УДК 517.956

С. С. Жуматов (Ин-т математики и мат. моделирования М-ва образования и науки Республики Казахстан, Алматы)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОГРАММНОГО МНОГООБРАЗИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

We study the absolute stability of the program manifold of basic control systems with variable coefficients and stationary nonlinearities. The conditions of stability of basic systems are investigated in a neighborhood of a given program manifold. The nonlinearities satisfy the conditions of local quadratic relationship. Sufficient conditions for the absolute stability of the program manifold with respect to a given vector function are established by constructing the Lyapunov function. A method used to select the Lyapunov matrix is specified.

Розглядається абсолютна стійкість програмного многовиду основних систем керування зі змінними коефіцієнтами і стаціонарними нелінійностями. Умови стійкості основних систем досліджено в околі заданого програмного многовиду. Нелінійності задовольняють умови локального квадратичного зв'язку. Достатні умови абсолютної стійкості програмного многовиду відносно заданої вектор-функції отримано з допомогою побудови функції Ляпунова. Вказано конкретний метод підбору матриці Ляпунова.

1. Введение и постановка задачи. Обратные задачи теории обыкновенных дифференциальных уравнений интенсивно развиваются начиная со второй половины XX века. Общий метод построения систем дифференциальных уравнений, имеющих заданное интегральное многообразие, установлен в работе [1]. В дальнейшем этот метод получил развитие на основе обобщения классических обратных задач динамики. Эти задачи являются исходными в теории управления движением материальных систем различной физической природы и конструкции, которые включают в себя аналитическое построение систем программного движения, общую задачу построения систем дифференциальных уравнений, построение систем автоматического управления [2 – 19]. В работах [20 – 24] обратные задачи динамики рассматривались в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито. Подробный обзор литературы приведен в работах [2, 4, 11, 15, 18, 19].

Современные системы автоматического управления представляют собой весьма разнообразные по конструкции устройства, составляя сложный комплекс взаимодействующих звеньев. Среди этих систем особо выделяются системы дифференциальных уравнений, в которых в качестве программного задаются движения по заданной кривой, по поверхности и в общем случае по многообразию. При решении обратных задач динамики систем автоматического управления основным и обязательным является требование устойчивости программного движения при наличии нестабильных, исполнительных элементов и отклонений системы от заданной программы в начальный момент времени.

Вопросы устойчивости и неустойчивости программного многообразия систем автоматического управления, синтеза систем управления по заданным свойствам движения в виде некоторого многообразия, качественные свойства программного многообразия различных систем управления как диссипативность, конвергентность относительно некоторой заданной функции рассматривались в [5 – 18].

Проведенный анализ показывает, что существенная часть работ посвящена исследованию программного многообразия систем управлений с постоянными коэффициентами. В то же время математическое моделирование различных физических, химических, биологических, экологических и т. д. явлений в большинстве случаев приводит к необходимости исследования систем управлений с переменными коэффициентами. Это движение точки переменной массы, подвижные объекты, в которых происходит изменение массы и момента с течением времени, в частности летательные аппараты на реактивной тяге, имеющие переменную массу [25–27].

В данной работе мы исследуем устойчивость программного многообразия систем управления с переменными коэффициентами.

Пусть система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

где $x \in R^n,\ f \in R^n$, имеет линейное $(n-s)$-мерное многообразие $\Omega(t)$, определяемое уравнением

$$\Omega(t) \equiv \omega(t, x) = 0, \tag{2}$$

где $\omega \in R^s,\ s \leq n.$

В пространстве R^n введем область $G(R)$ следующим образом:

$$G(R) = \big\{(t, x) \colon t \geq t_0 \wedge \|\omega\| < R < \infty\big\}. \tag{3}$$

Предположим, что при всех $t \geq t_0$ выполнены следующие условия:

1) вектор-функция $f(t, x)$ непрерывна по всем переменным и удовлетворяет условиям Липшица относительно $x \in G$;

2) вектор-функция ω и ее частные производные непрерывны в некоторой замкнутой ограниченной односвязной области $G \subset R^n$, содержащей многообразие $\Omega(t)$;

3) ранг функциональной матрицы $\operatorname{rank}\left\|\dfrac{\partial\omega}{\partial x}\right\| = s$ во всех точках многообразия $\Omega(t)$.

Следует отметить, что заданная программа осуществляется точно лишь в случае, когда $\omega(t_0, x_0) = 0$. Но эти условия не всегда выполняются, так как имеются начальные и постоянно действующие возмущения. Поэтому целесообразно исследовать на предмет устойчивости само программное многообразие относительно некоторой заданной функции.

Определение 1. *Множество* $\Omega(t)$ *называется интегральным многообразием уравнения* (1), *если из* $\omega(t_0, x_0) \in \Omega(t_0)$ *следует, что* $\omega(t, x(t, t_0, x_0)) \in \Omega(t)$ *для всех* $t \geq t_0$.

Заметим, что мы здесь используем термин „программное многообразие”, равносильный понятию „интегральное многообразие”.

Составляя необходимые и достаточные условия того, что заданное многообразие является интегральным для системы (1), получаем

$$\dot{\omega} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial x} f(t, x) = F(t, x, \omega), \tag{4}$$

где $F \in R^s$ — вектор-функция Еругина [1], удовлетворяющая условию $F(t, x, 0) \equiv 0$.

Принцип выбора функции Еругина $F(t, x, \omega)$ состоит в том, что она должна быть равна нулю на многообразии $\Omega(t)$, а вне многообразии может принимать произвольное значение.

Из соотношения (4) получаем следующую систему алгебраических уравнений для определения правой части системы (1):

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial x} f(t, x) = F(t, x, \omega),$$

или

$$H(t)\dot{x} = F(t, x, \omega) - \frac{\partial \omega}{\partial t}, \tag{5}$$

где $H(t) = \dfrac{\partial \omega}{\partial x}$ — $(s \times n)$-матрица Якоби. При $s = n$ и вырожденной матрице $H(t)$ линейная система (5) приводится к центральной канонической форме [28, 29]. Достаточные условия устойчивости программного многообразия для вырожденных линейных систем управления установлены в работе [12].

Рассмотрим задачу построения по заданному программному многообразию $\Omega(t) \equiv \omega(t, x) = 0$ устойчивой системы автоматического управления с переменными коэффициентами следующей структуры [10]:

$$\dot{x} = f(t, x) - b(t)\xi, \qquad \xi = \varphi(\sigma), \qquad \sigma = p^T(t)\omega, \quad t \in I = [0, \infty), \tag{6}$$

где $f \in R^n$ — некоторая n-вектор-функция, удовлетворяющая условиям существования решения; $b \in \Xi^{n\times 1}$, $p \in \Xi^{s\times 1}$ — матрицы; $\xi \in R^r$ — вектор управления по отклонению от заданной программы, удовлетворяющий условиям

$$\varphi(0) = 0 \wedge 0 \leq \sigma\varphi(\sigma) \leq k\sigma^2 \quad \forall \sigma \neq 0, \quad 0 < k \leq \infty. \tag{7}$$

Здесь Ξ — класс непрерывно дифференцируемых и ограниченных по норме матриц.

Известно, что вектор-функция $\varphi(\sigma)$ по существу является функцией управления по отклонению от программы, так как на программном многообразии $\Omega(t)$ функция $\varphi(\sigma)$ равна нулю и уравнение (5) принимает вид (1). Следовательно, многообразие $\Omega(t)$ является интегральным многообразием и для (6).

Если функцию Еругина $F(t, x, \omega)$ в соотношении (4) выберем линейной относительно вектор-функции ω:

$$F = -A(t)\omega, \tag{8}$$

где $-A(s \times s)$ — устойчивая матрица, то, продифференцировав многообразие $\Omega(t)$ по времени t в силу системы (5) с учетом соотношений (4), получим систему относительно вектор-функции ω:

$$\dot{\omega} = -A(t)\omega - H(t)b(t)\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \qquad \sigma = p^T(t)\omega, \qquad H = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad t \in I = [0, \infty), \tag{9}$$

нелинейность $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условиям (7).

Определение 2. *Программное многообразие $\Omega(t)$ называется абсолютно устойчивым относительно вектор-функции ω, если оно асимптотически устойчиво в целом для всех $\omega(t_0, x_0)$ и функции $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющей условиям локальной квадратичной связи.*

Постановка задачи. *Получить условия абсолютной устойчивости программного многообразия $\Omega(t)$ основных систем управления с переменными коэффициентами относительно вектор-функции $\omega(t, x)$.*

2. Вспомогательные результаты. Каноническая и нормальная формы системы (9). Приведем сначала систему (9) к канонической и нормальной формам. Для этого составим характеристический полином

$$\Delta[\lambda(t)] = \det \|A(t) + \lambda(t)E\| = \sum_{s=1}^{n} a_s(t)\lambda^{n-s}(t). \tag{10}$$

Пусть $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ — непересекающиеся корни полинома (10).

Построим невырожденную матрицу

$$T_i(t) = \begin{Vmatrix} A_{i1}[\varrho_1(t)] & \ldots & A_{in}[\varrho_1(t)] \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{i1}[\varrho_n(t)] & \ldots & A_{in}[\varrho_n(t)] \end{Vmatrix} \quad \text{для всех} \;\; i_1^n,$$

составленную из алгебраических дополнений $A_{ij}[\varrho_1(t)]$ элемента $\varrho\delta_{ij} - a_{ji}$ в определителе

$$\Delta[\varrho(t)] = \det \big\|\varrho(t)E - A(t)\big\| = 0. \tag{11}$$

Тогда имеет место равенство

$$S(t)T(t) = T(t)A(t),$$

или

$$S(t) = T(t)A(t)T^{-1}(t),$$

где

$$S(t) = \operatorname{diag} \big\|\varrho_1(t), \ldots, \varrho_n(t)\big\|.$$

Здесь $\varrho_1(t), \ldots, \varrho_n(t)$ — непересекающиеся корни уравнения (11).

С помощью преобразования

$$\nu = T(t)\omega$$

систему (9) приведем к канонической форме

$$\dot{\nu} = -[S(t) + D(t)]\nu - d(t)\xi, \tag{12}$$
$$\xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = c^T(t)\omega,$$

где

$$d(t) = T(t)H(t)b(t), \qquad D(t)(t) = \dot{T}(t)T^{-1}(t),$$
$$c^T(t) = T^{-T}(t)p(t).$$

Для приведения системы (9) к нормальной форме воспользуемся соотношением

$$\widetilde{P}(t)Q(t) = Q(t)A(t), \tag{13}$$

где

$$\widetilde{P}(t) = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ a_n(t) & a_{n-1}(t) & a_{-2}n(t) & \dots & a_2(t) & a_1(t) \end{Vmatrix}, \tag{14}$$

$$Q(t) = \begin{Vmatrix} Q_1(t) \\ \vdots \\ Q_n(t) \end{Vmatrix}, \qquad Q_i(t) = \begin{Vmatrix} q_{i1}(t), \dots, q_{in}(t) \end{Vmatrix} \quad \text{для всех} \quad i_1^n.$$

Здесь $Q_2(t), \dots, Q_n(t)$ определяются рекуррентными формулами

$$Q_s(t) = -\begin{Vmatrix} Q_{s-1}(t)A_1(t), \dots, Q_{s-1}(t)A_n(t) \end{Vmatrix}$$

и выполняются соотношения

$$a_n(t)Q_1^\star(t) + a_{n-1}(t)Q_2^\star(t) + \dots + a_1(t)Q_n^\star(t) = \begin{Vmatrix} Q_n(t)A_1(t) \\ \vdots \\ Q_n(t)A_1(t) \end{Vmatrix}.$$

Принимая во внимание соотношение (13), находим

$$\widetilde{P}(t) = Q(t)A(t)Q^{-1}(t).$$

С помощью преобразования

$$\nu = Q(t)\omega$$

систему (9) приводим к нормальной форме

$$\begin{gathered} \dot{\nu} = -[\widetilde{P}(t) + M(t)]\nu - m(t)\xi, \\ \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = l^T(t)\omega, \end{gathered} \tag{15}$$

где переменная матрица $\widetilde{P}(t)$ имеет структуру (14), а векторы $m(t)$, $M(t)$ и $l(t)$ определяются следующим образом:

$$\begin{gathered} m(t) = Q(t)b(t), \quad M(t) = \dot{Q}(t)Q^{-1}(t), \\ l^T(t) = Q^{-T}(t)p(t). \end{gathered}$$

3. Основные результаты. Теперь рассмотрим общую задачу построения по заданному программному многообразию $\Omega(t) \equiv \omega(t,x) = 0$ системы автоматического управления с переменными коэффициентами следующей структуры [3]:

$$\dot{x} = f(t,x) - B(t)\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \qquad \sigma = P^T(t)\omega, \quad t \in I = [0, \infty), \tag{16}$$

где $f \in R^n$ — некоторая n-вектор-функция, удовлетворяющая условиям существования решения; $B \in \Xi^{n\times r}$, $P \in \Xi^{s\times r}$ — матрицы; $\xi \in R^r$ — вектор-функция управления по отклонению от заданной программы, удовлетворяющая условиям локальной квадратичной связи

$$\varphi(0) = 0 \wedge \varphi^T(\sigma)\theta(t)(\sigma - K^{-1}(t)\varphi(\sigma)) > 0 \quad \forall\sigma \neq 0,$$

$$K_1(t) \leq \frac{\partial\varphi(\sigma)}{\partial\sigma} \leq K_2(t),$$

$$\big[\theta = \operatorname{diag}\|\theta_1, \ldots, \theta_r\|\big] \in \Xi^{r\times r}, \qquad \big[K(t) = K^T(t) > 0\big] \in \Xi^{r\times r},$$

$$\big[K_i(t) = K_i^T(t) > 0,\ i = 1, 2\big] \in \Xi^{r\times r}.$$

Учитывая, что программное многообразие $\Omega(t)$ является интегральным и для системы (16), интегрируя по времени t и предполагая, что функция Еругина имеет вид (8), получаем

$$\dot\omega = -A(t)\omega - H(t)B(t)\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \qquad \sigma = P^T(t)\omega, \quad t \in I = [0, \infty), \tag{17}$$

$$\varphi(0) = 0 \wedge \varphi^T(\sigma)\theta(t)(\sigma - K^{-1}(t)\varphi(\sigma)) > 0 \quad \forall\sigma \neq 0. \tag{18}$$

3.1. Асимптотическая устойчивость программного многообразия линейной системы с переменными коэффициентами. Сначала рассмотрим линейную неавтономную систему относительно вектор-функции ω:

$$\dot\omega = -A(t)\omega, \quad t \in I = [0, \infty). \tag{19}$$

Если для нее построим функцию Ляпунова вида

$$V(t, \omega) = \omega^T L(t)\omega, \tag{20}$$

то производная по времени t в силу системы (19) будет иметь вид

$$W(t, \omega) = \omega^T G(t)\omega,$$

где $G(t) = G^T(t)$ — симметричная матрица вида

$$G(t) = -\frac{dL(t)}{dt} + L(t)A(t) + A^T(t)L(t). \tag{21}$$

Пусть матрица $A(t)$ принадлежит $\Xi^{s\times s}$ и является невырожденной, матрицы $A(t)$ и $Q(t)$ удовлетворяют матричному равенству

$$A^T(t)Q(t) = Q^T(t)A(t), \tag{22}$$

где $Q(t) \in \Xi^{s\times s}$ — произвольная матрица. Тогда матрицу $L(t)$ можно взять в виде

$$L(t) = Q(t)A^{-1}(t). \tag{23}$$

В силу (23) из соотношений (21) получаем

$$G(t) = Q(t) + Q^T(t) - \frac{dL(t)}{dt}A^{-1}(t) - Q(t)\frac{dA^{-1}(t)}{dt}.$$

Согласно теореме Кронекера–Капелли, всегда существует матрица $Q(t)$, удовлетворяющая уравнению (22).

Теорема 1. *Пусть функция Еругина* $F(t, x, \omega)$ *имеет вид* (8). *Тогда если матрица* $A(t)$ *системы* (19) *является невырожденной и вместе с матрицей* $Q(t)$ *удовлетворяют равенству* (22), *то, какова бы ни была наперед заданная квадратичная форма с матрицей* $G(t)$, *существует единственная квадратичная форма* $W(t)$ *с матрицей* $L(t)$, *удовлетворяющая уравнению*

$$-\frac{dV(t,\omega)}{dt}\bigg|_{(19)} = W(t,\omega) = \omega^T G(t)\omega.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция Еругина* $F(t, x, \omega)$ *имеет вид* (8). *Тогда для асимптотической устойчивости в целом программного многообразия* $\Omega(t)$ *линейной системы с переменными коэффициентами относительно вектор-функции* ω *достаточно выполнения соотношений*

$$L(t) = Q(t)A^{-1}(t) >> 0 \wedge G(t) >> 0, \quad t \in I = [0, \infty).$$

3.2. Абсолютная устойчивость программного многообразия основной системы управления. На основании обобщенной теоремы А. М. Ляпунова [10, с. 226] справедлива следующая теорема.

Основная теорема. *Если существует непрерывно дифференцируемая функция* $V(t, \omega)$ *в области* (3), *положительно определенная и допускающая высший предел в целом, т. е. допускающая бесконечно малый высший предел при* $\|\omega\| \to 0$ *и бесконечно большой низший предел при* $\|\omega\| \to \infty$, *такая, что ее производная*

$$-\frac{dV}{dt}\bigg|_{(17)} = W(t,\omega)$$

является функцией, определенно положительной при любой функции $\varphi(\sigma)$, *удовлетворяющей условиям* (18), *то программное многообразие* $\Omega(t)$ *абсолютно устойчиво относительно вектор-функции* $\omega(t, x)$.

Теперь рассмотрим систему (17), (18). Для нее построим функцию Ляпунова вида (20). Дифференцируя ее по времени t в силу системы (17), (18) и применяя S-процедуру, получаем

$$-\frac{dV(t,\omega)}{dt} = W(t,\omega) = \omega^T G(t)\omega + 2\omega^T G_1(t)\xi + \xi^T G_2(t)\xi + S > 0,$$

где

$$G(t) = -\frac{dL(t)}{dt} + A^T(t)L(t) + L(t)A(t),$$

$$G_1(t) = L(t)H(t)B(t) - \frac{1}{2}P(t)\theta(t), \qquad G_2(t) = \theta(t)K^{-1}(t),$$

а S определяется из формулы (18):

$$S = \varphi^T(\sigma)\theta(t)(\sigma - K^{-1}(t)\varphi(\sigma)) > 0 \quad \forall \sigma \neq 0.$$

Введем обозначения

$$z = \begin{Vmatrix} \omega \\ \xi \end{Vmatrix}, \qquad G_0(t) = \begin{Vmatrix} G(t) & G_1(t) \\ G_1^T(t) & G_2(t) \end{Vmatrix}.$$

Для того чтобы $W(t,\omega)$ была положительно определенной, достаточно выполнения условия $G_0(t) >> 0$.

Тогда на основании основной теоремы справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть функция Еругина* $F(t,x,\omega)$ *имеет вид* (8), *а нелинейность* $\varphi(\sigma)$ *удовлетворяет условиям* (18). *Тогда для абсолютной устойчивости программного многообразия* $\Omega(t)$ *основной системы автоматического управления с переменными коэффициентами относительно вектор-функции* ω *достаточно выполнения соотношений* $L(t) >> 0$, $G_0(t) >> 0$, *где матрица* $L(t)$ *определяется формулой* (23), *а* $Q(t)$ *находится из выражения* (22).

При выполнении равенства

$$G_1(t) = L(t)H(t)B(t) - \frac{1}{2}P(t)\theta(t) = 0 \tag{24}$$

получаем

$$-\frac{dV(t,\omega)}{dt} = W(t,\omega) = \omega^T G(t)\omega + \xi^T G_2(t)\xi + S > 0.$$

Тогда для того чтобы $W(t,\omega)$ было положительно определенной, достаточно выполнения условия $G_0(t) >> 0$, где

$$z = \begin{Vmatrix} \omega \\ \xi \end{Vmatrix}, \qquad G_0(t) = \begin{Vmatrix} G(t) & 0 \\ 0 & G_2(t) \end{Vmatrix} >> 0 \vee G(t) >> 0 \wedge G_2(t) >> 0. \tag{25}$$

***Следствие* 1.** *Пусть функция Еругина* $F(t,x,\omega)$ *имеет вид* (8), *а нелинейность* $\varphi(\sigma)$ *удовлетворяет условиям* (18). *Тогда для абсолютной устойчивости программного многообразия* $\Omega(t)$ *основной системы автоматического управления с переменными коэффициентами относительно вектор-функции* ω *достаточно выполнения соотношений* $L(t) >> 0$ *и* (24), *а также условий* (25), *где матрицы* $L(t)$ *и* $Q(t)$ *определяются формулами* (23) *и* (22) *соответственно.*

***Следствие* 2.** *Пусть функция Еругина* $F(t,x,\omega)$ *имеет вид* (8), *а нелинейность* $\varphi(\sigma)$ *удовлетворяет условиям* (7). *Тогда для абсолютной устойчивости программного многообразия* $\Omega(t)$ *основной системы автоматического управления* (9) *относительно вектор-функции* ω *достаточно выполнения соотношений* $L(t) >> 0$, $G_0(t) >> 0$, *где матрица* $L(t)$ *определяется формулой* (23), *а* $Q(t)$ *находится из выражения* (22). *Здесь*

$$G_1(t) = L(t)H(t)b(t) - \frac{1}{2}p(t)\mu(t), \qquad G_2(t) = \mu(t)k^{-1}(t), \qquad S = \mu(t)(\sigma - k^{-1}\xi)\xi.$$

***Следствие* 3.** *Пусть функция Еругина* $F(t,x,\omega)$ *имеет вид* (8), *а нелинейность* $\varphi(\sigma)$ *удовлетворяет условиям* (7). *Тогда для абсолютной устойчивости программного многообразия* $\Omega(t)$ *основной системы автоматического управления* (12) *относительно вектор-функции* ω *достаточно выполнения соотношений* $L(t) >> 0$, $G_0(t) >> 0$, *где матрица* $L(t)$ *определяется формулой*

$$L(t) = Q(t)[S(t) + D(t)]^{-1},$$

а $Q(t)$ *находится из выражения*

$$[S(t) + D(t)]^T(t)Q(t) = Q^T(t)[S(t) + D(t)].$$

Здесь

$$G_1(t) = L(t)H(t)d(t) - \frac{1}{2}c(t)\mu(t), \qquad G_2(t) = \mu(t)k^{-1}(t), \qquad S = \mu(t)(\sigma - k^{-1}\xi)\xi.$$

***Следствие* 4.** *Пусть функция Еругина $F(t,x,\omega)$ имеет вид* (8), *а нелинейность $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условиям* (7). *Тогда для абсолютной устойчивости программного многообразия $\Omega(t)$ основной системы автоматического управления* (15) *относительно вектор-функции ω достаточно выполнения соотношений $L(t) >> 0$, $G_0(t) >> 0$, где матрица $L(t)$ определяется формулой*

$$L(t) = Q(t)\big[\widetilde{P}(t) + M(t)\big]^{-1},$$

а $Q(t)$ находится из выражения

$$\big[\widetilde{P}(t) + M(t)\big]^T(t)Q(t) = Q^T(t)\big[\widetilde{P}(t) + M(t)\big].$$

Здесь

$$G_1(t) = L(t)H(t)m(t) - \frac{1}{2}l(t)\mu(t), \qquad G_2(t) = \mu(t)k^{-1}(t), \qquad S = \mu(t)(\sigma - k^{-1}\xi)\xi.$$

Замечание. Пусть система дифференциальных уравнений (1) при $n = 3$ имеет интегральное многообразие, определяемое как пересечение „перемещающихся” поверхностей:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= x_1 + x_2 + \frac{t}{t+1} = 0, \\ \omega_2 &= \frac{t}{t+1}x_2 + x_3 + 1 = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Выберем $F_1,\ F_2$ из (8) в виде

$$F_1 = -\frac{t+1}{t+2}\omega_1, \qquad F_2 = -\omega_2. \tag{27}$$

Тогда матрица $A(t)$ примет вид

$$A(t) = \begin{Vmatrix} \dfrac{t+1}{t+2} & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{28}$$

С учетом (28) всегда имеет место соотношение (22) при

$$Q(t) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t+1 \end{Vmatrix}. \tag{29}$$

На основании теоремы 2 для асимптотической устойчивости в целом программного многообразия (26) достаточно выполнения соотношений

$$L(t) = Q(t)A^{-1} = \begin{Vmatrix} \dfrac{t+1}{t+2} & 0 \\ 0 & t+1 \end{Vmatrix} >> 0, \tag{30}$$

$$G(t) = \begin{Vmatrix} \dfrac{2t^2+4t+3}{(t+1)^2} & 0 \\ 0 & 2t+1 \end{Vmatrix} >> 0. \tag{31}$$

Пусть матрицы $B(t)$ и $P(t)$ из (17), (18) при $n = 3$ имеют вид

$$B(t) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{t+2}{t+1} \end{Vmatrix}, \qquad P(t) = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix},$$

а матрицы $\theta(t),\ K(t)$ зададим следующим образом:

$$\theta(t) = \begin{Vmatrix} t+3 & 0 \\ 0 & t+1 \end{Vmatrix}, \qquad K(t) = \begin{Vmatrix} \dfrac{t+2}{t+4} & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Тогда система (17) с учетом (28) примет вид

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{t+1}{t+2}\omega_1 - \xi_1 - \xi_2,$$
$$\dot{\omega}_2 = -\omega_2 - \frac{t+2}{t+1}\xi_2.$$

Матрица $P(t)$ определяется из условия (24):

$$P(t) = \begin{Vmatrix} \dfrac{2(t+2)}{t^2+4t+3} & \dfrac{2(t+2)}{(t+1)^2} \\ \dfrac{2t}{t+3} & \dfrac{2(t+2)}{t+1} \end{Vmatrix}, \tag{32}$$

а матрица $G_2(t)$ определяется так:

$$G_2(t) = \theta(t)K^{-1} = \begin{Vmatrix} \dfrac{t^2+7t+12}{t+2} & 0 \\ 0 & t+1 \end{Vmatrix} >> 0. \tag{33}$$

Таким образом, в силу (30), (31) и (32), (33) все условия следствия 1 выполняются, следовательно, программное многообразие (26) абсолютно устойчиво.

Литература

1. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикл. математика и механика. – 1952. – **16**, вып. 6. – С. 653 – 670.
2. *Галиуллин А. С.* Обратные задачи динамики. – М.: Наука, 1981. – 143 с.
3. *Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г. и др.* Построение систем программного движения. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
4. *Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.* Обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения // Вестн. Рос. ун-та дружбы народов. – 1994. – № 1. – С. 5 – 21.
5. *Мухаметзянов И. А.* Об устойчивости программного многообразия. I // Дифференц. уравнения. – 1973. – **9**, № 5. – С. 846 – 856.
6. *Мухаметзянов И. А.* Об устойчивости программного многообразия. II // Дифференц. уравнения. – 1973. – **9**, № 6. – С. 1037 – 1048.

7. *Мухарлямов Р. Г.* О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Дифференц. уравнения. – 1969. – **5**, № 4. – С. 688 – 699.
8. *Мухарлямов Р. Г.* О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 3. – С. 236 – 249.
9. *Mukharlyamov R. G.* Simulation of control processes, stability and stabilization of systems with program contraints // J. Comput. and Syst. Sci. Int. – 2015. – **54**, № 1. – P. 13 – 26.
10. *Майгарин Б. Ж.* Устойчивость и качество процессов нелинейных систем автоматического управления. – Алма-Ата: Наука, 1980. – 316 с.
11. *Жуматов С. С., Крементуло В. В., Майгарин Б. Ж.* Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости и управление движением. – Алматы: Fылым, 1999. – 228 с.
12. *Zhumatov S. S.* Stability of a program manifold of control systems with locally quadratic relations // Ukr. Math. J. – 2009. – **61**, № 3. – P. 500 – 509.
13. *Zhumatov S. S.* Exponential stability of a program manifold of indirect control systems // Ukr. Math. J. – 2010. – **62**, № 6. – P. 907 – 915.
14. *Zhumatov S. S.* On an instability of the indirect control systems in the neighborhood of program manifold // Мат. журн. – 2017. – **17**, № 1. – С. 91 – 97.
15. *Zhumatov S. S.* Frequently conditions of convergence of control systems in the neighborhoods of program manifold // J. Math. Sci. – 2017. – **226**, № 3. – P. 260 – 269.
16. *Zhumatov S. S.* On instability of a program manifold of basic control systems // Springer Proc. Math. and Stat. / Eds T. S. Kalmenov, E. D. Nursultanov, M. V. Ruzhansky, M. A. Sadybekov. – 2017. – **216**. – P. 467 – 474.
17. *Zhumatov S. S.* On a program manifrold's stability of one contour automatic control systems // Open Eng. – 2017. – **7**, Issue 1. – P. 479 – 484.
18. *Zhumatov S. S.* Absolute stability of a program manifold of non-autonomous basic control systems // News NAS RK. Phys.-Math. Ser. – 2018. – **6**, № 6. – P. 37 – 43.
19. *Llibre J., Ramirez R.* Inverse problems in ordinary differential equations and applications. – Springer Int. Publ., 2016.
20. *Tleubergenov M. T.* On the inverse stochastic reconstruction problem // Different. Equat. – 2014. – **50**, № 2. – P. 274 – 278.
21. *Tleubergenov M. T., Ibraeva G. T.* On the restoration problem with degenerated diffusion // TWMS J. Pure and Appl. Math. – 2015. – **6**, Issue 1. – P. 93 – 99.
22. *Vasilina G. K., Tleubergenov M. T.* Solution of the problem of stochastic stability of an integral manifold by the second Lyapunov method // Ukr. Math. J. – 2016. – **68**, № 1. – P. 14 – 28.
23. *Samoilenko A. M., Stanzhytskyi O. M.* The reduction principle in stability theory of invariant sets for stochastic Ito type systems // Differents. Uravn. – 2001. – **53(2)**. – P. 282 – 285.
24. *Samoilenko A. M., Stanzhytskyi O. M., Ateiwi A. M.* On invariant tori for a stochastic Ito systems // J. Dynam. and Different. Equat. – 2005. – **17**, № 4. – P. 737 – 758.
25. *Летов А. М.* Динамика полета и управление. – М.: Наука, 1969. – 256 с.
26. *Барабанов А. Т.* Методы исследования систем с переменными коэффициентами // Методы исследования нелинейных систем автоматического управления. – М.: Наука, 1975. – С. 318 – 409.
27. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
28. *Самойленко А. М., Яковець В. П.* О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Доп. НАН України. – 1993. – № 4. – С. 10 – 15.
29. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – Київ: Вища шк., 2000. – 294 с.

Получено 14.03.19