 – 132.
49. *Prykarpatsky A., Blackmore D.* Versal deformations of a Dirac type differential operator // J. Nonlinear Math. Phys. – 1999. – **6**, № 3. – P. 246 – 254.
50. *Prykarpatsky Y. A., Samoilenko A. M., Prykarpatsky A. K.* The multi-dimensional Delsarte transmutation operators, their differential-geometric structure and applications. Pt 1 // Opuscula Math. – 2003. – **23**. – P. 71 – 80.
51. *Samoilenko A. M., Prykarpatsky Y. A., Samoylenko V. G.* Structure of binary transformations of Darboux type and their application to soliton theory // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, № 12. – P. 2041 – 2059.
52. *Самойленко А. М., Прикарпатський Я. А., Блекмор Д., Прикарпатський А. К.* Теорія багатовимірних операторів трансмутації Дельсарта – Ліонса. I // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 12. – С. 1660 – 1695.
53. *Samoilenko A. M., Prykarpatsky Ya. A., Prykarpatsky A. K.* The spectral and differential geometric aspects of a generalized De Rham – Hodge theory related with Delsarte transmutation operators in multidimension and its applications to spectral and soliton problems // Nonlinear Anal. – 2006. – **65**. – P. 395 – 432.
54. *Самойленко А. М., Прикарпатський Я. А.* Алгебро-аналітичні аспекти цілком інтегровних динамічних систем та їх збурень. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – **41**.
55. *Prykarpatsky Y. A., Samoilenko A. M., Prykarpatsky A. K., Samoylenko V. Hr.* The Delsarte – Darboux type binary transformations and their differential-geometric and operator structure // arXiv: math-ph/0403055 v 1 29 Mar 2004

56. *Prykarpatsky A. K., Mykytiuk I. V.* Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds: classical and quantum aspects. – Netherlands: Kluwer Acad. Publ., 1998.
57. *De Rham G.* Varietes differentielles. – Paris: Hermann, 1955.
58. *De Rham G.* Sur la theorie des formes differentielles harmoniques // Ann. Univ. Grenoble. – 1946. – **22**. – P. 135 – 152.
59. *Skrypnik I. V.* Periods of A-closed forms // Proc. USSR Acad. Sci. – 1965. – **160**, № 4. – P. 772 – 773.
60. *Skrypnik I. V.* A harmonique fields with peculiarities // Ukr. Math. J. – 1965. – **17**, № 4. – P. 130 – 133.
61. *Skrypnik I. V.* The generalized De Rham theorem // Proc. UkrSSR Acad. Sci. – 1965. – № 1. – P. 18 – 19.
62. *Skrypnik I. V.* A harmonic forms on a compact Riemannian space // Proc. UkrSSR Acad. Sci. – 1965. – № 2. – P. 174 – 175.
63. *Sternberg S.* Lectures on differential geometry. – Prentice Hall, USA, 1956. – 410 p.
64. *Teleman R.* Elemente de topologie si varietati diferentiabile. – Bucuresti Publ., 1964.
65. *Warner F.* Foundations of differential manifolds and Lie groups. – New York: Acad. Press, 1971.
66. *Zakharov V. E., Shabat A. B.* A scheme of integration of nonlinear equations of mathematical physics via the inverse scattering problem. I // Funct. Anal. and Appl. – 1974. – **8**, № 3. – P. 226 – 235; 1979. – **13**, № 3. – P. 166 – 174.
67. *Zakharov V. E.* Integrable systems in multidimensional spaces // Lect. Notes Phys. – 1982. – **153**. – P. 190 – 216.
68. *Zakharov V. E., Manakov S. V.* On a generalization of the inverse scattering problem // Theor. and Math. Phys. – 1976. – **27**, № 3. – P. 283 – 287.

Одержано 04.11.18