УДК 517.51

В. К. Маслюченко, О. І. Філіпчук (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

ПРО РОЗРИВИ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ З НЕ БІЛЬШ НІЖ ЗЛІЧЕННОЮ МНОЖИНОЮ ЗНАЧЕНЬ

We obtain a general result on the constancy of separately continuous mappings and their analogs, which implies the well-known Sierpiński theorem. By using this result, we study the set of continuity points of separately continuous mappings with at most countably many values including, in particular, the mappings defined on the square of the Sorgenfrey line with values in the Bing plane.

Отримано загальний результат про сталість нарізно неперервних відображень та їхніх аналогів, наслідком якого є відома теорема Серпінського. З його допомогою вивчено множину точок неперервності нарізно неперервних відображень з не більш ніж зліченною множиною значень, зокрема відображень квадрата прямої Зорґенфрея у площину Бінґа.

1. Вступ. У праці [1] було доведено, що нарізно неперервні відображення $f\colon [0,1]^2 \to C_p[0,1]$ зі значеннями у просторі $C_p[0,1]$ усіх неперервних функцій $z\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ із топологією поточкової збіжності мають залишкову, а отже, і скрізь щільну в квадраті $[0,1]^2$ множину $C(f)$ точок неперервності. Разом з тим у [2] наведено приклад нарізно неперервного відображення $f_0\colon [0,1]^2 \to C_p[0,1]$, у якого множина точок розриву $D(f_0) = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$, тобто такого відображення f_0, що не має точок неперервності на горизонталі $y = 0$ і вертикалі $x = 0$.

З іншого боку, з результатів праці [3] випливає, що для берівських просторів X, Y таких, що Y має не більш ніж зліченну псевдобазу, і σ-метризовного простору Z у кожного нарізно неперервного відображення $f\colon X \times Y \to Z$ множина $C(f)$ залишкова в добутку $X \times Y$, а отже, і скрізь щільна в ньому, адже і добуток за даних умов буде берівським. До того ж, якщо простір X берівський, Y задовольняє першу аксіому зліченності і Z є сильно σ-метризовним, то для кожного нарізно неперервного відображення $f\colon X \times Y \to Z$ і довільного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X : (x,y) \in C(f)\}$ є залишковою, а отже, і скрізь щільною в X.

Тому постало питання: *чи існують такі непорожні топологічні простори* X, Y *і* Z, *що* X *та* Y *— берівські*, Y *задовольняє першу аксіому зліченності і має не більш ніж зліченну псевдобазу, а* Z *—* σ*-метризовний, і таке нарізно неперервне відображення* $f\colon X \times Y \to Z$, *що* $C_y(f) = \varnothing$ *для деякого* $y \in Y$?

Приклад із [2] тут не підходить, тому що простір $C_p[0,1]$ не є σ-метризовним [1]. У праці [4] вивчалися нарізно неперервні відображення зі значеннями у площині Бінґа $\mathbb{B}$ і було показано, що $\mathbb{B}$ — σ-метризовний і не сильно σ-метризовний простір, а також для будь-яких c-зв'язних просторів X і Y кожне нарізно неперервне відображення $f\colon X \times Y \to \mathbb{B}$ є сталим. Пряма Зорґенфрея $\mathbb{L}$ [5, с. 47] — це незв'язний берівський простір із першою аксіомою зліченності і зліченною псевдобазою. Так виникла задача про дослідження множини точок неперервності нарізно неперервних відображень $f\colon \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$.

В результаті такого дослідження було встановлено загальні теореми, з яких випливає, що у кожного нарізно неперервного відображення $f\colon \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$ множина $L_c(f)$ точок його локальної сталості є відкритою і скрізь щільною в $\mathbb{L}^2$ і для кожної точки $b \in \mathbb{L}$ у звуження $g = f|_E$, де $E = L_c(f) \cup (X \times \{b\})$, множина $C_b(g) = \{x \in X : (x,b) \in C(g)\}$ є залишковою і скрізь щільною в $\mathbb{L}$. Крім того, ми встановлюємо загальну теорему про сталість нарізно неперервної функції (теорема 2), з якої, як наслідок, випливає відома теорема Серпінського [6]. Споріднені результати отримано в [7, 8].

Крім того, нещодавно було отримано позитивну відповідь на поставлене питання [12], зокрема побудовано приклад нарізно неперервного відображення $f\colon \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$, множина точок розриву якого — це горизонтальна пряма $\mathbb{L} \times \{b\}$. У праці [13] показано, що розривами нарізно неперервного відображення $f\colon \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$ може бути і графік $\mathrm{Gr}\, g$ будь-якої неперервної функції $g\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$. Варто зауважити, що точки неперервності нарізно неперервних відображень зі значеннями у σ-метризовних просторах вивчалися також у статтях Т. Банаха [14, 15], де було введено клас просторів Маслюченка, який охоплює клас σ-метризовних просторів.

2. Горизонтальна квазінеперервність. Нагадаємо, що відображення $f\colon X \to Y$ між топологічними просторами X і Y називається *квазінеперервним* у точці x_0 з X, якщо для кожного околу V точки $f(x_0)$ в Y і кожного околу U точки x_0 в X існує така відкрита в X непорожня множина G, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$.

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Відображення $f\colon X \times Y \to Z$ називається *горизонтально квазінеперервним* у точці $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$, якщо для кожного околу W точки $f(p_0)$ у просторі Z і для довільних околів U і V точок x_0 і y_0 відповідно у просторах X і Y існують відкрита в X непорожня множина G і точка $b \in V$ такі, що $G \subseteq U$ і $f(G \times \{b\}) \subseteq W$. Відображення f називається *квазінеперервним* чи *горизонтально квазінеперервним*, якщо воно є таким у кожній точці області визначення.

Нескладно встановити такі властивості.

Лема 1. *Відображення $f\colon X \to Y$ буде квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли для довільної відкритої множини G в X і такої множини A в X, що $G \subseteq \overline{A}$, виконується включення $f(G) \subseteq \overline{f(A)}$.*

Лема 2. *Нехай $f\colon X \times Y \to Z$ — горизонтально квазінеперервне відображення, G — відкрита множина в X, A — така підмножина X, що $G \subseteq \overline{A}$, і H — відкрита множина в Y. Тоді*

$$f(G \times H) \subseteq \overline{f(A \times H)}.$$

На відміну від леми 1 властивість горизонтальної квазінеперервності не випливає з леми 2. Відображення $f\colon X \times Y \to Z$, що мають сформульовану в лемі 2 властивість, називаються *слабко горизонтально квазінеперервними* (див. [9] і наведену там бібліографію).

Нам буде потрібне ще одне послаблення квазінеперервності. Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ледь неперервним у точці* x_0 з X, якщо для кожного околу V точки $f(x_0)$ в Y існує така відкрита непорожня множина G в X, що $f(G) \subseteq V$, і просто *ледь неперервним*, якщо воно є таким у кожній точці з X.

3. Лема Брекенріджа – Нішіури і точки локальної сталості. Нагадаємо, що підмножина A топологічного простору X називається *ніде не щільною*, якщо для кожної відкритої непорожньої множини U в X існує така відкрита непорожня множина V в X, що $V \subseteq U$ і $V \cap A = \varnothing$. Множина $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, де множини A_n ніде не щільні в X, називається *множиною першої категорії* в X, а її доповнення — *залишковою* в X множиною. Множина, яка не є множиною першої категорії, називається *множиною другої категорії*. Кажуть, що простір X є *берівським*, якщо в ньому кожна відкрита непорожня множина є множиною другої категорії. Це рівносильно тому, що кожна залишкова в X множина скрізь щільна в X. Відомо, що межі відкритої і замкненої множин — це ніде не щільні множини. Звідси легко вивести результат, який ми називаємо лемою Брекенріджа – Нішіури [10].

Лема 3. *Нехай топологічний простір X покрито послідовністю замкнених множин F_n і $G_n = \operatorname{int} F_n$. Тоді множина $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ є відкритою і залишковою в X.*

Нехай X — топологічний простір, Y — множина і x_0 належить X. Ми кажемо, що x_0 — *точка локальної сталості* відображення $f : X \to Y$, якщо існують окіл U точки x_0 в X і елемент $y_0 \in Y$ такі, що $f(x) = y_0$ на U. Множину точок локальної сталості відображення f ми позначатимемо символом $L_c(f)$. Легко перевірити, що $L_c(f)$ — відкрита множина.

Теорема 1. *Нехай X — берівський простір, Y — T_1-простір, $f : X \to Y$ — неперервне відображення і $|f(X)| \leq \aleph_0$. Тоді множина $G = L_c(f)$ точок локальної сталості відображення f відкрита і скрізь щільна в X.*

Доведення. Оскільки $|f(X)| \leq \aleph_0$, то

$$f(X) = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Розглянемо множини $E_n = f^{-1}(y_n)$. Оскільки Y — це T_1-простір, то множини $\{y_n\}$ замкнені в Y, а тоді і множини E_n замкнені в X, адже f — неперервне відображення. Крім того, $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. За лемою 3 множина $G_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{int} E_n$ відкрита і залишкова в X. Але простір X є берівським, тому $\overline{G}_0 = X$. Легко зрозуміти, що $G_0 = G$. Таким чином, G — відкрита скрізь щільна множина в X.

4. Теорема про сталість для функції двох змінних. В. Серпінський [6] довів, що коли нарізно неперервні функції $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ збігаються на скрізь щільній множині, то вони є рівними. Цей результат було розвинуто у працях [7, 8]. Коли одна з функцій є сталою, то можна встановити значно загальніший результат.

Нагадаємо, що система $\mathcal{B}$ відкритих непорожніх множин у топологічному просторі Y називається *локальною псевдобазою в точці y*, якщо кожний окіл V точки y в Y містить деяку множину B з системи $\mathcal{B}$.

Теорема 2. *Нехай X — берівський простір, Y — топологічний простір, який у кожній точці $y \in Y$ має не більш ніж зліченну локальну псевдобазу, Z — гаусдорфовий топологічний простір, $f : X \times Y \to Z$ — слабко горизонтально квазінеперервне відображення, яке ледь неперервне відносно першої і неперервне відносно другої змінної, $c \in Z$ і прообраз $f^{-1}(c)$ скрізь щільний у добутку $X \times Y$. Тоді $f(p) = c$ для всіх $p \in X \times Y$.*

Доведення. Розглянемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$ і доведемо, що $z_0 = f(p_0) = c$. Нехай це не так, тобто $z_0 \neq c$. Оскільки простір Z гаусдорфовий, то існують відкриті околи W_0 точки z_0 і W точки c в Z такі, що $W_0 \cap W = \varnothing$.

Оскільки $f_{y_0}(x_0) = f(p_0) = z_0 \in W_0$ і функція $f_{y_0} : X \to Z$ ледь неперервна в точці x_0, то існує така відкрита непорожня множина U в X, що $f_{y_0}(U) \subseteq W_0$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ — локальна псевдобаза в точці y_0 в Y. Для кожного номера n введемо до розгляду множини $A_n = \{x \in U : f^x(V_n) \subseteq W_0\}$. З неперервності відображення $f^x : Y \to Z$ у точці y_0 випливає, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = U$. Оскільки простір X є берівським, то відкрита непорожня множина U в ньому буде множиною другої категорії. Тому існує такий номер n, що множина A_n буде десь щільною, тобто для неї $U_n = \operatorname{int} \overline{A}_n \neq \varnothing$. Розглянемо відкриту в X множину $G = U \cap U_n$. З одного боку, $G \subseteq U$, а з іншого — $G \subseteq U_n \subseteq \overline{A}_n$. Оскільки множина

U_n відкрита, то $U_n \subseteq \overline{U_n \cap A_n}$, тому і $A = U_n \cap A_n \neq \varnothing$. Але $A_n \subseteq U$, тому $A \subseteq U_n \cap U = G$. Крім того, $\overline{A} \supseteq U_n \supseteq G$, отже, $A \subseteq G \subseteq \overline{A}$, зокрема, і $G \neq \varnothing$, адже $A \neq \varnothing$.

Покладемо $H = V_n$. Оскільки $A \subseteq A_n$, то $f^x(H) \subseteq W_0$ для кожного $x \in A$, отже,

$$f(A \times H) \subseteq W_0 \subseteq Z \setminus W.$$

Зі слабкої горизонтальної квазінеперервності функції f отримуємо, що

$$f(G \times H) \subseteq \overline{f(A \times H)} \subseteq \overline{Z \setminus W} = Z \setminus W,$$

тобто $f(G \times H) \cap W = \varnothing$. Але за умовою $\overline{f^{-1}(c)} = X \times Y$, а $G \times H$ — відкрита непорожня множина в $X \times Y$. Тому $f^{-1}(c) \cap (G \times H) \neq \varnothing$, тобто існує точка $(a,b) \in G \times H$ така, що $f(a,b) = c$. Але $c \in W$, отже, і $c = f(a,b) \in f(G \times H)$. Таким чином, $W \cap f(G \times H) \neq \varnothing$, що приводить до суперечності.

***Наслідок* 1.** *Нехай X — берівський простір, Y — топологічний простір, що має не більш ніж зліченну локальну псевдобазу в кожній точці, E — скрізь щільна множина в добутку $X \times Y$, $g, h\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — нарізно неперервні функції, для яких $g|_E = h|_E$. Тоді $g = h$.*

Доведення. Функція $f = g - h\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ є нарізно неперервною і для неї $f^{-1}(0) \supseteq E$, отже, $f^{-1}(0)$ — скрізь щільна підмножина $X \times Y$. Тому за теоремою 2 отримуємо, що $f(p) = 0$ для кожного $p \in X \times Y$. Отже, $g(p) = h(p)$ на $X \times Y$.

Зрозуміло, що цей результат узагальнює теорему Серпінського.

Застосовуючи методи доведення теореми 2, можна довести і теорему В. Михайлюка [8] для нарізно неперервних відображень, у якій простір значень Z повинен бути урисоновим.

5. Множина точок локальної сталості зліченнозначного нарізно неперервного відображення. З теореми 2 випливає такий результат.

Теорема 3. *Нехай X — берівський простір, Y — топологічний простір, що задовольняє першу аксіому зліченності, Z — гаусдорфовий топологічний простір, $f: X \times Y \to Z$ — нарізно неперервне відображення, таке, що $|f(X \times Y)| \leq \aleph_0$. Тоді множина $L_c(f)$ точок локальної сталості відображення f є відкритою, залишковою у добутку $P = X \times Y$ і скрізь щільною в P, якщо добуток P берівський.*

Доведення. За умовою існує така послідовність точок z_n у Z, що $f(X \times Y) = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$. Розглянемо множини $E_n = f^{-1}(z_n)$ для кожного номера n. Зрозуміло, що $P = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Нехай $F_n = \overline{E_n}$ і $G_n = \mathrm{int} F_n$. Оскільки множини F_n замкнені в P і $P = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, то за лемою 3 відкрита множина $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ є залишковою в P.

Покажемо, що $f(p) = z_n$ на множині G_n. Оскільки множина G_n відкрита і $G_n \subseteq \overline{E}_n = F_n$, то для множини $A_n = G_n \cap E_n$ будемо мати, що $A_n \subseteq G_n \subseteq \overline{A}_n$. З означення множини A_n випливає, що $f(p) = z_n$ на A_n. Розглянемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0) \in G_n$ і доведемо, що $f(p_0) = z_n$. З відкритості множини G_n у добутку P випливає, що існують такі відкриті околи U і V точок x_0 і y_0 у просторах X і Y відповідно, що $U \times V \subseteq G_n$. Звуження $g = f|_{U \times V}$ — це нарізно неперервне відображення $g\colon U \times V \to Z$, множина $A = A_n \cap (U \times V)$ міститься в добутку $U \times V$ і $U \times V \subseteq \overline{A}$, адже $U \times V \subseteq \overline{A}_n$ і множина $U \times V$ відкрита в P. Тому множина A скрізь щільна у добутку $U \times V$, що є підпростором добутку P. Оскільки U, як відкритий підпростір берівського простору X, є берівським, а V, як підпростір простору Y з першою аксіомою зліченності, задовольняє першу аксіому зліченності, то для відображення $g : U \times V \to Z$ виконуються всі умови теореми 2. Тому $f(p) = g(p) = z_n$ на $U \times V$, зокрема $f(p_0) = z_n$. Таким чином, $f(p) = z_n$ на G_n і тому f є сталою на G_n. Оскільки множина G_n відкрита, то $G_n \subseteq L_c(f)$, а отже, і $G \subseteq L_c(f)$. Звідси випливає, що і множина $L_c(f)$ буде залишковою в P разом із множиною G.

У випадку беровості добутку P множина $L_c(f)$ скрізь щільна в P, адже кожна залишкова множина в берівському просторі є щільною в ньому.

6. Поведінка на горизонталях. Нехай X, Y і Z — топологічні простори, $f : X \times Y \to Z$ — відображення, $b \in Y$, $E = L_c(f) \cup (X \times \{b\})$ і $g = f|_E$. Результати цього пункту будуть стосуватися величини множини

$$C_b(g) = \{x \in X : (x, b) \in C(g)\}.$$

Теорема 4. *Нехай X — довільний топологічний простір, Y і Z — топологічні простори з першою аксіомою зліченності, $f : X \times Y \to Z$ — нарізно неперервне відображення, $b \in Y$, $c \in Z$, $f_b(x) = c$ на X. Тоді множина $C_b(g)$ залишкова в X і скрізь щільна в X, якщо простір X є берівським.*

Доведення. Нехай $\mathcal{V}_n = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ — база відкритих околів точки b у просторі Y і $\mathcal{W}_n = \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ — база околів точки c у просторі Z. Розглянемо множини

$$A_{n,m} = \{x \in X : f^x(V_n) \subseteq W_m\}$$

і $F_{n,m} = \overline{A}_{n,m}$. Із неперервності x-розрізів $f^x : Y \to Z$ у точці b випливає, що

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,m} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{n,m} = X$$

для кожного m. Нехай $G_{n,m} = \operatorname{int} F_{n,m}$. За лемою 3 множина $G_m = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_{n,m}$ є відкритою і залишковою в X для кожного m. Тоді й множина $E_0 = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} G_m$ теж буде залишковою в X.

Доведемо, що $E_0 \subseteq C_b(g)$. Нехай $x_0 \in E_0$ і $p_0 = (x_0, b)$. Покажемо, що $p_0 \in C(g)$. Розглянемо довільний окіл W точки $c = f(p_0)$ у просторі Z і знайдемо такий номер m, що $W_m \subseteq W$. Оскільки $x_0 \in E_0$, то $x_0 \in G_m$. Тому існує такий номер n, що $x_0 \in G_{n,m}$. Покладемо $A = G_{n,m} \cap A_{n,m}$. Нескладно перевірити, що $A \subseteq G_{n,m} \subseteq \overline{A}$. Для кожного $x \in A$ виконується включення $f^x(V_n) \subseteq W_m$. Покладемо $U = G_{n,m}$ і $V = V_n$. Множина U — це відкритий окіл точки x_0 в X, V — відкритий окіл точки b в Y, при цьому $A \subseteq U \subseteq \overline{A}$ і $f(A \times V) \subseteq W$. Множина $U \times V$ — це окіл точки p_0 в $X \times Y$. Покажемо, що $f((U \times V) \cap E) \subseteq W$. Нехай $p = (x, y) \in (U \times V) \cap E$. З'ясуємо, що $f(p) \in W$. Якщо $p \in X \times \{b\}$, то $f(p) = c \in W$. Нехай $p \in L_c(f)$. Тоді f є локально сталою у точці p, а отже, існують такі околи $\widetilde{U}$ точки x в X та $\widetilde{V}$ точки y в Y і точка $\widetilde{c} \in Z$, що $f(p) = \widetilde{c}$ на $\widetilde{U} \times \widetilde{V}$. Оскільки $x \in U$, $y \in V$ і множини U та V відкриті у просторах X і Y відповідно, то $U \cap \widetilde{U}$ і $V \cap \widetilde{V}$ — це околи точок x і y у просторах X і Y відповідно. За побудовою $U \subseteq \overline{A}$. Тому існує точка $u \in A \cap U \cap \widetilde{U}$. Але $f^u(V) \subseteq W_m \subseteq W$, тому, зокрема, $f(u, y) \in W$. Оскільки $(u, y) \in \widetilde{U} \times \widetilde{V}$, а на $\widetilde{U} \times \widetilde{V}$ функція f є сталою, то $f(p) = f(x, y) = f(u, y) \in W$, що і дає потрібне включення. Воно означає, що $p_0 \in C(g)$, а отже, $x_0 \in C_b(g)$.

Таким чином, $E_0 \subseteq C_b(g)$, отже, множина $C_b(g)$ буде залишковою в X, а отже, скрізь щільною в X, якщо простір X є берівським.

Теорема 5. *Нехай X — топологічний простір, Y і Z — топологічні простори з першою аксіомою зліченності, причому Z — це T_1-простір, $b \in Y$, $f\colon X \times Y \to Z$ — нарізно неперервне відображення, у якого $|f_b(X)| \le \aleph_0$. Тоді множина $C_b(g)$ залишкова в X і скрізь щільна в X, якщо простір X є берівським.*

Доведення. Нехай $f_b(X) = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$, $F_n = f_b^{-1}(z_n)$ і $G_n = \operatorname{int} F_n$. Множини F_n замкнені в X, тому що функція $f_b\colon X \to Z$ неперервна і одноточкові множини $\{z_n\}$ замкнені в Z. За лемою 3 відкрита множина $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ є залишковою в X. Крім того, $f_b(x) = z_n$ на G_n, адже $G_n \subseteq F_n$.

Для кожного номера n розглянемо добуток $P_n = G_n \times Y$ і звуження $f_n = f|_{P_n}$. З відкритості множин G_n у X безпосередньо випливає, що і множини P_n відкриті в добутку $P = X \times Y$, отже,

$$L_c(f_n) = L_c(f) \cap P_n$$

для кожного n. Покладемо

$$E_n = L_c(f_n) \cup (G_n \times \{b\}) \qquad \text{і} \qquad g_n = f_n|_{E_n}.$$

Тоді

$$E \cap P_n = (L_c(f) \cup (X \times \{b\})) \cap P_n =$$
$$= (L_c(f) \cap P_n) \cup ((X \times \{b\}) \cap P_n) = L_c(f_n) \cup (G_n \times \{b\}) = E_n,$$

отже, множина E_n є відкритою у підпросторі E. Крім того, $g_n = f_n|_{E_n} = f|_{E_n}$, адже $f_n = f|_{P_n}$, $E_n \subseteq P_n$ і $g|_{E_n} = f|_{E_n}$, бо $g = f|_E$ і $E_n \subseteq E$. Тому $g_n = g|_{E_n}$.

Оскільки множина E_n є відкритою в E, то $C(g_n) \subseteq C(g)$, а отже, і

$$C_b(g_n) = \operatorname{pr}_X\big(C(g_n) \cap (G_n \times \{b\})\big) \subseteq \operatorname{pr}_X\big(C(g) \cap (G_n \times \{b\})\big) = C_b(g)$$

для кожного n. Тому

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_b(g_n) \subseteq C_b(g).$$

Оскільки $f_{n,b}(x) = f(x,b) = f_b(x) = z_n$ на G_n, то за теоремою 4 множина $C_b(g_n)$ є залишковою в G_n, тобто різниця $A_n = G_n \setminus C_b(g_n)$ буде множиною першої категорії в G_n, а отже і в X, для кожного n. Крім того, за побудовою і доповнення $A_0 = X \setminus G$ є першої категорії в X. Але

$$X \setminus C_b(g) \subseteq X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_b(g_n) = (X \setminus G) \cup \left(G \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_b(g_n)\right) =$$
$$= A_0 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_b(g_n)\right) \subseteq A_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Об'єднання $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ є множиною першої категорії в X, тому і доповнення $X \setminus C_b(g)$ — це множина першої категорії в X, а отже, $C_b(g)$ — залишкова множина в X, яка буде і скрізь щільною, якщо простір X є берівським.

7. Про відображення $f: \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$. Символом $\mathbb{L}$ ми позначаємо пряму Зорґенфрея [5, с. 47], тобто множину $\mathbb{R}$ дійсних чисел, наділену топологією, в якій базу околів точки x утворюють проміжки $[x, x+\varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$. Відомо, що пряма Зорґенфрея, як і числова пряма $\mathbb{R}$, — це сепарабельні берівські простори з першою аксіомою зліченності, тільки $\mathbb{R}$ задовольняє і другу аксіому зліченності, а $\mathbb{L}$ — ні, вага простору $\mathbb{L}$ континуальна, тому простір $\mathbb{L}$ не метризовний. Крім того, на відміну від числової прямої, яка є зв'язним простором, компонентами зв'язності прямої Зорґенфрея є одноточкові множини.

Площиною Бінґа ми називаємо топологічний простір $\mathbb{B} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$, де $\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел, а $\mathbb{Q}^+ = \{y \in \mathbb{Q} : y \geq 0\}$, у якому базу околів точки $p = (x, 0)$ утворюють множини $W_\varepsilon(p) = \big\{(u, 0) : u \in \mathbb{Q},\ x - \varepsilon < u < x + \varepsilon\big\}$, де $\varepsilon > 0$, а базу околів точки $p = (x, y)$, $y > 0$, — множини $\{p\} \cup W_\varepsilon(p_1) \cup W_\varepsilon(p_2)$, де p_1 і p_2 — точки прямої $\mathbb{R} \times \{0\}$, такі, що трикутник $p_1 p p_2$ є рівностороннім (див. [5, с. 518; 11]). Відомо, що $\mathbb{B}$ — це зліченний зв'язний гаусдорфовий і нерегулярний простір.

З теорем 3 і 5 випливає така теорема.

Теорема 6. *У кожного нарізно неперервного відображення $f: \mathbb{L}^2 \to \mathbb{B}$ множина $L_c(f)$ точок його локальної сталості відкрита і скрізь щільна в $\mathbb{L}^2$ і для кожної точки $b \in \mathbb{L}$ у звуження $g = f|_E$, де $E = L_c(f) \cup (X \times \{b\})$, множина $C_b(g)$ залишкова і скрізь щільна в $\mathbb{L}$.*

Література

1. *Маслюченко В. К., Мироник О. Д.* Нарізно неперервні відображення і вичерпні простори // Мат. вісн. НТШ. – 2010. – **7**. – С. 98 – 110.
2. *Маслюченко В. К., Мироник О. Д.* Сукупна неперервність відображень зі значеннями у різних узагальненнях метризовних просторів // Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 20 – 26 лютого 2012 р.): Тези доп. – Івано-Франківськ, 2012. – С. 5 – 6.
3. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В., Шишина О. І.* Сукупна неперервність горизонтально квазінеперервних відображень зі значеннями в σ-метризовних просторах // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 1. – С. 42 – 46.
4. *Карлова О. О., Маслюченко В. К., Мироник О. Д.* Площина Бінґа і нарізно неперервні відображення // Мат. студ. – 2012. – **38**, № 2. – С. 188 – 193.
5. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
6. *Sierpiński W.* Sur une propriété de fonctions de deux variables réelles, continues par rapport à chacune de variables // Publ. Math. Univ. Belgrade. – 1932. – **1**. – P. 125 – 128.
7. *Piotrowski Z., Wingler E. Y.* On Sierpiński's theorem on the determination of separately continuous functions // Questions and Answers Gen. Topology. – 1997. – **15**. – P. 15 – 19.
8. *Михайлюк В. В.* Топологія нарізної неперервності та одне узагальнення теореми Серпінського // Мат. студ. – 2000. – **14**, № 2. – С. 193 – 196.
9. *Нестеренко В. В.* Слабка горизонтальна квазінеперервність // Мат. вісн. НТШ. – 2008. – **5**. – С. 177 – 182.
10. *Breckenridge J. C., Nishiura T.* Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces // Bull. Inst. Math. Acad. Sin. – 1976. – **4**, № 2. – P. 191 – 203.
11. *Bing R. H.* A connected countable Hausdorff space // Proc. Amer. Math. Soc. – 1953. – **4**. – P. 474.
12. *Банах Т. О., Маслюченко В. К., Філіпчук О. І.* Приклади нарізно неперервних відображень з суцільними розривами на горизонталях // Мат. вісн. НТШ. – 2017. – **14**. – С. 52 – 63.
13. *Маслюченко В. К., Філіпчук О. І.* Про розриви нарізно неперервних функцій на кривих у площині Зорґенфрея // Буков. мат. журн. – 2018. – **6**, № 1-2. – С. 86 – 89.
14. *Banakh T.* Quasicontinuous and separately continuous functions with values in Maslyuchenko spaces // Topology and Appl. – 2017. – **230**. – P. 353 – 372.
15. *Banakh T.* Continuity points of separately continuous functions with values in $\aleph_0$-spaces // Мат. вісн. НТШ. – 2017. – **14**. – С. 29 – 35.

Одержано 21.01.17