

## ДЕФОРМАЦІЇ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ НА ОРІЄНТОВАНИХ ПОВЕРХНЯХ З МЕЖЕЮ \*

It is considered simple functions with non-degenerated singularities on smooth compact oriented surfaces with the boundary. Authors describe a connection between optimality and polarity of Morse functions,  $m$ -functions and  $mm$ -functions on smooth compact oriented connected surfaces. The concept of an equipped Kronrod–Reeb graph is used to define a deformation in general position. Also, it is obtained the whole list of deformations of simple functions of one of above-described class on torus, 2-dimensional disc with the boundary and on connected sum of two toruses.

Розглядаються деформації гладких функцій із невідродженими особливостями на гладких компактних орієнтованих поверхнях з межею. Описано зв'язок між оптимальністю та полярністю функцій Морса,  $m$ - та  $mm$ -функцій на гладких компактних орієнтованих зв'язних поверхнях. Для задання деформації загального положення використано поняття оснащеного графа Кронрода–Ріба. Також знайдено всі можливі деформації простих функцій одного з вищеописаних класів на торі, диску з діркою і кренделі роду 2.

**1. Вступ.** Одним з основних об'єктів дослідження у багатьох розділах математики є гладкі функції з невідродженими особливостями. Наприклад, М. Морс [1] (див. також [2, 3]) отримав канонічне зображення функцій в околах невідроджених критичних точок у вигляді многочлена другого степеня. В свою чергу, О. В. Болсинов та А. Т. Фоменко ввели поняття атома та  $f$ -атома (див. [4]) для подальшого розгляду пошарової та пошарово оснащеної еквівалентностей. Також А. С. Кронрод [5] та Г. Ріб [6] для класифікації простих функцій Морса на замкнених поверхнях побудували граф, який був узагальнений авторами у роботі [7] на випадок поверхонь з межею. Інші важливі результати для двовимірних многовидів з межею отримано у [2, 3, 8–10].

Нагадаємо, що рівнем  $c \in \mathbb{R}$  функції  $f$  називається множина  $L_c = \{f^{-1}(c)\} := \{p \in M \mid f(p) = c\}$ . Рівень  $c$  називається *критичним*, якщо відповідна лінія рівня  $L_c$  містить критичну точку, і *регулярним* — у протилежному випадку. Функція  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  називається *простою* (див. [8]), якщо на кожному рівні вона має не більше однієї критичної точки. В цій роботі будемо розглядати лише прості функції.

Гладкі функції  $f$  і  $g$ , задані на гладкій компактній поверхні  $M$ , називаються *топологічно еквівалентними*, якщо існують гомеоморфізми  $h_1: M \rightarrow M$ ,  $h_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такі, що  $h_2 \circ f = g \circ h_1$  та  $h_2$  зберігає орієнтацію прямої  $\mathbb{R}$ . Топологічно еквівалентні функції  $f$  і  $g$ , задані на орієнтованій поверхні  $M$ , називатимемо *топологічно  $\mathcal{O}$ -еквівалентними*, якщо (в попередніх позначеннях) гомеоморфізм  $h_1$  зберігає орієнтацію поверхні  $M$ .

Топологічній класифікації функцій із невідродженими критичними точками на поверхнях без межі присвячено праці [11–13]. У свою чергу, на поверхнях з межею топологічну та пошарову еквівалентності  $m$ -функцій описано в роботах [14, 15]. У статті [7] показано, що функції, в яких невідроджені критичні точки лежать на межі і є невідродженими критичними точками обмеження функції на межу поверхні, топологічно еквівалентні  $m$ -функціям.

Однопараметричні сім'ї (деформації) функцій виникають у багатьох розділах як математики, так і її застосувань, наприклад у теорії катастроф [18], теорії особливостей [19], при вивченні просторів функцій [16, 17] тощо.

\* Підтримано Австрійською академією наук у рамках проекту між Австрійською академією наук та НАН України „Принципи астрофізики елементарних частинок та квантової теорії” (2017–2018).

Основною метою даної роботи є опис змін оснащеного графа Кронрода–Ріба, а отже і топологічного типу функцій, при деформаціях загального положення.

**2. Деформації загального положення.** Нехай  $M$  — гладка компактна зв'язна орієнтована поверхня з межею  $\partial M$  (можливо,  $\partial M = \emptyset$ ),  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  — гладка функція (класу  $C^{(\infty)}$ ). Через  $\text{Morse}(M)$  позначатимемо множину всіх функцій Морса на поверхні  $M$ .

**Означення 1.** Функція  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  називається  $m$ -функцією [9], якщо:

- (a) всі критичні точки функції  $f$  є невідродженими і не належать межі поверхні;
- (b) обмеження  $f_{\partial}$  функції  $f$  на межу  $\partial M$  також є функцією Морса.

Критичні точки  $m$ -функції  $f$  будемо називати внутрішніми, а обмеження  $f_{\partial}$  функції на межу — граничними.

**Означення 2.** Функція Морса  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  називається  $mt$ -функцією [2], якщо обмеження  $f_{\partial}$  функції на межу  $\partial M$  також є функцією Морса і всі критичні точки функції  $f$  належать межі поверхні  $\partial M$ .

Нехай  $\Sigma(M)$  — деякий клас простих гладких функцій, заданих на гладкій компактній зв'язній орієнтованій поверхні  $M$ .

**Означення 3.** Функція  $f \in \Sigma(M)$  називається оптимальною [2] на поверхні  $M$  у класі  $\Sigma(M)$ , якщо вона має найменше число критичних точок на  $M$  серед усіх функцій з  $\Sigma(M)$ .

**Означення 4.** Деформацією (гладкою гомотопією) гладкої функції  $f_0 \in \Sigma(M)$  у гладку функцію  $f_1 \in \Sigma(M)$  називатимемо однопараметричну сім'ю відображень  $f_t(x) := F(x, t)$ ,  $F: M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  таку, що:

- (a)  $F_0(x) = f_0(x)$ ,  $x \in M$ ;
- (b)  $F_1(x) = f_1(x)$ ,  $x \in M$ ;
- (c)  $F \in C^{\infty}(M \times [0, 1])$ .

Нехай далі  $\Sigma(M)$  — одна з таких множин:

- (1) прості функції Морса на замкненій поверхні;
- (2) прості  $m$ -функції на компактній поверхні з межею;
- (3) прості  $mt$ -функції на компактній поверхні з межею.

**Означення 5.** Гладкі функції  $f$  і  $g$ , задані на гладких компактних поверхнях  $M$  і  $N$  відповідно, називаються пошарово (пошарово оснащено) еквівалентними [4], якщо існує гомеоморфізм  $\lambda: M \rightarrow N$ , що переводить компоненти лінії рівня функції  $f$  у компоненти лінії рівня функції  $g$  (зберігаючи при цьому напрямки росту функцій).

Розглянемо окіл критичного рівня  $c$  функції  $f$ , який позначимо через  $V = \{x | c - \varepsilon \leq f(x) \leq c + \varepsilon\}$ . Тоді атом ( $f$ -атом) [4] визначається як клас пошарової (пошарово оснащеної) еквівалентності пари  $(U, f|_U)$ , де  $U$  — об'єднання компонент лінійної зв'язності множини  $V$ , які містять критичні точки. Таким чином, кожному атому відповідають два  $f$ -атоми, які отримуються один з одного заміною знака функції. Якщо додатково гомеоморфізм  $\lambda$ , який задає пошарово оснащену еквівалентність функцій  $f$  і  $g$ , заданих на орієнтованих поверхнях  $M$  і  $N$  відповідно, зберігає орієнтацію, то такі функції будемо називати  $\mathcal{O}$ -еквівалентними [7]. Тоді для орієнтованої поверхні клас  $\mathcal{O}$ -еквівалентності пари  $(U, f|_U)$  називатимемо  $\mathcal{O}$ -атомом [7]. Атом ( $\mathcal{O}$ -атом) будемо називати простим (див. [4]), якщо він містить одну критичну точку. Оскільки всі функції, які будуть розглядатись у даній статті, є простими, то в подальшому кожен атом та  $\mathcal{O}$ -атом також будуть простими.

В залежності від індексу критичної точки  $p_0$  та її належності до межі поверхні  $\partial M$  можливими є такі 7 простих атомів та 13 простих  $\mathcal{O}$ - або ж  $f$ -атомів [7]:

(i) 3 атоми, якщо  $p_0 \in \partial M$ :  $A, B$  і  $C$ , кожному з яких відповідають 2  $\mathcal{O}$ -атоми:  $A_1, A_2, B_1, B_2$  і  $C_1, C_2$  (рис. 1);

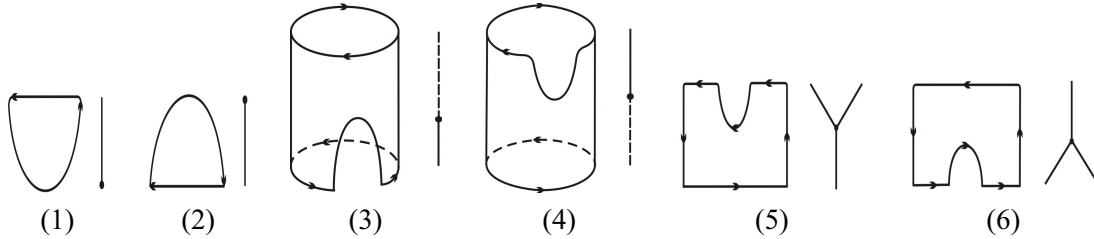


Рис. 1

(ii) 2 атоми, якщо  $p_0 \notin \partial M$  і атом не перетинається з межею поверхні:  $D$  і  $E$ , та відповідно 4  $\mathcal{O}$ -атоми:  $D_1, D_2, E_1, E_2$  (рис. 2);

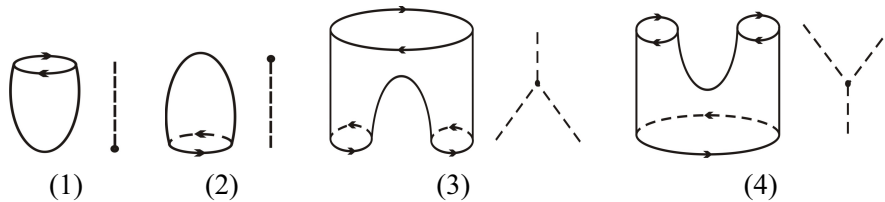


Рис. 2

(iii) 2 атоми, якщо  $p_0 \notin \partial M$  і атом містить частину межі поверхні:  $F$  і  $G$ , яким відповідають 3  $\mathcal{O}$ -атоми:  $F_1, F_2$  і  $G = G_1 = G_2$  (рис. 3).

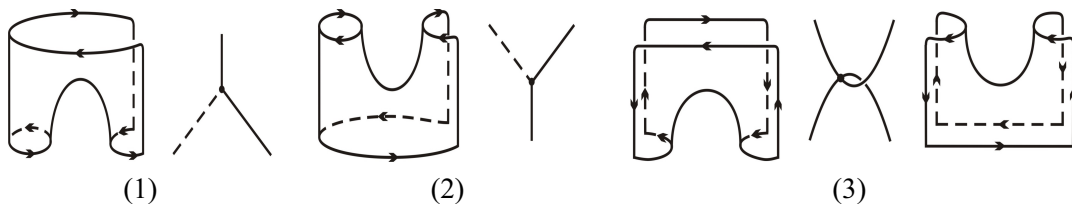


Рис. 3

Для атомів, які є підмножиною площини, їхня орієнтація породжується орієнтацією площини (рис. 1 (1, 2, 5, 6), 3 (3)). В іншому випадку (рис. 1 (3, 4), 2 (1, 2, 3, 4), 3 (1, 2)) зафіксуємо орієнтацію таким чином: проти годинникової стрілки на нижніх колах (частинах кіл) та за годинниковою стрілкою на верхніх колах (частинах кіл).

Нехай  $f \in \Sigma(M)$ . Компоненти лінії рівня функції  $f$  називатимемо шарами, причому для регулярних рівнів вони гомеоморфні відріzkу або колу. Тоді поверхня  $M$  розіб'ється на об'єднання шарів, і отримаємо шарування з особливостями. Шар називатимемо шаром 1- (2-го) типу, якщо він відповідає компоненті лінії рівня, гомеоморфній відріzkу (колу). Розглянемо відношення еквівалентності на  $M$ , в якому точки будуть еквівалентними тоді і тільки тоді, коли вони належать одному шару. Далі, ввівши фактор-топологию в просторі шарів, отримаємо деякий граф

$\Gamma_f$ , в якому ребра будемо зображувати звичайною (штриховою) лінією, якщо вони поставлені у відповідність шарам 1- (2-го) типу. Відповідні ребра називатимемо *ребрами 1- та 2-го типу*. Тоді всі ребра графа розбіються на два типи, і таке розбиття називатимемо *розбиттям ребер* графа  $\Gamma_f$ .

**Означення 6.** *Вершини валентності 3 і 4 графа  $\Gamma_f$  функції  $f$ , яким інцидентні ребра лише 1-го типу, називаються  $Y$ - і  $X$ -вершинами [7] відповідно.*

На графі  $X$ -вершини будемо зображувати, як на рис. 4.

Для кожної  $Y$ -вершини графа  $\Gamma_f$  зафіксуємо циклічний порядок інцидентних їхніх ребер. На рисунку будемо задавати його за допомогою обходу відповідних ребер проти годинникової стрілки. Циклічний порядок у  $X$ -вершині задається нумерацією ребер, як на рис. 4.

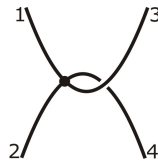


Рис. 4

Для розгляду пошарово оснащеної еквівалентності функцій  $f$  і  $g$  зафіксуємо на графах  $\Gamma_f$  і  $\Gamma_g$  орієнтацію ребер від нижньої до верхньої вершини. Оскільки орієнтація ребер задається цим правилом однозначно на кожному графі, то на графах явно її зображувати не будемо, але вважатимемо, що цю орієнтацію ребер задано.

**Означення 7.** *Оснащеним графом Кронрода–Ріба [7] функції  $f \in \Sigma(M)$  будемо називати граф  $\Gamma_f$  разом із заданим розбиттям, орієнтацією ребер та їхнім циклічним порядком в  $Y$ - та  $X$ -вершинах.*

Також на рис. 1–3 зображено частини оснащених графів Ріба, поставлені у відповідність кожному з  $\mathcal{O}$ -атомів, які задають усі можливі варіанти будови оснащеного графа Кронрода–Ріба в околі його вершин.

**Означення 8.** *Деформацією загального положення називається деформація, для якої виконуються такі умови:*

(1) існує скінченна підмножина  $J \subset (0, 1)$  така, що  $F_t \in \Sigma(M)$ ,  $t \in [0, 1] \setminus J$ , та  $F_t \notin \Sigma(M)$ ,  $t \in J$ ;

(2) для кожного  $t \in J$  виконується одна з таких умов:

(2.1) функція  $f_t$  має критичний рівень, на якому розташовані дві неvierоджені критичні точки (які можуть бути внутрішніми або ж точками на межі), тобто функція  $f_t$  є функцією Морса,  $m$ - або  $mt$ -функцією відповідно;

(2.2) існують точка  $p \in M$  така, що функція  $f_t$  є простою гладкою функцією, всі критичні точки якої є неvierодженими, і така заміна координат  $(x, y$  і окремо  $t)$  в околі точки  $p$ , що:

(2.2.1)  $F(x, y, t) = x^3 \pm tx \pm y^2$  у випадку, якщо  $p \in \text{Int}(M)$ ;

(2.2.2)  $F(x, y, t) = x^3 \pm tx \pm y$  або  $F(x, y, t) = -x^2 + (y - t)^2$ ,  $y \geq 0$  у випадку, якщо  $p \in \partial M$  і клас  $\Sigma(M)$  є класом  $m$ -функцій;

(2.2.3)  $F(x, y, t) = x^3 \pm tx \pm y^2$ ,  $y \geq 0$  у випадку, якщо  $p \in \partial M$  і клас  $\Sigma(M)$  є класом  $mt$ -функцій.

Якщо у пп. (2.1) відповідні дві критичні точки лежать на різних компонентах рівня функції, то граф Ріба при цій деформації не змінюється; у випадку, коли вони лежать на одній компоненті межі, деформації перетворення графа Ріба зображено на рис. 5.

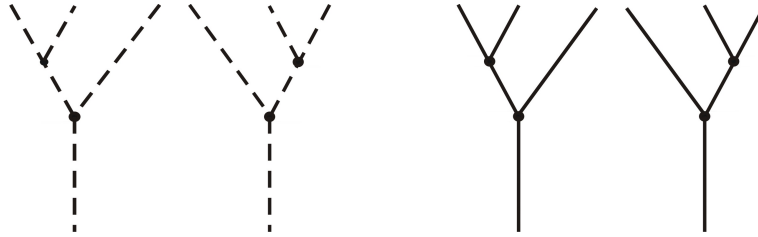


Рис. 5

Деформаціям у пп. (2.2.1), у першій частині пп. (2.2.2) і (2.2.3) відповідають скорочення або введення пар критичних точок сусідніх індексів, а у другій частині пп. (2.2.2) має місце ситуація, коли критична точка рухається до межі поверхні.

З урахуванням поняття корозмірності функції деформації загального положення мають таку властивість: для всіх, крім скінченного числа, значень параметра  $t$  функція  $f_t$  є функцією корозмірності 0, а для скінченного числа значень параметра  $t$  — функцією корозмірності 1.

Нагадаємо поняття корозмірності функції на замкнених поверхнях [20]. Нехай  $M$  — гладка компактна поверхня,  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ,  $CP(f) \in M$  і  $CV(f) \in \mathbb{R}$  — множини критичних точок та критичних значень функції  $f$  відповідно. В околі  $(x, y)$  кожної критичної точки  $p \in CP(f)$  розглянемо ідеал Якобі  $J_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$ .

**Означення 9.** Корозмірністю функції [20]  $f$  називається величина (натуральне число або символ  $\infty$ )

$$\text{codim}(f) = \sum_{p \in CP(f)} c(f, p) - \sum_{c \in CV(f)} d(f, c),$$

де  $c(f, p) = \dim_{\mathbb{R}} C^\infty(M, \mathbb{R})/J_f$ ;  $d(f, p, c) = \min\{k \mid (f - c)^k \in J_f\}$ ,  $c = f(p) \in CV(f)$ ;  $d(f, c) = \sup\{d(f, p, c) \mid p \in L_c\}$ ,  $L_c$  — рівень функції  $f$ .

Зауважимо, що вищеописана деформація буде деформацією загального положення [21].

Для простої гладкої функції  $f$  з множиною критичних точок  $CP(f) = \{p_i \mid i = \overline{1, s}\}$  та критичних значень  $CV(f) = \{c_i = f(p_i) \mid i = \overline{1, s}\}$  останню формулу можна записати у вигляді

$$\text{codim}(f) = \sum_{i=1}^s (c(f, p_i) - d(f, p_i, c_i)).$$

**Означення 10.** Оснащені графи Ріба  $\Gamma_f$  і  $\Gamma_g$  функцій  $f, g \in \Sigma(M)$  називатимемо еквівалентними [7] за ізоморфізмом  $\varphi: \Gamma_f \rightarrow \Gamma_g$  (позначатимемо  $\Gamma_f \sim \Gamma_g$  або  $\Gamma_f \sim_\varphi \Gamma_g$ ), якщо  $\varphi$  задовольняє такі умови:

- (1) зберігає розбиття ребер;
- (2) зберігає циклічні порядки суміжних ребер для кожної X- та Y-вершини;
- (3) зберігає орієнтацію ребер.

**Теорема 1** [7]. Нехай  $M, N$  — гладкі компактні поверхні (з межею),  $f \in \Sigma(M)$ ,  $g \in \Sigma(N)$ . Функції  $f$  і  $g$  є  $\mathcal{O}$ -еквівалентними тоді і тільки тоді, коли їхні оснащені графи Кронрода–Ріба  $\Gamma_f$  і  $\Gamma_g$  еквівалентні.

Нехай  $\Gamma_f$  — оснащений граф Кронрода–Ріба функції  $f \in \Sigma(M)$ . Розглянемо відображення  $\varphi: V(\Gamma_f) \rightarrow 2^{E(\Gamma_f)}$ , яке кожній вершині  $v$  графа  $\Gamma_f$  ставить у відповідність множину всіх інцидентних їй ребер  $\{p_j \mid j = \overline{1, i}\}$  (для деякого  $i$ ), як звичайних  $e_j$ , так і штрихових  $l_j$ , тобто  $p_j = e_j$  або ж  $p_j = l_j$  (за необхідності у позначенні ребра  $p_i$  можна уточнювати інцидентну

йому вершину  $v$  так:  $p_j^v$ ). На множині вершин і ребер графа  $\Gamma_f$  розглянемо два відношення часткового порядку  $\prec \vdash$ , визначені таким чином: 1)  $v_1 \prec v_2$ , якщо вершина  $v_1$  відповідає меншому значенню функції  $f$ , ніж  $v_2$ ; 2)  $p_1 \prec p_2$ , якщо всі точки ребра  $p_1$  відповідають меншим значенням функції  $f$ , ніж всі точки  $p_2$ ; 3) нехай ребра  $p_1$  і  $p_2$ , інцидентні одній  $Y$ -вершині  $v$ , такі, що їх неможливо порівняти за допомогою відношення часткового порядку  $\prec$ . У вершині  $v$  оснащений граф Кронрода–Ріба визначає циклічний порядок. Якщо циклічний порядок проти (за) годинникової стрілки, то будемо казати, що друге (перше) ребро при його проходженні знаходиться лівіше від першого (другого). Тоді  $p_1 \vdash p_2$ , якщо  $p_1$  знаходиться лівіше від  $p_2$ . Отже, відображення  $\varphi$  та відношення  $\prec, \vdash$  однозначно задають граф  $\Gamma_f$ .

**Означення 11.** Простою деформацією оснащеного графа  $\Gamma_f$  Кронрода–Ріба функції  $f \in \Sigma(M)$  називається одна з наступних операцій або обернена до неї (нехай  $v_1, v_2$  – суміжні вершини графа  $\Gamma_f$ ,  $v_1 \prec v_2$ ):

(a) скорочення вершини  $v_2$  й інцидентного їй ребра  $l_1$ , якщо  $\varphi(v_1) = \{e_1 \prec l_1\}$ ,  $\varphi(v_2) = \{l_1\}$ ;

(b) скорочення ребра  $e_2$  та інцидентних йому вершин  $v_1$  та  $v_2$ , якщо  $\varphi(v_1) = \{e_1 \prec e_2 \vdash e_3\}$ ,  $\varphi(v_2) = \{e_2\}$ ;

(c) скорочення ребра  $l_2$  та інцидентних йому вершин  $v_1, v_2$ , якщо  $\varphi(v_1) = \{l_1 \prec l_2 \vdash l_3\}$ ,  $\varphi(v_2) = \{l_2\}$ ;

(d) у випадку, коли  $\varphi(v_1) = \{l_1 \prec l_2 \vdash l_3\}$ ,  $\varphi(v_2) = \{l_2 \prec l_4 \vdash l_5\}$ , підняття вершини  $v_1$  на ребро  $l_3$ , тобто ізоморфізм  $\eta$  такий, що  $\eta(v_1) \prec \eta(v_2)$  та  $\varphi(\eta(v_1)) = \{l_1 \prec l_2 \vdash l_3\}$ ,  $\varphi(\eta(v_2)) = \{l_3 \prec l_4 \vdash l_5\}$ ;

(e) у випадку, коли  $\varphi(v_1) = \{e_1 \prec e_2 \vdash e_3\}$ ,  $\varphi(v_2) = \{e_2 \prec e_4 \vdash e_5\}$ , підняття вершини  $v_1$  на ребро  $e_5$ , тобто ізоморфізм  $\eta$  такий, що  $\eta(v_2) \prec \eta(v_1)$  та  $\varphi(\eta(v_1)) = \{e_1 \prec e_2 \vdash e_3\}$ ,  $\varphi(\eta(v_2)) = \{e_4 \prec e_5 \vdash e_1\}$ ;

(f) у випадку, коли  $\varphi(v_1) = \{e_1 \prec l_1\}$ ,  $\varphi(v_2) = \{l_1 \prec l_2 \vdash l_3\}$ , протягування вершини  $v_1$  на ребро  $l_3$ , тобто ізоморфізм  $\mu$  такий, що  $\mu(v_2) \prec \mu(v_1)$  та  $\varphi(\mu(v_1)) = \{e_1 \prec l_1\}$ ,  $\varphi(\mu(v_2)) = \{e_2 \prec l_2 \vdash e_1\}$ ;

(g) у випадку, коли  $\varphi(v_1) = \{l_1 \prec l_2 \vdash l_3\}$ ,  $\varphi(v_2) = \{l_2 \prec e_1\}$ , протягування вершини  $v_2$  на ребро  $l_1$ , тобто ізоморфізм  $\nu$  такий, що  $\nu(v_2) \prec \nu(v_1)$  та  $\varphi(\nu(v_1)) = \{e_1 \prec l_1 \vdash e_2\}$ ,  $\varphi(\nu(v_2)) = \{l_2 \prec e_1\}$ .

Прості деформації оснащених графів Кронрода–Ріба зображено на рис. 6.

**Означення 12.** Деформацією оснащеного графа  $\Gamma_f$  Кронрода–Ріба функції  $f \in \Sigma(M)$  називається послідовність простих деформацій.

**Теорема 2.** Якщо між функціями  $f$  і  $g$  з класу  $\Sigma(M)$  існує деформація загального положення, то існує деформація між їхніми оснащеними графами Кронрода–Ріба  $\Gamma_f$  і  $\Gamma_g$ .

Доведення випливає з означення та побудови графа Кронрода–Ріба.

**Зауваження 1.** Якщо кожна компонента критичного рівня гомеоморфна відрізку, то граф Кронрода–Ріба можна вкласти у поверхню так, щоб, за винятком досить малих околів критичних рівнів, точки графа були серединами компонент регулярних рівнів, а в околах критичних рівнів кінці так побудованих кривих з'єднувалися кривими з відповідними критичними точками. Тоді якщо деформацію вкладеного оснащеного графа Кронрода–Ріба можна здійснити в поверхні, то між відповідними функціями також існує деформація.

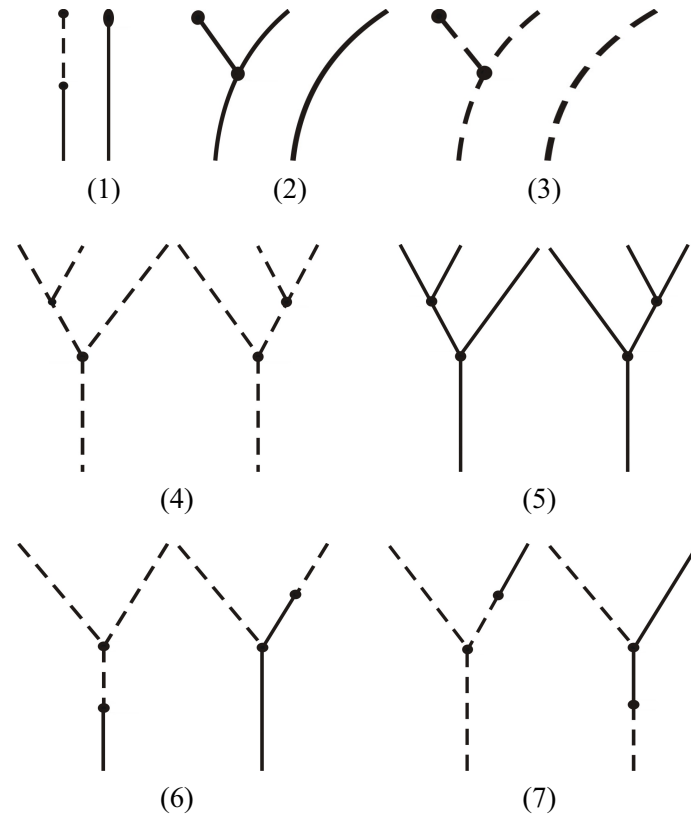


Рис. 6

**Означення 13.** Гладка функція  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  називається полярною, якщо на  $M$  вона має рівно один мінімум і один максимум.

**Теорема 3.** Нехай  $M$  — гладка компактна зв'язна орієнтована поверхня з межею  $\partial M$  (можливо,  $\partial M = \emptyset$ ). Тоді мають місце такі твердження:

- 1) кожна оптимальна  $m$ -функція на  $M$  є полярною функцією на поверхні  $M$ ;
- 2) функція Морса  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  є оптимальною тоді і тільки тоді, коли  $f$  є полярною функцією;
- 3)  $mt$ -функція  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  є оптимальною тоді і тільки тоді, коли  $f$  є полярною функцією.

**Доведення.** 1. Нехай поверхня  $M$  має рід  $g$  і одну компоненту межі. Покажемо, що на такій поверхні оптимальна  $m$ -функція  $f$  має  $2g + 2$  критичні точки. Для цього дослідимо зміну топологічного типу множини  $M_c = f^{-1}(-\infty; c)$  при збільшенні параметра  $c$ . Проходження кожного локального мінімуму додає компоненту зв'язності до множини  $M_c$  і компоненту до множини  $\partial M_c$ . У випадку внутрішньої критичної точки це буде коло, а у випадку критичної точки на межі — відрізок. Проходження внутрішньої сідлової точки не змінює числа компонент  $M_c$  і або додає компоненту межі, або ж зменшує число компонент межі на 1, при цьому або зменшує на 1 число компонент  $M_c$ , або збільшує рід поверхні  $M_c$  на 1. Проходження внутрішньої точки максимуму зменшує число компонент межі  $\partial M_c$  на 1. Для критичних точок на межі, які не є локальними екстремумами, можливі такі варіанти зміни топологічного типу  $M_c$  при проходженні цієї точки: (i) зменшення числа компонент  $M_c$  і компонент межі, гомеоморфних

відрізкам, на 1; (ii) число компонент  $M_c$  не змінюється, а число компонент межі  $\partial M_c$  збільшується на 1; (iii) число компонент  $M_c$  не змінюється, а число компонент межі зменшується на 1 і при цьому рід  $M_c$  збільшується на 1; (iv) число компонент  $M_c$  не змінюється, а число компонент межі, гомеоморфних відрізку, збільшується на 1; (v) число компонент  $M_c$  не змінюється, а компонента межі, гомеоморфна колу, замінюється на відрізок.

Локальний максимум на межі зменшує число компонент, гомеоморфних відрізку, на 1. З вищевикладеного випливає, що для отримання поверхні роду  $g$  з однією компонентою межі потрібно принаймні  $2g + 2$  критичні точки, що є такими: один локальний мінімум на межі, один локальний максимум на межі та  $2g$  внутрішніх сідлових точок (якщо ми хочемо збільшувати рід поверхні за рахунок критичних точок на межі, то для збільшення роду на 1 потрібно чотири такі критичні точки, при цьому збільшення числа локальних мінімумів потребує збільшення числа сідлових точок, і це не змінює рід поверхні).

Отже, оптимальна  $m$ -функція матиме один локальний мінімум і один локальний максимум.

2. *Необхідність.* Аналогічно пункту 1.

*Достатність.* Для функції Морса на замкненій поверхні  $M$  (у даному випадку  $\partial M = \emptyset$ ) виконується рівність Морса [6]  $\chi(M) = c_0 - c_1 + c_2$ , де  $c_i$ ,  $i = \overline{0, 2}$ , — число критичних точок індексу  $i$  функції  $f$ . З останньої рівності випливає, що для полярної функції  $c_1 = c_0 + c_2 - \chi(M) = 2 - \chi(M)$ , оскільки  $c_0 = c_2 = 1$ . Таким чином, число критичних точок функції  $f$  дорівнює  $c_0 + c_1 + c_2 = 4 - \chi(M) = \text{const}$  для фіксованої поверхні  $M$  і не залежить від  $f$ . Це означає, що полярна функція Морса є оптимальною на заданій поверхні.

3. *Необхідність.* Згідно з лемою 1 [2] оптимальна  $mt$ -функція на поверхні має рівно один мінімум і один максимум, тобто є полярною.

*Достатність.* Аналогічно лемі 2 [2] можна показати, що ейлерова характеристика поверхні  $M$  дорівнює  $\chi(M) = \frac{c_0^+ - c_0^- - c_1^+ + c_1^-}{2}$ , де  $c_i^\pm$  — число критичних точок  $mt$ -функції  $f$  індексу  $(i, \pm 1)$ ,  $i = \overline{0, 1}$  (для критичної точки індексу  $(0, \pm 1)$  функція  $f$  має локальне зображення  $f(x, y) = x^2 \pm y^2$  для деякої системи координат  $(x, y)$  в околі вищевказаної критичної точки, а у випадку індексу  $(1, \pm 1)$  функція  $f(x, y) = -x^2 \pm y^2$ ). Для полярної функції  $c_0^+ = c_1^- = 1$ , тоді  $c_0^- + c_1^+ = 2 - 2\chi(M) = \text{const}$ . Таким чином, число критичних точок полярної функції  $f$  дорівнює  $2 + c_0^- + c_1^+ = 4 - 2\chi(M)$  і не залежить від самої функції  $f$ , а лише від ейлерової характеристики поверхні  $M$ , що і доводить оптимальність функції  $f$ .

Теорему доведено.

Обернене твердження до пункту 1 у останній теоремі не є правильним, тобто існує полярна  $m$ -функція, яка не є оптимальною. Прикладом такої функції може бути  $m$ -функція, отримана з функції Морса з двома критичними точками на сфері після видалення зі сфери досить малого (який не містить критичних точок функції) околу деякої регулярної точки. Таким чином, отримана функція має чотири критичні точки, дві з яких є локальними екстремумами на множині, гомеоморфній двовимірному диску. Очевидно, що оптимальна функція на двовимірному диску має дві критичні точки.

Іншим прикладом може бути полярна  $m$ -функція на торі з діркою, що близька до оптимальної  $mt$ -функції, з шістьма критичними точками на межі. Проте якщо розглянути стандартну функцію висоти на торі з чотирма критичними точками і вирізати досить малий окіл траєкторії поля градієнта, що йде з джерела у стік, отримаємо функцію з чотирма критичними точками на торі з діркою (мінімум та максимум на межі та два внутрішніх сідла).



**3. Деформації оптимальних функцій на орієнтованих поверхнях.** Зауважимо, що для полярних (і, як наслідок, для оптимальних) функцій деформації (b) і (c) є неможливими.

**Означення 14.** Деформаційним графом поверхні  $M$  називається граф, вершини якого відповідають класу пошарово оснащеної еквівалентності оптимальних  $mt$ -функцій (для поверхонь з межею) або функцій Морса (для замкнених поверхонь) на поверхні  $M$ , а прості деформації корозмірності 0 між відповідними функціями — ребрам. Даний граф позначатимемо через  $G_D(M)$ .

**Теорема 4 [2].** Оптимальна  $mt$ -функція на орієнтованій поверхні роду  $g$  з  $k$  компонентами межі має  $4g + 2k$  критичних точок, а на неорієнтованій поверхні роду  $g$  з  $k$  компонентами межі —  $2g + 2k$  критичних точок.

**Зауваження 2.** Оптимальна функція Морса на замкненій орієнтованій поверхні роду  $g$  має  $2g + 2$  критичні точки.

Гладку компакту орієнтовану поверхню роду  $i$  із  $j$  компонентами межі позначатимемо через  $F_{i,j}$ . Далі, для простоти викладок, вершини графа Кронрода–Ріба будемо позначати через  $v_j$  і занумеруємо від  $v_1$  до  $v_l$  за зростанням значень функції.

**Теорема 5.** На торі  $F_{1,0}$  існує одна пошарово оснащено нееквівалентна оптимальна функція Морса. Граф  $G_D(F_{1,0})$  є точкою, тобто має єдину вершину і не має ребер.

**Доведення.** Із зауваження 2 випливає, що число критичних точок оптимальної функції Морса на  $F_{1,0}$  дорівнює 4 ( $g = 1$ ). Оскільки оптимальна функція на замкненій поверхні є полярною, то оснащений граф Кронрода–Ріба матиме рівно дві вершини  $v_1$  і  $v_4$  валентності 1 (відповідають локальним екстремумам) і, як наслідок, дві вершини  $v_2, v_3$  валентності 3 (відповідають сідловим критичним точкам). Тому число ребер графа дорівнює 4. Розглянемо шлях  $\alpha$  з вершини  $v_1$  до  $v_4$  (він існує, оскільки граф є зв'язним). Нехай  $e_1$  і  $e_4$  — ребра, яким інцидентні вершини  $v_1$  і  $v_4$  відповідно. Тоді, оскільки інші вершини графа мають валентність 3, іншими кінцями  $e_1$  і  $e_4$  можуть бути тільки відповідно. Такий граф містить чотири вершини і три ребра, тому останнє ребро, згідно з вищевказаними валентностями, з'єднує вершини  $v_2$  і  $v_3$ . Отриманий граф зображено на рис. 7. До отриманого оснащеного графа Кронрода–Ріба жодна з деформацій не може бути застосована, тому деформаційний граф тора  $G_D(F_{1,0})$  складається лише з однієї вершини і не містить ребер, що і доводить твердження теореми.



Рис. 7

**Теорема 6.** На диску з діркою  $F_{0,2}$  існують дві  $\mathcal{O}$ -нееквівалентні оптимальні  $mt$ -функції.

**Доведення.** Згідно з теоремою 4 оснащений граф Кронрода–Ріба оптимальної  $mt$ -функції на  $F_{0,2}$  містить чотири вершини, дві з яких валентності 1, а дві інші мають валентності 3 і є  $Y$ -вершинами. Аналогічно доведенню попередньої теореми можна отримати граф, зображений на рис. 8 (1). Враховуючи наявність  $Y$ -вершин, із останнього графа заміною циклічного порядку у вершині  $v_2$  (або  $v_3$ ) отримаємо граф (рис. 8 (2)), ізоморфний попередньому, але ці два оснащених графа Кронрода–Ріба відповідатимуть різним (з точністю до  $\mathcal{O}$ -еквівалентності)

оптимальним функціям на диску з діркою. Деформації до отриманих графів не можуть бути застосовані, що і доводить дану теорему.

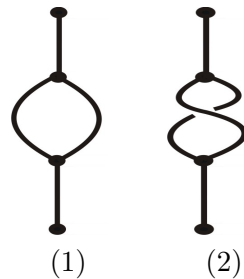


Рис. 8

Зауважимо, що якщо розглянути поняття, аналогічне деформаційному графу, але з точністю до  $\mathcal{O}$ -еквівалентності, то цей граф у випадку диска з діркою складатиметься з двох точок і не міститиме ребер.

**Наслідок.** На диску з діркою існує єдина пошарово оснащено нееквівалентна оптимальна  $tt$ -функція. Граф  $G_D(F_{0,2})$  складається з однієї вершини і не містить ребер.

**Теорема 7.** Існують три пошарово оснащено нееквівалентні оптимальні функції Морса на кренделі  $F_{2,0}$  роду 2. Граф  $G_D(F_{2,0})$  має три вершини і два ребра, які послідовно з'єднують ці вершини.

**Доведення.** Згідно із зауваженням 2 число критичних точок оптимальної функції Морса на кренделі роду 2 дорівнює 6 ( $g = 2$ ). Оскільки оптимальна функція має два екстремуми (дві вершини валентності 1) і чотири сідлові критичні точки (чотири вершини валентності 3), то оснащений граф Кронрода–Ріба матиме сім ребер. Оскільки граф зв'язний, то існує шлях  $\alpha$ , який починається у вершині  $v_1$  і закінчується у  $v_6$ . Розглянемо сідлову вершину  $v_2$ . За побудовою вона належить  $\alpha$ . З  $v_2$  буде виходити ребро, яке не належить  $\alpha$ . Рухаючись за цим ребром вгору (за зростанням значення функції), ми повинні дійти до  $v_6$ , оскільки не існує інших локальних максимумів. Нехай  $\beta$  — шлях від  $v_2$  до першої вершини на шляху  $\alpha$ . Крім вершин  $v_1, v_2, v_6$  і другого кінця шляху  $\beta$  ( $v_j$ ) існують ще дві вершини графа і одне ребро  $\gamma$ , що не належить  $\alpha, \beta$ . За умовою ребро  $\gamma$  не може починатися нижче вершини  $v_2$ . Якщо обидва кінці  $\gamma$  менші за  $v_j$  та одночасно належать або  $\alpha$ , або ж  $\beta$ , то отримаємо граф, зображений на рис. 9 (3). Якщо ж одна з вершин менша, а друга більша за  $v_j$ , то отримаємо граф, зображений на рис. 9 (2). Якщо ж обидві вершини менші за  $v_j$  і одна з них належить  $\alpha$ , а інша —  $\beta$ , то також отримаємо граф, зображений на рис. 9 (2). Якщо ж обидва кінці  $\gamma$  більші за  $v_j$ , то отримаємо граф, зображений на рис. 9 (1).

Оскільки розглядаються тільки оптимальні і, як наслідок (див. теорему 3), полярні функції, то у отриманих графів можливий лише єдиний тип деформацій (рис. 6 (4)). Застосувавши такі деформації до графа на рис. 9 (1), отримаємо граф, зображений на рис. 9 (2). Аналогічно з графа на рис. 9 (3) отримаємо граф, зображений на рис. 9 (2), а отже, з графа на рис. 9 (2) можна отримати граф, зображений на рис. 9 (1) або ж на рис. 9 (3). Тому граф деформацій загального положення має три вершини і два ребра, які послідовно з'єднують ці вершини.

Теорему доведено.

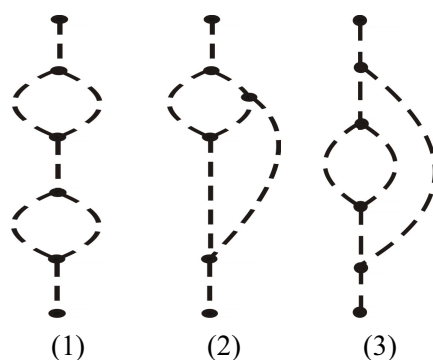


Рис. 9

**4. Висновок.** У даній роботі наведено критерій існування деформації загального положення між  $m$ -функціями в термінах оснащеного графа Кронрода–Ріба. Встановлено зв'язок між оптимальністю і полярністю функцій Морса,  $m$ - і  $mm$ -функцій на гладких компактних орієнтованих зв'язних поверхнях. Знайдено число пошарово оснащено нееквівалентних оптимальних функцій Морса на торі та на кренделі роду 2, яке дорівнює 1 і 3 відповідно. Також на диску з діркою існують єдина пошарово оснащена та три  $\mathcal{O}$ -нееквівалентні оптимальні  $mm$ -функції. За допомогою введеного поняття деформаційного графа наведено зв'язок між вищеописаними функціями на відповідних поверхнях.

Автори сподіваються, що отримані у даній статті результати можна буде узагальнити на випадок неорієнтованих поверхонь з межею, а також тривимірних тіл.

### Література

1. Morse M. The calculus of variations in the large. – New York, 1934. – 352 p.
2. Гладий Б. І., Пришляк О. О. Функції з невідродженими критичними точками на межі поверхні // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 1. – С. 28–37.
3. Borodzik M., Nemethi A., Ranicki A. Morse theory for manifolds with boundary // Algebraic and Geom. Topol. – 2016. – **16**, № 2. – P. 971–1023.
4. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация: В 2 т. – Ижевск: Удмур. ун-т, 1999. – Т. 1. – 444 с.
5. Кронрод А. С. О функциях двух переменных // Успехи мат. наук. – 1950. – **5**, № 1(35). – С. 24–112.
6. Reeb G. Sur les points singuliers de une forme de Pfaff complètement intégrable ou d'une fonction numérique // Comp. Rend. Hebdomadaires Seances Acad. Sci. – 1954. – **222**. – P. 847–849.
7. Hladysh B. I., Prishlyak O. O. Simple Morse functions on an oriented surface with the boundary // J. Math. Phys., Anal., Geom. – 2019.
8. Hladysh B. I., Prishlyak A. O. Topology of functions with isolated critical points on the boundary of a 2-dimensional manifold // SIGMA. Symmetry, Integrability and Geom.: Methods and Appl. – 2017. – **13**, № 050. – 17 p.
9. Jankowski A., Rubinsztein R. Functions with non-degenerate critical points on manifolds with boundary // Comment. Math. – 1972. – **16**. – P. 99–112.
10. Kadubovskiy A. An. Recounting of topologically nonequivalent smooth functions on closed surfaces // Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine. – 2015. – **12**, № 6. – P. 105–145.
11. Шарко В. В. Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 5. – С. 687–700.
12. Prishlyak A. O. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface // Topology and Appl. – 2002. – **119**, № 3. – P. 257–267.

13. *Polulyakh A. O.* On conjugate pseudoharmonic functions // Геометрія, топологія та їх застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **2**, № 2. – С. 505–517.
14. *Максименко С. І.* Еквівалентність  $m$ -функцій на поверхнях // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 8. – С. 1129–1135.
15. *Пришляк О. О., Пришляк К. І., Міщенко К. І., Лукова Н. В.* Класифікація простих  $m$ -функцій на орієнтованих поверхнях // Журн. обчислюв. та прикл. математики. – 2011. – **104**, № 1. – С. 1–12.
16. *Кудрявцева Е. А.* Топологія пространств функцій Морса на поверхностях // Мат. заметки. – 2012. – **92**, № 1. – С. 219–236.
17. *Максименко С. І., Феценко Б. Г.* Гомотопические свойства пространств гладких функций на 2-торе // Укр. мат. журн. – 2014. – **64**, № 9. – С. 1205–1212.
18. *Арнольд В. И.* Теория катастроф. – 3-е изд., доп. – М.: Наука, 1990. – 128 с.
19. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, акустик и волновых фронтов. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
20. *Sergeraert F.* Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications // Ann. Sci. Ecole Norm. Supér. – 1972. – **5**, № 4. – P. 599–660.
21. *Jongen Th. H., Jonker P., Twilt F.* Nonlinear optimization in finite dimensions. Morse theory, Chebyshev approximation, transversality, flows, parametric aspects. – Springer-Sci.+Business Media, 2000. – **47**. – 517 p.

Одержано 19.09.18,  
після доопрацювання – 16.01.19