УДК 517.5

В. А. Кофанов (Днепр. нац. ун-т)

ЗАДАЧА БОЯНОВА – НАЙДЕНОВА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НА ОСИ И НЕРАВЕНСТВА РАЗНЫХ МЕТРИК

For given $r \in \mathbf{N},\ p, \lambda > 0$ and any fixed interval $[a, b] \subset \mathbf{R}$ we solve the extremal problem

$$\int_a^b |x(t)|^q dt \to \sup, \quad q \geq p,$$

on a set of functions $x \in L_\infty^r$ such that

$$\|x^{(r)}\|_\infty \leq 1, \quad \|x\|_{p,\delta} \leq \|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\delta}, \quad \delta \in (0, \pi/\lambda],$$

where

$$\|x\|_{p,\delta} := \sup\{\|x\|_{L_p[a,\,b]} : a,\, b \in \mathbf{R},\ 0 < b - a \leq \delta\}$$

and $\varphi_{\lambda,r}$ is the $(2\pi/\lambda)$-periodic Euler spline of order r. In particular, we solve the same problem for the intermediate derivatives $x^{(k)},\ k = 1, \ldots, r-1$, with $q \geq 1$. In addition, we prove the inequalities of various metrics for the quantities $\|x\|_{p,\delta}$.

Для заданих $r \in \mathbf{N},\ p, \lambda > 0$ і довільного фіксованого відрізка $[a, b] \subset \mathbf{R}$ розв'язано екстремальну задачу

$$\int_a^b |x(t)|^q dt \to \sup, \quad q \geq p,$$

на деякій підмножині функцій $x \in L_\infty^r$ таких, що

$$\|x^{(r)}\|_\infty \leq 1, \quad \|x\|_{p,\delta} \leq \|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\delta}, \quad \delta \in (0, \pi/\lambda],$$

де

$$\|x\|_{p,\delta} := \sup\{\|x\|_{L_p[a,\,b]} : a,\, b \in \mathbf{R},\ 0 < b - a \leq \delta\},$$

а $\varphi_{\lambda,r}$ — $(2\pi/\lambda)$-періодичний сплайн Ейлера порядку r. Як наслідок розв'язано ту ж саму екстремальну задачу для проміжних похідних $x^{(k)},\ k = 1, \ldots, r-1$, при $q \geq 1$.

Крім того, доведено нерівності різних метрик для величин $\|x\|_{p,\delta}$.

1. Введение. Пусть $G = \mathbf{R}$, $G = [a, b]$ или $G = I_{2\pi}$ — отрезок $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами. Будем рассматривать пространства $L_p(G)$, $0 < p \leq \infty$, всех измеримых функций $x : G \to \mathbf{R}$, для которых величина $\|x\|_{L_p(G)}$ конечна, где

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_G |x\,(t)|^p\, dt \right)^{1/p}, & \text{если} \quad 0 < p < \infty, \\ \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in G} |x\,(t)|\,, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Для $r \in \mathbf{N}$ и $p, s \in (0, \infty]$ через $L_{p,s}^r$ обозначим пространство всех функций $x \in L_p(\mathbf{R})$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка, причем $x^{(r)} \in \in L_s(\mathbf{R})$. Будем писать $\|x\|_p$ вместо $\|x\|_{L_p(\mathbf{R})}$ и L_∞^r вместо $L_{\infty,\infty}^r$.

Известно (см., например, [1, с. 47]), что задача нахождения точной константы C в неравенстве типа Колмогорова – Надя

$$\|x^{(k)}\|_q \le C\,\|x\|_p^{\alpha}\left\|x^{(r)}\right\|_s^{1-\alpha} \tag{1.1}$$

на классе функций $x \in L^r_{p,s}$, где $\alpha = \dfrac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s}$, а параметры $q,p,s \ge 1,\ r \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}_0 := \mathbf{N}\bigcup\{0\},\ k < r$, удовлетворяют условию $\alpha \le (r-k)/r$, равносильна экстремальной задаче

$$\|x^{(k)}\|_q \to \sup \tag{1.2}$$

на классе функций $x \in L^r_{p,s}$, удовлетворяющих ограничениям

$$\|x^{(r)}\|_s \le A_r, \quad \|x\|_p \le A_0, \tag{1.3}$$

где $A_0,\ A_r$ — заданные положительные числа.

Несмотря на большое количество работ по этой тематике точная константа C в неравенстве (1.1) известна для всех $r \in \mathbf{N}$ и всех $k < r$ лишь в немногих случаях. Подробную библиографию можно найти в работах [1 – 3]. Поэтому представляет интерес модификация задачи (1.2) с ограничениями (1.3), рассмотренная Б. Бояновым и Н. Найденовым [4]. Для произвольного отрезка $[a,b] \subset \mathbf{R}$ ими решена проблема

$$\int\limits_a^b \Phi(|x^{(k)}(t)|)dt \to \sup, \quad k = 1,\ldots,r-1,$$

на классе функций $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющих условиям (1.3) с $p = s = \infty$, где Φ — непрерывно дифференцируемая функция на $[0,\infty)$, положительная на $(0,\infty)$ и такая, что $\Phi(t)/t$ не убывает и $\Phi(0) = 0$. Важнейший пример такой функции дается равенством $\Phi(t) = t^p,\ p \ge 1$.

Обозначим через W класс непрерывных, неотрицательных и выпуклых функций Φ, определенных на $[0,\infty)$, таких, что $\Phi(0) = 0$. Для $p > 0$ положим [5]

$$L(x)_p := \sup\left\{\|x\|_{L_p[a,\,b]} : a,b \in \mathbf{R},\ |x(t)| > 0,\ t \in (a,b)\right\}. \tag{1.4}$$

Отметим, что $L(x)_\infty = \|x\|_\infty$ и $L(x')_1 \le 2\|x\|_\infty$.

В работе [6] решена следующая модификация задачи Боянова и Найденова:

$$\int\limits_a^b \Phi(|x(t)|^p)dt \to \sup, \quad \Phi \in W, \quad p > 0, \tag{1.5}$$

на классе функций $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющих ограничениям

$$\|x^{(r)}\|_\infty \le A_r, \quad L(x)_p \le A_0. \tag{1.6}$$

Как следствие получено решение задачи

$$\int\limits_a^b \Phi(|x^{(k)}(t)|)dt \to \sup, \quad \Phi \in W, \quad k = 1, \ldots, r-1, \tag{1.7}$$

на классе всех функций $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющих условиям (1.6).

Обобщение результатов работы [6] получено в [7, 8].

Символом $\varphi_r(t)$, $r \in \mathbf{N}$, обозначим r-й 2π-периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn}\sin t$ и для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$.

В данной работе получено решение задач (1.5) и (1.7) (теоремы 1 и 3) на классе функций $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющих условиям

$$\|x^{(r)}\|_\infty \le A_r, \quad \|x\|_{p,\delta} \le A_r\|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\delta}, \quad \delta \in (0, \pi/\lambda], \tag{1.8}$$

где

$$\|x\|_{p,\,\delta} := \sup\{\|x\|_{L_p[a,\,b]} : a,\, b \in \mathbf{R},\ 0 < b - a \le \delta\}. \tag{1.9}$$

Отметим, что при $p \ge 1$ величина $\|x\|_{p,\,\delta}$ является нормой в отличие от величины $L(x)_p$, определенной равенством (1.4).

Изучено также соотношение между классами функций $x \in L^r_\infty$, задаваемыми ограничениями (1.6), и классами функций $x \in L^r_\infty$, которые удовлетворяют условиям (1.8) (теоремы 2 и 4). Кроме того, получены точные неравенства разных метрик для величин $\|x\|_{p,\delta}$, определенных равенством (1.9) (теоремы 5–8).

2. Вспомогательные утверждения. Пусть $r \in \mathbf{N}$ и $p, \lambda > 0$. Введем класс функций

$$F^r_p(\lambda) := \{x \in L^r_\infty : \|x\|_{p,\delta} \le \|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\delta}\|x^{(r)}\|_\infty,\ \delta \in (0, \pi/\lambda]\}, \tag{2.1}$$

где величина $\|x\|_{p,\delta}$ определена равенством (1.9).

Примеры функций $x \in F^r_p(\lambda)$ приведены в теоремах 2 и 4. В частности, из этих теорем следует, что произвольная функция $x \in L^r_\infty$ при любом $p > 0$ принадлежит классу $F^r_p(\lambda)$ с некоторым $\lambda > 0$, а любая функция $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, в среднем равная нулю на периоде, принадлежит классу $F^r_p(1)$ при $p \ge 1$.

Через $\tilde{F}^r_p(\lambda)$ обозначим класс функций $x \in F^r_p(\lambda)$, для которых при любых $\Phi \in W$ и $\delta \in (0, \pi/\lambda]$ каждая из точных верхних граней

$$\sup\left\{\int\limits_\alpha^\beta \Phi\left(|x(t)|^p\right)dt : \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ \beta - \alpha \le \delta\right\} \tag{2.2}$$

и

$$\sup\{\|x\|_{L_\infty[\alpha,\beta]} : \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ \beta - \alpha \le \delta\}$$

достигается на некотором отрезке $[\alpha,\, \beta]$ (зависящем от Φ и δ). Примерами функций класса $\tilde{F}^r_p(\lambda)$ являются функции $x \in F^r_p(\lambda)$, имеющие одно из следующих свойств:

1) x — периодическая функция (произвольного периода),

2) $\lim_{|t|\to\infty} x(t) = 0$,

3) $x \in L_{p,\,\infty}$ при $p < \infty$,

4) x — финитная функция.

Отметим, что имеет место включение $\tilde{F}_p^r(\lambda) \subset \tilde{F}_q^r(\lambda)$ при $q > p > 0$ (следствие 1 из леммы 3).

Лемма 1 [9]**.** *Если функция x непрерывна на $\mathbf{R}$, а точная верхняя грань в определении* (1.9) *реализуется на отрезке $[a, b]$, то*

$$|x(a)| = |x(b)|.$$

Лемма 2. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $p, \lambda > 0$. Тогда для любой функции $x \in F_p^r(\lambda)$ имеет место неравенство*

$$\|x\|_\infty \leq \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty \|x^{(r)}\|_\infty. \tag{2.3}$$

Доказательство. Зафиксируем функцию $x \in F_p^r(\lambda)$. Вследствие однородности неравенства (2.3) можно считать, что

$$\|x^{(r)}\|_\infty = 1. \tag{2.4}$$

Пусть m — точка максимума сплайна $\varphi_{\lambda,r}$. Заметим, что

$$\|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\delta}^p = \int\limits_{m-\delta/2}^{m+\delta/2} |\varphi_{\lambda,r}(t)|^p dt, \quad \delta \in (0, \pi/\lambda].$$

Поэтому из (2.1) и (2.4) для произвольного $a \in \mathbf{R}$ следует, что

$$\frac{1}{\delta} \int\limits_a^{a+\delta} |x(t)|^p dt \leq \frac{1}{\delta} \int\limits_{m-\delta/2}^{m+\delta/2} |\varphi_{\lambda,r}(t)|^p dt = \frac{2}{\delta} \int\limits_m^{m+\delta/2} |\varphi_{\lambda,r}(t)|^p dt.$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $\delta \to 0$, получаем

$$|x(a)|^p \leq |\varphi_{\lambda,r}(m)|^p = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty^p.$$

Отсюда в силу (2.4) и произвольности $a \in \mathbf{R}$ следует (2.3).

Лемма 2 доказана.

Для суммируемой на отрезке $[a, b]$ функции x символом $r(x, t)$ обозначим перестановку функции $|x|$ (см., например, [11], § 1.3). При этом условимся, что $r(x, t) = 0$ для $t > b - a$.

Лемма 3. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $p, \lambda > 0$, $\Phi \in W$. Тогда для любой функции $x \in \tilde{F}_p^r(\lambda)$ и отрезка $[a, b] \subset \mathbf{R}$, для которого $b - a \leq \pi/\lambda$, выполнено неравенство*

$$\int\limits_a^b \Phi\left(|x(t)|^p\right) dt \leq \int\limits_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi\left(|A_r \varphi_{\lambda,r}(t)|^p\right) dt, \tag{2.5}$$

где $A_r = \|x^{(r)}\|_\infty$, m — точка локального максимума сплайна $\varphi_{\lambda,r}$, а число Θ удовлетворяет условиям

$$\varphi_{\lambda,r}(m - \Theta) = \varphi_{\lambda,r}(m + \Theta), \quad 2\Theta = b - a.$$

В частности,

$$\int\limits_a^b \Phi\left(|x(t)|^p\right) dt \le \int\limits_c^{c+\pi/\lambda} \Phi\left(|A_r\varphi_{\lambda,r}(t)|^p\right) dt, \tag{2.6}$$

где c — нуль сплайна $\varphi_{\lambda,r}$.

Доказательство. Зафиксируем функцию x и отрезок $[a,b]$, удовлетворяющие условиям леммы. Докажем неравенство (2.5). Не ограничивая общности можем считать, что

$$\|x^{(r)}\|_\infty = 1. \tag{2.7}$$

Положим $\delta := b-a$. По определению класса $\tilde{F}_p^r(\lambda)$ точная верхняя грань (2.2) реализуется на некотором отрезке $[\alpha,\beta]$. Среди таких отрезков, очевидно, найдется такой, что $\beta-\alpha=\delta$. Неравенство (2.5) достаточно доказать для $[a,b]=[\alpha,\beta]$. Тогда в силу леммы 1

$$|x(a)| = |x(b)|. \tag{2.8}$$

Обозначим через $\overline{x}$ сужение функции x на отрезок $[a,b]$, а через $\overline{\varphi}=\overline{\varphi}_{\lambda,r}$ сужение сплайна $\varphi_{\lambda,r}$ на $[m-\Theta,m+\Theta]$. Докажем сначала неравенство

$$\int\limits_0^\xi r^p(\overline{x},t)dt \le \int\limits_0^\xi r^p(\overline{\varphi}_{\lambda,r},t)dt, \quad \xi>0. \tag{2.9}$$

Убедимся прежде всего в том, что разность $\delta(t) := r(\overline{x},t) - r(\overline{\varphi}_{\lambda,r},\, t)$ меняет знак на $[0,\infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). Для этого заметим, что

$$\delta(0) \le \|x\|_\infty - \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty \le 0 \tag{2.10}$$

в силу леммы 2 и предположения (2.7). Далее положим

$$A := \min\{|\overline{x}(t)| : t\in[a,b]\}, \quad B := \max\{|\overline{x}(t)| : t\in[a,b]\}.$$

Если $B \le |\varphi_{\lambda,r}(m+\Theta)|$, то разность $\delta(t)$ не меняет знак. Пусть $B > |\varphi_{\lambda,r}(m+\Theta)|$. Тогда положим $C=\max\{A, |\varphi_{\lambda,r}(m+\Theta)|\}$. В силу (2.8) и (2.10) для любого $z\in(C,B)$ существуют точки

$$t_i\in[a,b], \quad i=1,\ldots,m, \quad m\ge 2, \quad y_j\in[m-\Theta,m+\Theta], \quad j=1,2,$$

такие, что

$$z = |\overline{x}(t_i)| = |\overline{\varphi}_{\lambda,r}(y_j)|. \tag{2.11}$$

В силу (2.7) и (2.10) выполнены условия теоремы сравнения Колмогорова [10]. По этой теореме для точек t_i и y_j, удовлетворяющих условию (2.11), выполнены неравенства

$$|\overline{x}'(t_i)| \le |\overline{\varphi}'_{\lambda,r}(y_j)|.$$

Поэтому если точки $\Theta_1,\Theta_2>0$ выбраны так, что

$$z = r(\overline{x}, \Theta_1) = r(\overline{\varphi}, \Theta_2),$$

то по теореме о производной перестановки (см., например, [11], предложение 1.3.2)

$$|r'(\overline{x}, \theta_1)| = \left[\sum_{i=1}^{m} |\overline{x}'(t_i)|^{-1}\right]^{-1} \le \left[\sum_{j=1}^{2} |\overline{\varphi}'(y_j)|^{-1}\right]^{-1} = |r'(\overline{\varphi}, \theta_2)|.$$

Отсюда следует, что разность $\delta(t) := r(\overline{x}, t) - r(\overline{\varphi}, t)$ меняет знак на $[0, \infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). То же самое справедливо и для разности $\delta_p(t) := r^p(\overline{x}, t) - r^p(\overline{\varphi}, t)$. Рассмотрим интеграл

$$I_p(\xi) := \int\limits_0^{\xi} \delta_p(t) dt.$$

Ясно, что $I_p(0) = 0$, и в силу определения класса $\tilde{F}_p^r(\lambda)$ и предположения (2.7) имеем

$$I_p(\xi) = \|x\|_{p,\delta} - \|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\delta} \le 0, \quad \xi \ge \delta.$$

Кроме того, производная $I'_p(t) = \delta_p(t)$ меняет знак не более одного раза (с минуса на плюс). Таким образом, $I_p(\xi) \le 0$ для всех $\xi \ge 0$ и неравенство (2.9) доказано. Из него в силу теоремы Харди – Литлвуда – Полиа (см., например, [11], предложение 1.3.11) и условия (2.7) следует неравенство (2.5). Ясно, что (2.6) непосредственно следует из (2.5).

Лемма 3 доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $p, \lambda > 0$. Тогда для любого $q > p$ имеет место включение*

$$\tilde{F}_p^r(\lambda) \subset \tilde{F}_q^r(\lambda).$$

Доказательство. Включение $\tilde{F}_p^r(\lambda) \subset F_q^r(\lambda)$ следует из определения (2.1) и неравенства (2.5), если положить в нем $\Phi(t) = t^{q/p}$, $q > p$. Докажем требуемое включение $\tilde{F}_p^r(\lambda) \subset \tilde{F}_q^r(\lambda)$. Учитывая (2.2) и определение класса $\tilde{F}_q^r(\lambda)$, зафиксируем произвольную функцию $\Phi \in W$ и покажем, что для любого $\delta \in (0, \pi/\lambda)$ точная верхняя грань

$$S_q(\Phi) := \sup \left\{ \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Phi\left(|x(t)|^q\right) dt \colon \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ \beta - \alpha \le \delta \right\}$$

достигается на некотором отрезке. Положим $\Phi_1(t) = t^{q/p}$. Тогда $S_q(\Phi) = S_p(\Phi(\Phi_1))$. Ясно, что суперпозиция функций класса W является функцией этого класса. Следовательно, указанная точная верхняя грань $S_q(\Phi)$ достигается, если $x \in \tilde{F}_p^r(\lambda)$, так как в этом случае достигается верхняя грань $S_p(\Phi(\Phi_1))$.

Следствие 1 доказано.

3. Основные результаты. Пусть $r \in \mathbf{N}$, $p, \lambda > 0$, $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Следуя Б. Боянову и Н. Найденову [4], представим длину отрезка $[a, b]$ в виде

$$b - a = n\frac{\pi}{\lambda} + 2\Theta, \quad n \in \mathbf{N} \bigcup \{0\}, \quad 2\Theta \in [0, \pi/\lambda). \tag{3.1}$$

Пусть далее $\tau \in \mathbf{R}$ таково, что

$$|\varphi_{\lambda,r}(a+\Theta+\tau)| = |\varphi_{\lambda,r}(b-\Theta+\tau)| = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty. \tag{3.2}$$

Ясно, что $\varphi_{\lambda,r}(\cdot+\tau) \in \tilde{F}_p^r(\lambda)$ для любых $\tau \in \mathbf{R}$ и $p > 0$.

Следующая теорема дает решение задачи (1.5) с ограничениями (1.8). Не теряя общности будем считать, что $A_r = 1$ в (1.8), и положим

$$W_\infty^r := \left\{ x \in L_\infty^r \colon \left\| x^{(r)} \right\|_\infty \le 1 \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $p, \lambda > 0$. Тогда для любой функции $\Phi \in W$ и произвольного отрезка $[a,b] \subset \mathbf{R}$*

$$\sup \left\{ \int\limits_a^b \Phi\left(|x(t)|^p\right) dt \colon x \in \tilde{F}_p^r(\lambda) \bigcap W_\infty^r \right\} = \int\limits_a^b \Phi\left(|\varphi_{\lambda,r}(t+\tau)|^p\right) dt, \tag{3.3}$$

где число τ определено соотношением (3.2). *В частности, для любого $q \ge p$*

$$\sup \left\{ \int\limits_a^b |x(t)|^q dt \colon x \in \tilde{F}_p^r(\lambda) \bigcap W_\infty^r \right\} = \int\limits_a^b |\varphi_{\lambda,r}(t+\tau)|^q dt.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные функцию $x \in \tilde{F}_p^r(\lambda) \bigcap W_\infty^r$ и отрезок $[a,b] \subset \subset \mathbf{R}$. Представим длину отрезка $[a,\, b]$ в виде (3.1). Пусть $a_k := a + k\pi/\lambda,\ k = 0, 1, \ldots, n$. По лемме 3

$$\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} \Phi(|x(t)|^p) dt \le \int\limits_c^{c+\pi/\lambda} \Phi(|\varphi_{\lambda,r}(t)|^p) dt, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

и

$$\int\limits_{a_n}^b \Phi(|x(t)|^p) dt \le \int\limits_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi(|\varphi_{\lambda,r}(t)|^p) dt,$$

где c — нуль, m — точка локального максимума сплайна $\varphi_{\lambda,r}$, а число Θ определено равенством (3.1). Таким образом,

$$\int\limits_a^b \Phi(|x(t)|^p) dt \le \ n \int\limits_c^{c+\pi/\lambda} \Phi(|\varphi_{\lambda,r}(t)|^p) dt + \int\limits_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi(|\varphi_{\lambda,r}(t)|^p) dt =$$

$$= \int\limits_a^b \Phi\left(|\varphi_{\lambda,r}(t+\tau)|^p\right) dt,$$

причем равенство здесь достигается для функции $x(t) = \varphi_{\lambda,r}(t+\tau)$. Соотношение (3.3) доказано. Полагая в нем $\Phi(t) = t^{q/p}$, получаем второе утверждение теоремы.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть* $r \in \mathbf{N},\ p > 0$. *Если для функции* $x \in L^r_\infty$ *число* λ *выбрано так, что*

$$L(x)_p \le L(\varphi_{\lambda,r})_p \|x^{(r)}\|_\infty, \tag{3.4}$$

где величина $L(x)_p$ *определена равенством* (1.4), *то* x *принадлежит* $F^r_p(\lambda)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $x \in L^r_\infty$ и число $\delta \in (0, \pi/\lambda]$. Докажем неравенство

$$\|x\|_{p,\delta} \le \|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\delta} \|x^{(r)}\|_\infty. \tag{3.5}$$

Вследствие однородности неравенств (3.4), (3.5) можно считать, что

$$\|x^{(r)}\|_\infty = 1. \tag{3.6}$$

Для функций, удовлетворяющих ограничениям (3.4) и (3.6), в работе [6] (лемма 3) доказано неравенство

$$\int\limits_a^b \Phi\left(|x(t)|^p\right) dt \le \int\limits_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi\left(|\varphi_{\lambda,r}(t)|^p\right) dt, \quad \Phi \in W,$$

для произвольного отрезка $[a, b]$, для которого $b - a \le \pi/\lambda$, где m — точка локального максимума сплайна $\varphi_{\lambda,r}$, а $2\Theta = b - a$. Полагая в этом неравенстве $\Phi(t) = t$ и учитывая (3.6), получаем оценку (3.5) и, как следствие, включение $x \in F^r_p(\lambda)$.

Теорема 2 доказана.

Пусть $k,\, r \in \mathbf{N},\ k < r,\ p > 0,\ [a, b] \subset \mathbf{R}$. Снова представим длину отрезка $[a, b]$ в виде (3.1). Пусть далее $\tau_k \in \mathbf{R}$ таково, что

$$|\varphi_{\lambda,r-k}(a + \Theta + \tau_k)| = |\varphi_{\lambda,\, r-k}(b - \Theta + \tau_k)| = \|\varphi_{\lambda,\, r-k}\|_\infty. \tag{3.7}$$

Следующая теорема дает решение задачи (1.7) с ограничениями (1.8).

Теорема 3. *Пусть* $k,\, r \in \mathbf{N},\ k < r,\ \lambda > 0$. *Тогда для любой функции* $\Phi \in W$ *и произвольного отрезка* $[a, b] \subset \mathbf{R}$

$$\sup\left\{\int\limits_a^b \Phi\left(\left|x^{(k)}(t)\right|\right) dt : x \in F^r_p(\lambda) \bigcap W^r_\infty\right\} =$$

$$= \int\limits_a^b \Phi\left(|\varphi_{\lambda,\, r-k}(t + \tau_k)|\right) dt, \tag{3.8}$$

где число τ_k *определено в* (3.7). *В частности, для любого* $q \ge 1$

$$\sup\left\{\int\limits_a^b |x^{(k)}(t)|^q dt : x \in F^r_p(\lambda) \bigcap W^r_\infty\right\} = \int\limits_a^b |\varphi_{\lambda,\, r-k}(t + \tau_k)|^q dt.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные функцию $x \in F_p^r(\lambda) \bigcap W_\infty^r$ и отрезок $[a,b] \subset \subset \mathbf{R}$. Докажем (3.8). Без ограничения общности можно считать, что

$$\|x^{(r)}\|_\infty = 1.$$

Тогда согласно лемме 2

$$\|x\|_\infty \leq \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty.$$

Отсюда в силу неравенства Колмогорова [10] имеем

$$\|x^{(i)}\|_\infty \leq \|\varphi_{\lambda,r-i}\|_\infty, \quad i = 1, \ldots, r-1.$$

Поэтому для любого отрезка $[\alpha, \beta]$, для которого

$$|x^{(k)}(t)| > 0, \quad t \in (\alpha,\, \beta),$$

получаем

$$\int\limits_\alpha^\beta |x^{(k)}(t)|dt = |x^{(k-1)}(\beta) - x^{(k-1)}(\alpha)| \leq 2\|x^{(k-1)}\|_\infty \leq$$

$$\leq 2\|\varphi_{\lambda,r-k+1}\|_\infty = L(\varphi_{\lambda,r-k})_1,$$

где величина $L(x)_p$ определена равенством (1.4). Отсюда следует, что

$$L(x^{(k)})_1 \leq L(\varphi_{\lambda,r-k})_1.$$

Для функций $x \in W_\infty^r$, удовлетворяющих этому ограничению, и для произвольного отрезка $[a,b]$ в работе [6] (теорема 1) получена оценка

$$\int\limits_a^b \Phi\left(|x^{(k)}(t)|\right) dt \leq \int\limits_a^b \Phi\left(|\varphi_{\lambda,r-k}(t+\tau_k)|\right) dt, \quad \Phi \in W,$$

где τ_k определено в (3.7). Равенство в этой оценке достигается для функции $x(t) = \varphi_{\lambda,r}(t+\tau_k)$. Соотношение (3.8) доказано. Полагая в нем $\Phi(t) = t^q$, получаем второе утверждение теоремы.

Теорема 3 доказана.

В следующей теореме содержатся примеры функций класса $\tilde{F}_p^r(1)$.

Теорема 4. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N},\ k < r,\ p \geq 1$. *Тогда для любой функции* $x \in L_\infty^r(I_{2\pi})$ *имеет место неравенство*

$$L(x^{(k)})_p \leq L(\varphi_{r-k})_p \|x^{(r)}\|_\infty, \tag{3.9}$$

где величина $L(x)_p$ *определена равенством* (1.4). *В частности, для любой функции* $x \in \in L_\infty^r(I_{2\pi})$, *в среднем равной нулю на периоде, имеет место включение* $x \in \tilde{F}_p^r(1)$.

Доказательство. В работе [12] для функций $x \in L_\infty^r(I_{2\pi})$ доказано неравенство

$$L(x^{(k)})_p \leq \frac{L(\varphi_{r-k})_p}{\|\varphi_r\|_s^\alpha}\, E_0(x)_s^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha},$$

где $p, s \geq 1,\ k < r,\ \alpha = (r - k + 1/p)/(r + 1/s),\ E_0(x)_s$ — наилучшее приближение функции x константами в метрике пространства L_s. Из этого неравенства и известного неравенства типа Бора – Фавара (см., например, [13], § 6.9)

$$E_0(x)_s \leq \|\varphi_r\|_s \|x^{(r)}\|_\infty$$

следует (3.9).

Пусть теперь функция $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$ в среднем равна нулю на периоде. Через x_1 обозначим ее первообразную. Ясно, что $x_1 \in L^{r+1}_\infty(I_{2\pi})$. Применяя к x_1 неравенство (3.9) при $k = 1$, получаем

$$L(x)_p \leq L(\varphi_r)_p \|x^{(r)}\|_\infty.$$

Из этого неравенства и теоремы 2 вследствие периодичности функции x следует включение $x \in \tilde{F}^r_p(1)$.

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть* $r \in \mathbf{N},\ q > p > 0,\ \varepsilon \in (0, \pi]$. *Тогда для любой функции* $x \in \tilde{F}^r_p(1)$ *имеет место неулучшаемое неравенство*

$$\|x\|_{q,\varepsilon} \leq \frac{\|\varphi_r\|_{q,\varepsilon}}{\|\varphi_r\|^\alpha_{p,\varepsilon}} \|x\|^\alpha_{p,\,\varepsilon} \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_\infty, \tag{3.10}$$

где $\alpha = (r + 1/q)/(r + 1/p)$, *а величина* $\|x\|_{p,\varepsilon}$ *определена равенством* (1.9). *В частности, неравенство* (3.10) *при* $p \geq 1$ *имеет место для любой функции* $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, *в среднем равной нулю на периоде.*

Доказательство. Зафиксируем функцию $x \in \tilde{F}^r_p(1)$. Вследствие однородности неравенства (3.10) можно считать, что

$$\|x^{(r)}\|_\infty = 1. \tag{3.11}$$

Выберем далее $\lambda > 0$ так, чтобы

$$\|x\|_{p,\varepsilon} = \|\varphi_{\lambda,\,r}\|_{p,\varepsilon/\lambda} = \lambda^{-(r+1/p)} \|\varphi_r\|_{p,\varepsilon}. \tag{3.12}$$

Из (3.11) и (3.12) в силу включения $x \in F^r_p(1)$ следует, что

$$\lambda \geq 1. \tag{3.13}$$

Докажем неравенство

$$\|x\|_{q,\varepsilon} \leq \|\varphi_{\lambda,r}\|_{q,\varepsilon/\lambda}. \tag{3.14}$$

В силу включения $x \in \tilde{F}^r_p(1)$ существует отрезок $[a,\, b]$, для которого

$$\|x\|_{q,\varepsilon} = \|x\|_{L_q[a,b]}. \tag{3.15}$$

Среди таких отрезков найдется отрезок длиной ε. Поэтому можно считать, что $b - a = \varepsilon$. Обозначим через $\overline{x}$ сужение функции x на отрезок $[a, b]$, а через $\overline{\varphi}_{\lambda,r}$ сужение сплайна $\varphi_{\lambda,r}$ на $[m - \Theta, m + \Theta]$, где m — точка локального максимума сплайна $\varphi_{\lambda,r}$, а $2\Theta = \varepsilon/\lambda$. Покажем, что разность $\delta(t) := r(\overline{x}, t) - r(\overline{\varphi}_{\lambda,r}, t)$ меняет знак на $[0,\infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). Сначала убедимся в том, что

$$\|x\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty. \tag{3.16}$$

Предположим, что (3.16) не выполняется. Тогда существует такое $\omega \in (0,\lambda)$, для которого

$$\|x\|_\infty = \|\varphi_{\omega,r}\|_\infty. \tag{3.17}$$

Если μ — точка максимума сплайна $\varphi_{\omega,r}$, т. е.

$$\|\varphi_{\omega,r}\|_\infty = \varphi_{\omega,r}(\mu), \tag{3.18}$$

то в силу (3.17) и определения класса $\tilde{F}_p^r(1)$ существует такое $\tau \in \mathbf{R}$, что

$$\|x\|_\infty = |x(\mu+\tau)|. \tag{3.19}$$

Заметим, что в силу равенств (3.11) и (3.17) функция x удовлетворяет условиям теоремы сравнения Колмогорова [10]. Согласно этой теореме из соотношений (3.17) – (3.19) следует неравенство

$$|x(t+\tau)| \ge |\varphi_{\omega,r}(t)|, \quad t \in (\mu - \pi/(2\omega),\, \mu + \pi/(2\omega)).$$

Из него, принимая во внимание (3.13) и включение $\omega \in (0,\lambda)$, получаем

$$\|x\|_{p,\varepsilon} \ge \|x\|_{p,\varepsilon/\lambda} \ge \|\varphi_{\omega,r}\|_{L_p[\mu-\varepsilon/(2\lambda),\, \mu+\varepsilon/(2\lambda)]} = \|\varphi_{\omega,r}\|_{p,\varepsilon/\lambda} > \|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\varepsilon/\lambda},$$

что противоречит (3.12). Неравенство (3.16) доказано. Из него следует, что

$$\delta(0) \le \|x\|_\infty - \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty \le 0.$$

Далее повторяя (с небольшими изменениями) рассуждения из доказательства леммы 3 (после неравенства (2.9)), убеждаемся в том, что разность $\delta(t)$ меняет знак на $[0,\infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс) и то же свойство имеет разность $\delta_p(t) := r^p(\overline{x}, t) - r^p(\overline{\varphi}_{\lambda,r}, t)$. Рассмотрим интеграл

$$I_p(\xi) := \int\limits_0^\xi \delta_p(t)dt.$$

Ясно, что $I_p(0) = 0$, и для $\xi \ge \varepsilon$ в силу условия (3.12) имеем

$$I_p(\xi) \le \|x\|_{p,\varepsilon} - \|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\varepsilon/\lambda} = 0.$$

Кроме того, производная $I'_p(t) = \delta_p(t)$ меняет знак не более одного раза (с минуса на плюс). Таким образом, $I_p(\xi) \le 0$ для всех $\xi \ge 0$, т. е.

$$\int\limits_0^\xi r^p(\overline{x}, t)dt \le \int\limits_0^\xi r^p(\overline{\varphi}_{\lambda,r}, t)dt, \quad \xi > 0.$$

Из этого неравенства в силу теоремы Харди – Литлвуда – Полиа (см., например, [11], предложение 1.3.11) следует, что

$$\|x\|_{L_q[a,b]} \leq \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_q[m-\Theta,m+\Theta]} = \|\varphi_{\lambda,r}\|_{q,\varepsilon/\lambda}.$$

Отсюда в силу (3.15) непосредственно следует (3.14). Применяя (3.14) и (3.12), а также учитывая определение α, получаем оценку

$$\frac{\|x\|_{q,\varepsilon}}{\|x\|^{\alpha}_{p,\varepsilon}} \leq \frac{\|\varphi_{\lambda,r}\|_{q,\varepsilon/\lambda}}{\|\varphi_{\lambda,r}\|^{\alpha}_{p,\,\varepsilon/\lambda}} = \frac{\lambda^{-(r+1/q)}\|\varphi_r\|_{q,\varepsilon}}{\left[\lambda^{-(r+1/p)}\|\varphi_r\|_{p,\varepsilon}\right]^{\alpha}} = \frac{\|\varphi_r\|_{q,\varepsilon}}{\|\varphi_r\|^{\alpha}_{p,\varepsilon}}.$$

Из этой оценки в силу (3.11) следует доказываемое неравенство (3.10) для функций $x \in \tilde{F}^r_p(1)$. Ясно, что (3.10) обращается в равенство для функции $x(t) = \varphi_r(t)$.

Осталось заметить, что выполнение неравенства (3.10) при $p \geq 1$ для функций $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, в среднем равных нулю на периоде, следует из теоремы 4.

Теорема 5 доказана.

***Замечание* 1.** Для характеристик $L(x)_p$, определенных равенством (1.4), на классе функций $x \in L^r_\infty$ имеет место следующий аналог неравенства (3.10):

$$L(x)_q \leq L(\varphi_r)_q \left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^{\alpha} \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_\infty, \quad q > p > 0,$$

где $\alpha = (r+1/q)/(r+1/p)$.

Это неравенство вытекает из леммы 1 работы [6] и следствия из нее.

Теорема 6. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $q > p > 0$. Тогда для любой функции $x \in \tilde{F}^r_p(1)$ и любого отрезка $[a,b] \in \mathbf{R}$ с длиной, кратной числу π, имеет место неулучшаемое неравенство*

$$\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |x(t)|^q dt\right)^{1/q} \leq \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi |\varphi_r(t)|^q dt\right)^{1/q} \left(\frac{\|x\|_{p,\pi}}{\|\varphi_r\|_{p,\pi}}\right)^{\alpha} \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_\infty, \tag{3.20}$$

где $\alpha = (r+1/q)/(r+1/p)$, а величина $\|x\|_{p,\pi}$ определена равенством (1.9). *В частности, для любой функции $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, в среднем равной нулю на периоде, при $p \geq 1$ выполнено неравенство*

$$\|x\|_{L_q(I_{2\pi})} \leq \|\varphi_r\|_{L_q(I_{2\pi})} \left(\frac{\|x\|_{p,\,\pi}}{\|\varphi_r\|_{p,\pi}}\right)^{\alpha} \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_\infty. \tag{3.21}$$

Доказательство. Зафиксируем функцию $x \in \tilde{F}^r_p(1)$. Вследствие однородности неравенства (3.20) можно считать, что

$$\|x^{(r)}\|_\infty = 1. \tag{3.22}$$

Выберем далее $\lambda > 0$ так, чтобы

$$\|x\|_{p,\pi} = \|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\pi/\lambda} = \lambda^{-(r+1/p)}\|\varphi_r\|_{p,\pi}. \tag{3.23}$$

При доказательстве теоремы 5 было установлено, что из (3.22) и (3.23) следует неравенство

$$\|x\|_{q,\pi} \leq \|\varphi_{\lambda,\,r}\|_{q,\pi/\lambda}. \tag{3.24}$$

По условию $b - a = n\pi$ с некоторым $n \in \mathbf{N}$. Поэтому вследствие (3.24) имеем

$$\|x\|^q_{L_q[a,b]} \le n\|\varphi_{\lambda,r}\|^q_{q,\pi/\lambda}. \tag{3.25}$$

Из (3.25) и (3.23), учитывая определение α и равенство $b-a=n\pi$, получаем

$$\frac{\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b |x(t)|^q dt\right)^{1/q}}{\|x\|^\alpha_{p,\varepsilon}} \le \frac{\left(\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/\lambda} |\varphi_{\lambda,r}(t)|^q dt\right)^{1/q}}{\|\varphi_{\lambda,r}\|^\alpha_{p,\pi/\lambda}} =$$

$$= \frac{\lambda^{-(r+1/q)}\left(\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} |\varphi_r(t)|^q dt\right)^{1/q}}{\left(\lambda^{-(r+1/p)}\|\varphi_r\|_{p,\pi}\right)^\alpha} = \frac{\left(\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} |\varphi_r(t)|^q dt\right)^{1/q}}{\|\varphi_r\|^\alpha_{p,\pi}}.$$

Из этой оценки в силу (3.22) следует неравенство (3.20). Оно обращается в равенство для функции $x(t)=\varphi_r(t)$.

Выполнение неравенства (3.21) при $p\ge 1$ для функций $x\in L^r_\infty(I_{2\pi})$, в среднем равных нулю на периоде, следует из (3.20) и теоремы 4.

Теорема 6 доказана.

Известно (см., например, [14]), что для функции x такой, что $x\in L_q[a,b]$ при любых $a,b\in\mathbf{R}$, существует предел

$$\lim_{\Delta\to\infty}\sup_{a\in\mathbf{R}}\left(\frac{1}{\Delta}\int\limits_a^{a+\Delta}|x\,(t)|^q\,dt\right)^{1/q} =: \|x\|_{W_q}. \tag{3.26}$$

Функционал $\|x\|_{W_q}$ используется при определении почти периодических в смысле Вейля функций [15]. Отметим, что неравенства для производных в пространствах Вейля изучались в работах [7, 16, 17].

Полагая в неравенстве (3.20) $b-a=2\pi n, n\in\mathbf{N}$, и переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть $r\in\mathbf{N}$, $q>p>0$. Тогда для любой функции $x\in\tilde F^r_p(1)$ имеет место неулучшаемое неравенство*

$$\|x\|_{W_q} \le \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}|\varphi_r(t)|^q dt\right)^{1/q}\left(\frac{\|x\|_{p,\pi}}{\|\varphi_r\|_{p,\pi}}\right)^\alpha \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_\infty, \tag{3.27}$$

где $\alpha=(r+1/q)/(r+1/p)$, а величины $\|x\|_{W_q}$ и $\|x\|_{p,\pi}$ определены равенствами (3.26) *и* (1.9) *соответственно.*

Замечание 2. Для 2π-периодических функций класса $F^r_p(1)$ неравенство (3.27) трансформируется в неравенство (3.21).

Пусть $n,r\in\mathbf{N}$. Обозначим через T_n пространство тригонометрических полиномов порядка не выше n, а символом $S_{n,r}$ пространство 2π-периодических сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n, k\in\mathbf{Z}$.

Теорема 8. *Пусть $r\in\mathbf{N}$, $q>p\ge 1$. Тогда для любого тригонометрического полинома $T\in T_n$, в среднем равного нулю на периоде, имеет место неулучшаемое на классе $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}T_n$ неравенство*

$$\|T\|_{L_q(I_{2\pi})} \le n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\|\cos(\cdot)\|_{L_q(I_{2\pi})}}{\|\cos(\cdot)\|_{L_p(I_{2\pi})}} \cdot 2^{1/p}\, \|T\|_{p,\pi}, \tag{3.28}$$

а для любого сплайна $s \in S_{n,r}$, в среднем равного нулю на периоде, имеет место неулучшаемое на классе $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} S_{n,r}$ неравенство

$$\|s\|_{L_q(I_{2\pi})} \le n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\|\varphi_r\|_{L_q(I_{2\pi})}}{\|\varphi_r\|_{L_p(I_{2\pi})}} \cdot 2^{1/p}\, \|s\|_{p,\pi}. \tag{3.29}$$

Доказательство. Зафиксируем полином $T \in T_n$, в среднем равный нулю на периоде, и применим к нему неравенство (3.21):

$$\|T\|_{L_q(I_{2\pi})} \le \|\varphi_r\|_{L_q(I_{2\pi})} \left(\frac{\|T\|_{p,\pi}}{\|\varphi_r\|_{p,\pi}}\right)^{\alpha} \|T^{(r)}\|_{\infty}^{1-\alpha},$$

где $\alpha = (r+1/q)/(r+1/p)$. Применяя далее неравенство Бернштейна

$$\|T^{(r)}\|_{\infty} \le n^r \|T\|_{\infty},$$

а затем переходя к пределу при $r \to \infty$ и учитывая, что при этом

$$\|\varphi_r\|_{L_p(I_{2\pi})} \to \frac{4}{\pi}\|\cos(\cdot)\|_{L_p(I_{2\pi})}, \quad p > 0,$$

получаем (3.28). Ясно, что (3.28) обращается в равенство для полинома $T(t) = \cos t$.

Докажем (3.29). Зафиксируем сплайн $s \in S_{n,r}$, в среднем равный нулю на периоде, и применим к нему неравенство (3.21):

$$\|s\|_{L_q(I_{2\pi})} \le \|\varphi_r\|_{L_q(I_{2\pi})} \left(\frac{\|s\|_{p,\pi}}{\|\varphi_r\|_{p,\pi}}\right)^{\alpha} \|s^{(r)}\|_{\infty}^{1-\alpha},$$

где $\alpha = (r+1/q)/(r+1/p)$. Применяя далее неравенство (см. [1, с. 477])

$$\|s^{(r)}\|_{\infty} \le n^{r+1/p} \frac{\|s\|_{L_p(I_{2\pi})}}{\|\varphi_r\|_{L_p(I_{2\pi})}}$$

и учитывая, что $\|s\|_{L_p(I_{2\pi})} \le 2^{1/p}\|s\|_{p,\pi}$, получаем (3.29). Ясно, что (3.29) обращается в равенство для сплайна $s(t) = \varphi_r(t)$.

Литература

1. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.
2. *Бабенко В. Ф.* Исследования Днепропетровских математиков по неравенствам для производных периодических функций и их приложениям // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 1. – С. 5 – 29.
3. *Kwong M. K., Zettl A.* Norm inequalities for derivatives and differences // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer-Verlag, 1992. – **1536**. – 150 p.
4. *Bojanov B., Naidenov N.* An extension of the Landau – Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos // J. Anal. Math. – 1999. – **78**. – P. 263 – 280.
5. *Pinkus A., Shisha O.* Variations on the Chebyshev and L^q theories of best approximation // J. Approxim. Theory. – 1982. – **35**, № 2. – P. 148 – 168.

6. *Кофанов В. А.* О некоторых экстремальных задачах разных метрик для дифференцируемых функций на оси // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 6. – С. 765 – 776.
7. *Kofanov V. A.* Some extremal problems various metrics and sharp inequalities of Nagy – Kolmogorov type // East J. Approxim. – 2010. – **16**, № 4. – P. 313 – 334.
8. *Кофанов В. А.* Точные верхние грани норм функций и их производных на классах функций с заданной функцией сравнения // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 7. – С. 969 – 984.
9. *Кофанов В. А.* Неравенства разных метрик для дифференцируемых периодических функций // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 2. – С. 202 – 212.
10. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избр. труды. Математика, механика. – М.: Наука, 1985. – С. 252 – 263.
11. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
12. *Kofanov V. A.* Sharp inequalities of Bernstein and Kolmogorov type // East J. Approxim. – 2005. – **11**, № 2. – P. 131 – 145.
13. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1982. – 250 с.
14. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
15. *Weyl H.* Almost periodic invariant vector sets in a metric vector spase // Amer. J. Math. – 1949. – **71**, № 1. – P. 178 – 205.
16. *Бабенко В. Ф., Селиванова С. А.* О неравенствах типа Колмогорова для периодических и непериодических функций // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: Дніпропетр. нац. ун-т, 1998. – С. 91 – 95.
17. *Кофанов В. А.* Неравенства для непериодических сплайнов на действительной оси и их производных // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 2. – С. 216 – 225.

Получено 04.12.17