

МОДЕЛЬ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ ДОСЯГНЕННЯ КОНСЕНСУСУ

We propose a mathematical model for the diffusion of opinions, which eventually lead to the attainment of the state of consensus. The theory of conflict dynamical systems with attractive interaction is used for the construction of the model. The behavior of the model in the case of making binary decisions is described in detail and the behavior of trajectories in the decision-making model with many alternative positions is investigated.

Побудовано математичну модель поширення переконань, які з часом наближаються до стану консенсусу. Для побудови використано теорію динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією. Детально описано поведінку моделі у випадку прийняття бінарних рішень та досліджено поведінку траєкторій у моделі прийняття рішень з багатьма альтернативними позиціями.

1. Вступ. Уперше неперервну динамічну систему поширення переконань запропонував ДеГрут у роботі [1]. Він розглядав бінарну модель прийняття рішень $\theta \in \{0, 1\}$. Нехай маємо k агентів. Початкова ймовірність прийняття i -м агентом одного з рішень $p_i = P(\theta = 1)$ є величиною з проміжку $[0, 1]$. набір цих значень формує початковий вектор імовірностей. Динамічний процес оновлення координат вектора ймовірностей описано матрицею A , де елемент A_{ij} — це відносна довіра, яку агент i проявляє до переконання агента j . Переконання агентів змінюються лінійно, в залежності від зваженого середнього значення переконань своїх сусідів, які визначаються вагами A_{ij} :

$$p_i(t+1) = \sum_{j=1}^k p_j(t) A_{ij}.$$

Нехай $G = (V, E)$ позначає граф, де V — набір агентів, а ребро E включає в себе пару (i, j) тоді і тільки тоді, коли $T_{ij} > 0$. Показано, що у всій системі досягається консенсус, тільки якщо граф G є зв'язним, а інакше, взагалі кажучи, кожна зв'язна компонента системи буде мати своє локальне консенсусне значення.

Інша, трохи досконаліша, модель переконань відома як модель Хегсельмана–Краузе [2]. В цій моделі кожен агент має переконання, виражене дійсним числом $p_i \in [0, 1]$, і переконання агентів оновлюються синхронно, аналогічно моделі ДеГрута. Але в моделі Хегсельмана–Краузе запропоновано показник довіри (порогове значення) ϵ , який дозволяє змоделювати відсутність взаємодії між деякими агентами за умови, що їхні переконання досить далекі одне від одного.

У моделі Дефуанта–Вайсбуха [3, 4] досліджується ефект простої довільної попарної взаємодії між агентами, переконання яких знаходяться на відстані, що менша за певне порогове значення. В цій моделі переконання агентів також виражені дійсними числами $p_i \in [0, 1]$. Всіх агентів, які можуть безпосередньо взаємодіяти з фіксованим агентом i , називають його сусідами і їхню множину позначають через N_i . Агенти i та j довільним чином вибираються для симетричної взаємодії (якщо $i \in N_j$, то $j \in N_i$). Нехай $I_i(k; \epsilon) = \{j \in N_i : |p_i(t) - p_j(t)| < \epsilon\}$ — множина всіх сусідніх з i агентів, переконання яких досить близькі до переконань агента i . Якщо $j \in I_i(k, \epsilon)$ та $i \in I_j(k, \epsilon)$, то після взаємодії переконання набувають таких значень:

$$\begin{aligned} p_i(t+1) &= (1-\mu)p_i(t) + \mu p_j(t), \\ p_j(t+1) &= (1-\mu)p_j(t) + \mu p_i(t), \end{aligned} \quad (1)$$

де $\mu \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ – параметр змішування.

Нарешті, модель, запропоновану в [5, 6], засновано на моделі Дефуанта–Вайсбуха, але це вже не бінарна модель типу описаних вище. В цих роботах описано процес вибору між більшою кількістю альтернатив. Так, у [6] автори розглядають переконання кожного агента, як імовірнісний вектор; кожна координата такого вектора є ймовірністю того, що певна альтернатива приймається агентом. У роботах [5, 6] (див. також [7–10]) запропоновано розглядати порогове значення взаємодії μ не як наперед визначений параметр, а як функцію, залежну від відстані між агентами, що взаємодіють.

У даній роботі запропоновано модель, що описує процес формування переконань у складній системі, яка є аналогічною моделі з робіт [5, 6], але ґрунтується на зовсім іншому законі взаємовпливу між агентами. Зокрема, ми аналізуємо багатопозиційні процеси прийняття рішень (бінарні процеси розглядаються як частинний випадок). У цій моделі використано новий спосіб взаємодії між агентами. А саме, математична формула взаємодії між двома агентами задається за допомогою різницевих рівнянь, запропонованих у роботах [11–20]. Порогове значення взаємодії не задано явно, але відстань між переконаннями пари агентів впливає на інтенсивність взаємодії. Відстань між переконаннями характеризує їхній скалярний добуток, який явно включений у рівняння, що описують модель.

2. Побудова моделі прийняття рішень. Позначимо через $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$, множину агентів, які взаємодіють між собою по неорієнтованому графу $G = (V, E)$, де E – фіксована множина ребер графа ($E \subset V \times V$). Далі $(u, v) \in E$ позначає ребро, що сполучає агентів u та v . Для кожного такого ребра (u, v) ми припускаємо, що на процес формування переконання агента v впливає його сусід u , а також v впливає на u .

Нехай $B(v)$ позначає сукупність сусідів агента v на графі G , тобто

$$B(v) = \{u \in V : (u, v) \in E\}.$$

Зазначимо, що $v \notin B(v)$. Опишемо процес поширення скінченної кількості, а саме k , $k \geq 2$, переконань на графі G . Припускаємо, що в момент дискретного часу t , $t \geq 0$, агент v поділяє переконання i з імовірністю $p_i^v(t)$, тобто кожному агенту $v \in V$ відповідає вектор $\mathbf{p}^v(t) = (p_1^v(t), \dots, p_i^v(t), \dots, p_k^v(t))$, де координата $p_i^v(t)$ – це ймовірність того, що агент v має переконання i . Вектори $\mathbf{p}^v(t)$ назвемо розподілами переконань агентів v в момент часу t . За означенням, усі такі вектори є стохастичними, тобто $\sum_{i=1}^k p_i^v(t) = 1$.

У кожен наступний момент часу довільним чином вибираємо агента $v \in V$ та його сусіда $u \in B(v)$. Вважаємо, що ймовірність вибору пари агентів не залежить від часу і є однаковою для всіх агентів. Вибравши пару агентів, змінюємо вектор $\mathbf{p}^v(t)$ на $\mathbf{p}^v(t+1)$ за правилом конфліктної взаємодії з притяганням [11], яке записується в термінах координат такою формулою:

$$p_i^v(t+1) = \frac{1}{z^{v,u}(t)} (p_i^v(t) + p_i^v(t)p_i^u(t)), \quad (2)$$

де $z^{v,u}(t)$ – знаменник нормувального коефіцієнта, який забезпечує стохастичність нового вектора $\mathbf{p}^v(t+1)$. Легко підрахувати, що

$$z^{v,u}(t) = 1 + \sum_{i=1}^k p_i^v(t) \cdot p_i^u(t). \quad (3)$$

Зауважимо, що вектор $\mathbf{p}^u(t)$ також змінюється за тим самим законом:

$$p_i^u(t+1) = \frac{1}{z^{v,u}(t)} (p_i^u(t) + p_i^v(t)p_i^u(t)),$$

і знаменник нормувального коефіцієнта $z^{v,u}(t)$ є таким самим, як і для агента v . На кожному кроці змінюється значення лише однієї пари векторів.

Зазначимо, що якщо $\mathbf{p}^v(t) \neq \mathbf{p}^u(t)$, то за один крок взаємодії переконання агентів u та v не можуть стати однаковими, але вони стають ближчими в сенсі l_1 -норми. Дійсно, розглянемо різницю довільних неортогональних векторів $\mathbf{p}^v(t+1)$ та $\mathbf{p}^u(t+1)$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}^v(t+1) - \mathbf{p}^u(t+1)|_1 &= \sum_{i=1}^k |p_i^v(t+1) - p_i^u(t+1)| = \\ &= \frac{1}{z^{v,u}(t)} \sum_{i=1}^k |p_i^v(t) - p_i^u(t)| \leq |\mathbf{p}^v(t) - \mathbf{p}^u(t)|_1, \end{aligned}$$

де використано (2) і той факт, що для неортогональних векторів $\frac{1}{z^{v,u}(t)} < 1$ (насправді з (3) випливає, що $1 \leq z^{v,u}(t) \leq 2$). Отже, переконання агентів u та v після взаємодії стали ближчими.

Також слід зауважити, що у випадку вибору пари агентів із переконаннями, що описані ортогональними векторами, взаємодія не відбувається взагалі, оскільки добуток $p_i^v(t) \cdot p_i^u(t) = 0$ для всіх i . Можна зробити висновок, що скалярний добуток характеризує силу взаємодії двох агентів: чим ближчі вектори розподілу переконань, тим сильніший вплив агентів один на одного.

Взагалі, опис поведінки векторів розподілу переконань при $t \rightarrow \infty$ є нетривіальною задачею, але при додаткових обмеженнях можна одержати конкретні результати, наведені нижче.

3. Модель прийняття бінарних рішень у випадку взаємодії двох агентів. Перш ніж розглядати більш загальний випадок, розглянемо найпростіший випадок прийняття бінарних рішень.

Припустимо, що система складається лише з двох агентів, і їхній розподіл переконань має вигляд $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t))$, $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t))$, тобто $k = 2$. Нагадаємо, що $\sum_{i=1}^2 p_i(t) = \sum_{i=1}^2 r_i(t) = 1$ для всіх t .

В такому випадку взаємодія агентів описується за допомогою чотирьох рівнянь:

$$\begin{aligned} p_1(t+1) &= \frac{1}{z_t} p_1(t)(1 + r_1(t)), \\ p_2(t+1) &= \frac{1}{z_t} p_2(t)(1 + r_2(t)), \\ r_1(t+1) &= \frac{1}{z_t} r_1(t)(1 + p_1(t)), \\ r_2(t+1) &= \frac{1}{z_t} r_2(t)(1 + p_2(t)), \end{aligned} \quad (4)$$

де $z_1 = 1 + \sum_{i=1}^2 p_i(t)r_i(t)$. Ці рівняння генерують динамічну систему в просторі $\Omega = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Кожна пара векторів $\{\mathbf{p}(0), \mathbf{r}(0)\}$ є початковою точкою траєкторії цієї динамічної системи:

$$\{\mathbf{p}(0), \mathbf{r}(0)\} \rightarrow \{\mathbf{p}(1), \mathbf{r}(1)\} \rightarrow \dots \rightarrow \{\mathbf{p}(t), \mathbf{r}(t)\} \rightarrow \dots \quad (5)$$

В роботі [11] показано, що кожна траєкторія (5) збігається до нерухомої стаціонарної точки. А саме, вектори наближаються один до одного і при цьому кожен із них прямує до одного з векторів: $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ або $\mathbf{c} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Тобто для заданої динамічної системи існує лише три стаціонарних стани: $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$, $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$ і $\{\mathbf{c}, \mathbf{c}\}$. Нерухомість цих станів впливає безпосередньо з формул (4).

Позначимо

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) &= |\mathbf{e}_1 - \mathbf{p}(t)|_1 = |1 - p_1(t)| + |0 - p_2(t)| = 1 - p_1(t) + p_2(t), \\ \Delta_2(t) &= |\mathbf{e}_2 - \mathbf{p}(t)|_1 = |0 - p_1(t)| + |1 - p_2(t)| = 1 + p_1(t) - p_2(t). \end{aligned}$$

Проаналізуємо поведінку траєкторії (5) на кожному кроці перетворення. З цією метою припустимо, що для перших координат початкових векторів $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r} = (r_1, r_2)$ виконуються умови

$$\begin{aligned} p_1 &> \frac{1}{2}, \\ r_1 &> \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тоді завдяки стохастичності $p_1 + p_2 = 1$, $r_1 + r_2 = 1$, а для других координат маємо оцінки $p_2 < \frac{1}{2}$, $r_2 < \frac{1}{2}$. З'ясуємо, яким чином зміниться траєкторія на першому кроці:

$$p_1(t=1) = \frac{p_1(1+r_1)}{1+p_1r_1+p_2r_2}.$$

Розглядаючи відношення $p_1(1)$ до p_1 , знаходимо, що

$$\frac{p_1(1)}{p_1} = \frac{1+r_1}{1+p_1r_1+p_2r_2} > 1,$$

оскільки

$$p_1r_1 + p_2r_2 = r_1 \left(p_1 + p_2 \frac{r_2}{r_1} \right) < r_1(p_1 + p_2) = r_1.$$

Отже, $p_1(t=1) > p_1$. Аналогічними міркуваннями доводимо, що $r_1(t=1) > r_1$ також. Оскільки очевидно, що на наступному кроці знову виконується умова типу (6), $p_1(1) > \frac{1}{2}$, $r_1(1) > \frac{1}{2}$, то можемо стверджувати, що обидві послідовності $\{p_1(t)\}$, $\{r_1(t)\}$ зростають при збільшенні t . За умовою задачі ці послідовності є обмеженими ($p_1(t) \leq 1$, $r_1(t) \leq 1$), тому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} r_1(t) = 1.$$

Припущення, що ці границі менші за одиницю, є суперечливим згідно з формулами (4). Цим доведено, що $\Delta_1(t)$ збігається до нуля, тобто обидва вектори $\mathbf{p}(t)$ і $\mathbf{r}(t)$ рухаються в одному

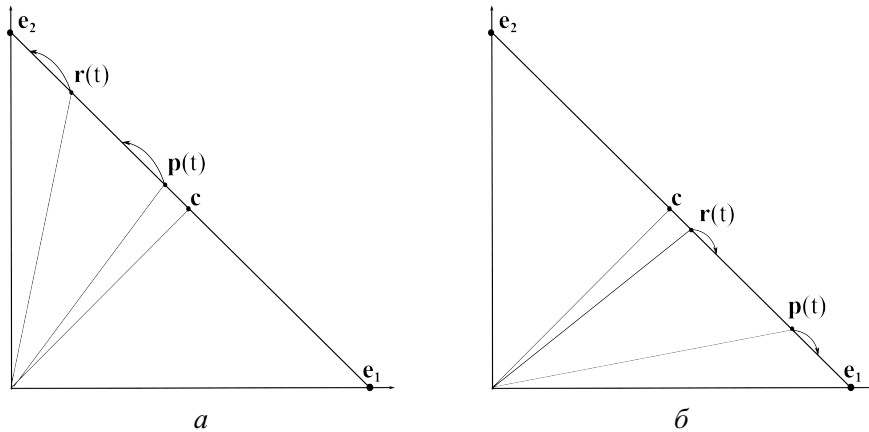


Рис. 1. Випадок, коли вектори $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{r}(t)$, розташовані по один бік від центра \mathbf{c} , прямують до \mathbf{e}_2 (а) та \mathbf{e}_1 (б) відповідно.

напрямку до $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$. При цьому на кожному кроці відстань між ними зменшується (відстань оцінюємо за допомогою l_1 -норми):

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}(t+1) - \mathbf{r}(t+1)|_1 &= |p_1(t+1) - r_1(t)| + |p_2(t+1) - r_2(t)| = \\ &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^2 p_i(t)r_i(t)} (|p_1(t) - r_1(t)| + |p_2(t) - r_2(t)|) = \\ &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^2 p_i(t)r_i(t)} |\mathbf{p}(t+1) - \mathbf{r}(t+1)|_1 < |\mathbf{p}(t) - \mathbf{r}(t)|_1. \end{aligned}$$

Отже, доведено, що при виконання умов (6) траєкторія з початковою точкою $\{\mathbf{p}(0), \mathbf{r}(0)\}$ збігається до стаціонарної точки $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$.

Аналогічним чином можна показати, що для траєкторії з початковою точкою, координати якої задовольняють умови

$$\begin{aligned} p_2 &> \frac{1}{2}, \\ r_2 &> \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

величини вигляду $\Delta_2(t)$ прямують до нуля при $t \rightarrow \infty$, що означає збіжність самої траєкторії до стаціонарної точки $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$ (див. рис. 1).

Розглянемо випадок, коли початкові вектори розташовані не симетрично по різні боки від центра $\{\mathbf{c}, \mathbf{c}\}$, наприклад коли перші координати початкових векторів задовольняють умови (див. рис. 2)

$$\frac{1}{2} < p_1 < 1, \quad 0 < r_1 < \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Оскільки $p_1 + p_2 = 1$ і $r_1 + r_2 = 1$, то для других координат виконуються нерівності $0 < p_2 < \frac{1}{2} < r_2 < 1$. Розглядаючи відношення $p_1(1)$ до p_1 , знаходимо, що

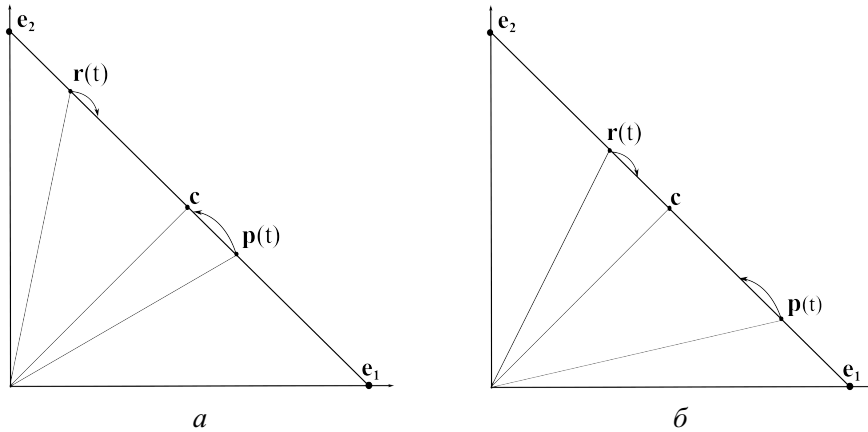


Рис. 2. Випадок, коли вектори $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{r}(t)$, розташовані по один бік від центра \mathbf{c} , рухаються у напрямку один до одного до того моменту часу t , при якому вони опиняться по один бік від центра.

$$\frac{p_1(1)}{p_1} = \frac{1 + r_1}{1 + p_1 r_1 + p_2 r_2} > 1,$$

оскільки

$$p_1 r_1 + p_2 r_2 = r_1 \left(p_1 + p_2 \frac{r_2}{r_1} \right) > r_1 (p_1 + p_2) = r_1.$$

Отже, $p_1(1) < p_1$, аналогічно $r_1(1) > r_1$. Завдяки стохастичності виконуються також нерівності $p_2(1) > p_2$, $r_2(1) < r_2$. Цим доведено, що вектори рухаються у напрямку один до одного, тобто зближуються. Але це не приводить до того, що граничним станом буде центр $\{\mathbf{c}, \mathbf{c}\}$.

Покажемо, що вектор, який знаходиться ближче до стаціонарної точки ($\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ або $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$), в результаті взаємодії рухається повільніше, ніж інший. З цією метою, не втрачаючи загальності, припустимо, що при виконанні умов (7), завдяки несиметричності у розташуванні початкових векторів, вектор \mathbf{r} знаходиться ближче до $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, ніж вектор \mathbf{p} до $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, тобто $|\mathbf{e}_1 - \mathbf{p}|_1 > |\mathbf{e}_2 - \mathbf{r}|_1$. Розглянемо різниці

$$|\mathbf{e}_1 - \mathbf{p}|_1 = |1 - p_1| + |0 - p_2| = 1 - p_1 + p_2,$$

$$|\mathbf{e}_2 - \mathbf{r}|_1 = |0 - r_1| + |1 - r_2| = 1 + r_1 - r_2.$$

Очевидно, що

$$1 - p_1 + p_2 > 1 + r_1 - r_2 \iff r_1 < p_2 \iff r_2 > p_1.$$

Тепер оцінимо як змінився кожен із векторів за один крок, тобто порівняємо різниці $|\mathbf{p}(1) - \mathbf{p}|_1$ і $|\mathbf{r}(1) - \mathbf{r}|_1$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}(1) - \mathbf{p}|_1 &= |p_1(1) - p_1| + |p_2(1) - p_2| = p_1 - p_1(1) + p_2(1) - p_2 = \\ &= \frac{1}{z} \left(p_1 r_1 \left(p_1 + \frac{p_2 r_2}{r_1} - 1 \right) + p_2 r_2 \left(1 - \frac{p_1 r_1}{r_2} - p_2 \right) \right) \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}(1) - \mathbf{r}|_1 &= |r_1(1) - r_1| + |r_2(1) - r_2| = r_1(1) - r_1 + r_2 - r_2(1) = \\ &= \frac{1}{z} \left(p_1 r_1 \left(1 - r_1 - \frac{p_2 r_2}{p_1} \right) + p_2 r_2 \left(r_2 + \frac{p_1 r_1}{p_2} - 1 \right) \right). \end{aligned}$$

Далі оцінимо різницю

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}(1) - \mathbf{p}|_1 - |\mathbf{r}(1) - \mathbf{r}|_1 &= \frac{1}{z} \left(p_1 r_1 \left(p_1 + r_1 + \frac{p_2 r_2}{r_1} + \frac{p_2 r_2}{p_1} - 2 \right) + \right. \\ &\left. + p_2 r_2 \left(2 - p_2 - r_2 - \frac{p_1 r_1}{r_2} - \frac{p_1 r_1}{p_2} \right) \right) > 0, \end{aligned}$$

оскільки

$$p_1 + r_1 + r_2 \frac{p_2}{r_1} + p_2 \frac{r_2}{p_1} - 2 > p_1 + r_1 + p_2 + r_2 - 2 = 0$$

і

$$2 - p_2 - r_2 - r_1 \frac{p_1}{r_2} - p_1 \frac{r_1}{p_2} > 2 - p_2 - r_2 - r_1 - p_1 = 0.$$

Отже, $|\mathbf{p}(1) - \mathbf{p}|_1 > |\mathbf{r}(1) - \mathbf{r}|_1$. Зрозуміло, що такого типу нерівності виконуються для всіх t до тих пір, поки вектори будуть знаходитись по різні боки від центра. Але оскільки обидва вектори $\mathbf{p}(t)$ і $\mathbf{r}(t)$ рухаються до центра і на кожному кроці $|\mathbf{p}(t+1) - \mathbf{p}(t)|_1 > |\mathbf{r}(t+1) - \mathbf{r}(t)|_1$, то існує момент t^* , коли вектор $\mathbf{p}(t^*)$ опиниться по один бік від центра із вектором $\mathbf{r}(t^*)$. З цього моменту характер руху пари векторів зміниться, вони продовжать зближатися і одночасно разом почнуть рухатись до точки $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, як це було описано в аналізі попереднього випадку.

Нарешті розглянемо симетричний випадок, коли координати початкової пари векторів \mathbf{p} , \mathbf{r} задовольняють умови (7) і рівновіддалені від центра $\mathbf{c} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (наприклад, відстань від \mathbf{p} до $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ дорівнює відстані від \mathbf{r} до $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$). Це означає, що в такому випадку для координат векторів справджуються рівності $p_1 = r_2$, $p_2 = r_1$. Тоді зрозуміло, що за рівні проміжки часу ці вектори будуть зміщатись на рівні відстані $|\mathbf{p}(t+1) - \mathbf{p}(t)|_1 = |\mathbf{r}(t+1) - \mathbf{r}(t)|_1$. При цьому для кожного моменту часу t буде залишатись справедливою умова (7), тобто $0 < r_1(t) < \frac{1}{2} < p_1(t) < 1$. Дійсно, якщо $p_1(t=0) > \frac{1}{2}$, то

$$p_1(t=1) - \frac{1}{2} = \frac{p_1 + p_1 r_1}{1 + p_1 r_1 + p_2 r_2} - \frac{1}{2} > 0,$$

оскільки, як вже було доведено вище, $p_1(1) < p_1$, $p_2(1) > p_2$ і $r_1(1) > r_1$, $r_2(1) < r_2$. За індукцією це виконується для всіх t . Отже, вектори рухаються у напрямку один до одного. Враховуючи такий закон зміни координат, а також їхню обмеженість, робимо висновок, що кожен із початкових векторів збігається до центра $\mathbf{c} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Проаналізуємо стійкість стаціонарних станів системи. Нагадаємо, що стаціонарний стан \mathbf{x}^* є стійким (асимптотично стійким), якщо існує таке досить мале число $\epsilon > 0$, що для будь-якої початкової точки $\mathbf{x}(0)$ з ϵ -околу точки \mathbf{x}^* траєкторія, породжена точкою $\mathbf{x}(0)$, збігається до \mathbf{x}^* : $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$.

Розглянемо центральну точку $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ і зафіксуємо довільне число $\epsilon < \frac{1}{2}$. Виберемо точку $\{\mathbf{p}(0), \mathbf{r}(0)\}$ з ϵ -околу центральної точки. В загальному випадку її координати можна записати у вигляді

$$\{\mathbf{p}(0), \mathbf{r}(0)\} = \left\{\left(\frac{1}{2} + \delta_1, \frac{1}{2} - \delta_1\right), \left(\frac{1}{2} + \delta_2, \frac{1}{2} - \delta_2\right)\right\},$$

де $0 < |\delta_{1,2}| < \epsilon$.

Очевидно, $\frac{1}{2} + \delta_i > \frac{1}{2} - \delta_i$, якщо $\delta_i > 0$, і $\frac{1}{2} + \delta_i < \frac{1}{2} - \delta_i$, якщо $\delta_i < 0$. Згідно з доведеною вище теоремою траєкторія, породжена точкою $\{\mathbf{p}(0), \mathbf{r}(0)\}$, буде збігатися до $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$ або $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$, якщо $\delta_1 \neq \delta_2$. Отже, центральна точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ не є стійкою.

Розглянемо тепер граничну точку $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$ і виберемо довільну початкову точку $\{\mathbf{p}(0), \mathbf{r}(0)\}$ з ϵ -околу граничної точки. Нагадаємо, що розглядаються лише точки, що утворюються парою стохастичних векторів, тому всі точки ϵ -околу $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$ допускають запис у вигляді $\{(1 - \delta_1, \delta_1), (1 - \delta_2, \delta_2)\}$, де $\epsilon > \delta_{1,2} > 0$. Нехай $\epsilon < \frac{1}{2}$, тоді $1 - \delta_i > \delta_i$. Отже, за доведеною вище теоремою точка $\{\mathbf{p}(0), \mathbf{r}(0)\}$ буде породжувати траєкторію, що збігається до $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$. Таким чином, доведено, що гранична точка $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$ є стійкою. За допомогою аналогічних міркувань доводимо стійкість точки $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$.

Отже, доведено таку теорему.

Теорема 1. *Нехай \mathbf{p}, \mathbf{r} — стохастичні вектори з простору \mathbb{R}^2 . В результаті взаємодії за формулами (4) траєкторія (5) з початковою точкою $\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\}$ збігається до однієї зі стаціонарних точок $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$, $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$ або $\{\mathbf{c}, \mathbf{c}\}$.*

При цьому, якщо початкові вектори знаходяться по один бік від центра \mathbf{c} зі сторони вектора \mathbf{e}_1 , траєкторія (5) збігається до точки $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$ (аналогічно для \mathbf{e}_2).

Якщо початкові вектори знаходяться по різні боки від центра \mathbf{c} , але не симетричні відносно \mathbf{c} , то траєкторія (5) збігається до точки $\{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\}$, де \mathbf{e}_k — вектор, до якого найближче знаходиться один із векторів \mathbf{p} чи \mathbf{r} .

Нарешті, якщо початкові вектори знаходяться по різні боки від центра і симетричні відносно \mathbf{c} (рівновіддалені від \mathbf{c}), траєкторія (5) збігається до точки $\{\mathbf{c}, \mathbf{c}\}$.

Нерухомі точки $\{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\}$, $k = 1, 2$, є стійкими, а центральна точка $\{\mathbf{c}, \mathbf{c}\}$ не є стійкою.

4. Модель прийняття бінарних рішень для системи з кількох агентів. Модель прийняття бінарних ($k = 2$) рішень групою $n > 2$ агентів описується за допомогою динамічної системи, заданої в просторі $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2$. Стан такої системи в момент часу t описує точка, яку позначаємо набором двовимірних векторів $\{\mathbf{p}^1(t), \mathbf{p}^2(t), \dots, \mathbf{p}^n(t)\}$, де $\mathbf{p}^u(t)$ — стохастичний вектор з \mathbb{R}^2 , що відповідає розподілу переконань агента u . Траєкторія динамічної системи

$$\{\mathbf{p}^1(t), \mathbf{p}^2(t), \dots, \mathbf{p}^n(t)\} \rightarrow \{\mathbf{p}^1(t+1), \mathbf{p}^2(t+1), \dots, \mathbf{p}^n(t+1)\} \quad (8)$$

задається за допомогою перетворень вигляду (4).

Зрозуміло, що для систем, які складаються з більш ніж двох агентів, послідовність їх взаємодій *a priori* не впорядкована і тому граничний результат при $t \rightarrow \infty$ неможливо точно передбачити. Але існують деякі окремі випадки, коли все ж таки можна точно визначити результат взаємодії всіх агентів у системі. Такі випадки виникають, наприклад, коли в усіх агентів

системи розподіли переконань задані векторами, що знаходяться по один бік від центральної нерухомої точки $\{c, c, \dots, c\}$. Окрім цього, поведінку системи можна точно передбачити у випадку, коли в усіх агентів системи розподіли переконань описано векторами, що знаходяться на однаковій відстані від центральної точки.

Доведення наступних двох тверджень зводиться до застосування аргументації доведення теореми 1.

Твердження 1. *Якщо всі агенти в системі мають початковий розподіл переконань, який задовольняє умову*

$$p_k^u(t=0) = \max_{i=1,2} \{p_i^u(0)\}, \quad u = 1, \dots, n,$$

де $k \in$ фіксованим для всіх агентів u , то траєкторія динамічної системи збігається до стану консенсусу, тобто коли розподіли переконань кожного з агентів однакові і мають вигляд e_k .

Дійсно, повторюючи логіку міркувань із доведення теореми 1, легко переконатися, що взаємодія будь-якої пари агентів на будь-якому кроці приводить до переміщення всіх векторів $p^u(t)$ у бік e_k . Таким чином, на кожному кроці стан системи буде наближатись до стаціонарного стану $\{e_k, e_k, \dots, e_k\}$.

Аналогічним чином з доведення теореми 1 впливає таке твердження.

Твердження 2. *Якщо всі агенти в системі мають такий стартовий розподіл переконань, що $p_1^v(t) = p_i^u(t)$ для будь-якої пари агентів u та v (отже, завдяки стохастичності $p_2^v(t) = p_j^u(t)$ також), де $i = 1, j = 2$ або $i = 2, j = 1$, то траєкторія системи збігається до стану центральної нестійкої рівноважної невизначеності, коли розподіл переконань кожного з агентів має вигляд $c = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.*

5. Модель прийняття бінарних рішень із використанням методу середнього поля.

Як зазначено вище, якщо розподіли переконань агентів зображено стохастичними векторами, що знаходяться по різні боки від центра і розташовані довільним чином (не симетрично), то неможливо точно визначити, до якого саме стану збігається система, якщо граничний за часом стан взагалі існує. Для того щоб визначити найбільш імовірний граничний стан системи, використаємо апроксимацію динаміки за допомогою методу середнього поля.

Розглянемо складну систему з n , $n > 2$, агентів із двома можливими переконаннями ($k = 2$). Нехай зв'язки агентів системи описує повний граф G з n вершинами. Припустимо, що жодна з вершин не має розподілу переконань, що є нерухомим стійким станом, тобто коли агент поділяє одне фіксоване переконання з імовірністю рівною одиниці. Якщо n достатньо велике, ми можемо використовувати метод теорії середнього поля (див., наприклад, [19]) для наближення поведінки системи. Тоді еволюційне рівняння теорії динамічних системи з притягальною взаємодією, яке ми використовували у вигляді (2), можна записати як

$$p_i^v(t+1) = \frac{1}{z^{u,v}(t)} p_i^v(t) (1 + \bar{p}_i(t)), \quad (9)$$

де $\bar{p}_i(t) = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n p_i^u(t)$ – середнє значення ймовірності переконання i , визначене за розподілами цього переконання серед усіх агентів. Вектор $\bar{p}(t) = (\bar{p}_1(t), \bar{p}_2(t))$ називаємо середнім розподілом переконань системи. В ньому враховано вплив усіх агентів системи.

Далі вивчаємо динамічну систему, траєкторії якої мають вигляд (8), але задаються перетворенням (9), яке в кожен момент часу t застосовується до всіх векторів $p^u(t)$.

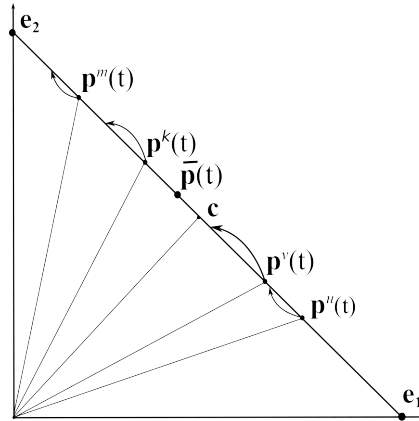


Рис. 3. Випадак, коли середнє значення розподілу переконань початкового стану системи таке, що $\bar{p}_1(t=0) > \bar{p}_2(t=0)$, і траєкторія прямує до стану консенсусу $\{e_1, e_1, \dots, e_1\}$.

Використовуючи результати роботи [21], можна показати, що при $t \rightarrow \infty$ розподіл кожної вершини графа G наближається до граничного середнього значення розподілу переконань всієї системи в сенсі l_1 -норми. Такий стан системи у певному сенсі є консенсусним (усі агенти поділяють однакові переконання).

Теорема 2. *Кожна траєкторія динамічної системи, породжена відображенням за формулою (9), збігається до граничного нерухомого стану, який визначається за граничним значенням середнього поля.*

А саме, якщо середнє значення розподілу переконань початкового стану системи таке, що $\bar{p}_1(t=0) > \bar{p}_2(t=0)$, то траєкторія збігається до стану консенсусу $\{e_1, e_1, \dots, e_1\}$.

Якщо середнє значення розподілу переконань початкового стану системи таке, що $\bar{p}_1(t) < \bar{p}_2(t)$, то траєкторія збігається до стану консенсусу $\{e_2, e_2, \dots, e_2\}$.

Нарешті, якщо середнє значення розподілу переконань початкового стану системи таке, що $\bar{p}_1(t) = \bar{p}_2(t)$, то траєкторія залишається нерухомою.

Доведення. Припустимо, що $\bar{p}_1(t) > \bar{p}_2(t)$. Серед стохастичних векторів, що описують початковий стан системи, є вектори, що знаходяться по один бік від центра c з вектором $\bar{p}(t)$. Позначимо цю множину P_1 . Всі решта векторів лежать по різні боки відносно центра з вектором $\bar{p}(t)$. Позначимо цю множину P_2 .

З доведення теореми 1 випливає, що всі вектори з множини P_1 з кожним кроком взаємодії будуть рухатись до вектора e_2 , а всі вектори з множини P_2 — у бік центра c . Це означає, що вони також рухаються в бік вектора e_2 . Тобто всі вектори $\mathbf{p}^u(t) = (p_1^u(t), p_2^u(t))$, що описують стан системи, будуть змінюватись таким чином, що $p_1^u(t+1) > p_1^u(t)$ і відповідно $p_2^u(t+1) < p_2^u(t)$. Отже, і координати вектора $\bar{p}(t)$ будуть змінюватись відповідно: $\bar{p}_1^u(t+1) > \bar{p}_1^u(t)$, тому траєкторія буде прямувати до стану консенсусу $\{e_1, e_1, \dots, e_1\}$ (див. рис. 3).

Аналогічно доводиться прямування траєкторії до $\{e_2, e_2, \dots, e_2\}$ за умови $\bar{p}_1(t) < \bar{p}_2(t)$.

Припустимо тепер, що $\bar{p}_1(t) = \bar{p}_2(t)$, тобто внаслідок стохастичності $\bar{p}_1(t) = \frac{1}{2}$. Візьмемо довільний вектор $\mathbf{p}^u(t) = (p_1^u(t), p_2^u(t))$. Обчислимо

$$p_1^u(t+1) = \frac{1}{z} p_1^u(t) (1 + \bar{p}_1(t)) = \frac{3}{2z} p_1^u(t),$$

де

$$z = 1 + \frac{1}{2}p_1^u(t) + \frac{1}{2}p_2^u(t) = \frac{3}{2}.$$

Отже, $p_1^u(t+1) = p_1^u(t)$. Аналогічно $p_2^u(t+1) = p_2^u(t)$.

Таким чином, доведено, що траєкторія не рухається при умові, що $\bar{p}_1(t) = \bar{p}_2(t)$.

6. Модель досягнення консенсусу у багатопозиційних процесах прийняття рішень.

Деякі результати, отримані у випадку моделі з бінарними рішеннями, можна узагальнити на моделі прийняття рішень з багатоальтернативним вибором.

У такому випадку динамічну систему задано у просторі $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \dots \times \mathbb{R}^k$, де $k \geq 2$ — кількість доступних альтернативних переконань (рішень). Стан системи в момент часу t описує точка $\{\mathbf{p}^1(t), \mathbf{p}^2(t), \dots, \mathbf{p}^n(t)\}$, де $\mathbf{p}^u(t)$ — стохастичний вектор із \mathbb{R}^k , що відповідає розподілу переконань агента u .

Траєкторія динамічної системи

$$\{\mathbf{p}^1(t), \mathbf{p}^2(t), \dots, \mathbf{p}^n(t)\} \rightarrow \{\mathbf{p}^1(t+1), \mathbf{p}^2(t+1), \dots, \mathbf{p}^n(t+1)\} \tag{10}$$

задається за допомогою перетворень вигляду (2).

Випадок, коли кількість агентів $n = 2$, було досліджено в роботі [11]. Там доведено, що кожна траєкторія динамічної системи збігається до граничного стаціонарного стану вигляду $\{\mathbf{p}^1(t), \mathbf{p}^2(t)\}$, де

$$p_i^1(\infty) = p_i^2(\infty) = \begin{cases} 0, \\ \frac{1}{m}, \end{cases}$$

$m \leq n$ — кількість ненульових елементів граничного вектора. Питання про те, які саме координати є нульовими, а які дорівнюють $\frac{1}{m}$, залишається відкритим.

Зрозуміло, що при збільшенні кількості агентів у системі її поведінка значно ускладнюється. Але для деяких випадків ми можемо описати граничні точки.

Твердження 3. *Якщо для одного фіксованого m , $1 \leq m \leq n$, всі агенти мають такий розподіл переконань, що $p_m^v(t) > p_i^v(t)$ для всіх $i \neq m$, то траєкторія системи збігається до консенсусу, і розподіл переконань кожного з агентів має вигляд $\mathbf{e}_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, де 1 знаходиться на m -й позиції.*

Доведення. Нагадаємо, що згідно з формулою (2) в кожен наступний момент часу стан системи змінюється завдяки взаємодії лише однієї пари векторів. Розглянемо взаємодію довільної пари векторів $\mathbf{p}^u(t)$, $\mathbf{p}^v(t)$. Згідно з твердженням 3 з [11], якщо

$$p_m^u(t) > p_i^u(t), \quad p_m^v(t) > p_i^v(t),$$

то ці нерівності зберігаються і після перетворення (2):

$$p_m^u(t+1) > p_i^u(t+1), \quad p_m^v(t+1) > p_i^v(t+1).$$

Крім того, виконуються нерівності

$$\frac{p_m^u(t)}{p_i^u(t)} < \frac{p_m^u(t+1)}{p_i^u(t+1)}, \quad \frac{p_m^v(t)}{p_i^v(t)} < \frac{p_m^v(t+1)}{p_i^v(t+1)}.$$

Неважно також переконатися, що для m -х координат даних агентів справджуються нерівності

$$p_m^u(t) < p_m^u(t+1), \quad p_m^v(t) < p_m^v(t+1).$$

Звідси випливає, що значення m -х координат цих векторів збільшується з часом. Завдяки стохастичності можна стверджувати, що $p_m^u(t), p_m^v(t) \rightarrow 1$, а всі інші координати прямують до нуля.

Твердження 3 доведено.

Зауважимо, що у випадку існування m , $1 < m < n$, однакових значень $p_m^v(t)$ всі агенти мають розподіл переконань такий, що $p_m^v(t) > p_i^v(t)$ для всіх $i \neq m$, і тому траєкторія системи збігається до нестійкого нерухомого стану $(0, 0, 0, \frac{1}{m}, 0, \dots, \frac{1}{m}, \frac{1}{m})$, де $\frac{1}{m}$ знаходиться на m -х позиціях однакових значень $p_m^v(t)$.

7. Висновки. У цій роботі розглянуто кілька варіантів моделі складних систем, що описують поширення переконань, які з часом збігаються до стану консенсусу, тобто на границі за часом (при $t \rightarrow \infty$) в усіх агентів розподіли переконань стають стаціонарно рівними. На цьому ж шляху, використовуючи рівняння аналогічні (2), можна описувати динаміку систем із станами, які збігаються до поляризованих чи кластерних розподілів переконань. Поляризація описує процес, в якому агенти розділяються на підгрупи, що не взаємодіють, а всередині кожної з таких груп досягається свій стан консенсусу. Система розділяється на кластери (кластеризується), якщо існують групи агентів із подібними розподілами переконань, причому відстань між переконаннями в різних кластерах є значно більшою, ніж всередині кластера. Тобто при кластеризації всередині кластера консенсус не обов'язково досягається, але відстані між розподілами переконань є відносно незначними.

Зауважимо, що в цій роботі розглянуто модель поведінки агентів за припущення, що їхні зв'язки подано у вигляді повного графа. Таке обмеження забезпечило досить просту поведінку системи, коли всі агенти приходять до стану консенсусу. У випадку неповного графа динаміка зв'язків між агентами буде значно складнішою, що потребує подальшого дослідження. Але різні види графів із додатковими симетріями цілком доступні для аналізу. Перспективною для застосувань є модель, в якій імовірність вибору пари агентів для взаємодії у кожен момент часу не однакова, а задається фіксованим правилом.

Література

1. DeGroot M. Reaching a consensus // J. Amer. Statist. Assoc. – 1974. – **69**. – P. 118–121.
2. Hegselmann R., Krause U. Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis and simulations // J. Artificial Soc. and Soc. Simul. – 2002. – **5**, № 3. – 33 p.
3. Deffuant G., Neau D., Amblard F., Weisbuch G. Mixing beliefs among interacting agents // Adv. Complex Syst. – 2000. – **3**. – P. 87–98.
4. Weisbuch G. Bounded confidence and social networks // Eur. Phys. J. B. – 2004. – **38**, № 2. – P. 339–343.
5. Li L., Scaglione A., Swami A., Zhao Q. Consensus, polarization and clustering of opinions in social networks // IEEE J. Select. Areas Commun. – 2013. – **31**, № 6. – P. 1072–1083.
6. Li L., Scaglione A., Swami A., Zhao Q. Trust, opinion diffusion and radicalization in social networks // Asilomar Conf. Signals, Systems and Comput. – 2011. – P. 691–695.
7. Hu H. Competing opinion diffusion on social networks // Roy. Soc. Open Sci. – 2017. – **4**. – 13 p.
8. Yildiz M. E. et al. Voting models in random networks // Inform. Theory and Appl. Workshop (ITA). – 2010. – P. 1–7.
9. Castellano C., Fortunato S., Loreto V. Statistical physics of social dynamics // Rev. Modern Phys. – 2009. – **81**. – P. 591–646.

10. *Watts D., Strogatz S.* Collective dynamics of 'small world' networks // *Nature*. – 1998. – **393**. – P. 440–442.
11. *Albeverio S., Bodnarchuk M. V., Koshmanenko V. D.* Dynamics of discrete conflict interactions between non-annihilating opponents // *Methods Funct. Anal. and Topology*. – 2005. – **11**, № 4. – P. 309–319.
12. *Боднарчук М. В., Кошманенко В. Д., Харченко Н. В.* Властивості граничних станів динамічної системи конфлікту // *Нелінійні коливання*. – 2004. – **7**, № 4. – С. 446–461.
13. *Albeverio S., Koshmanenko V., Samoilenko I.* The conflict interaction between two complex systems: Cyclic migration // *J. Interdisciplinary Math.* – 2008. – **11**, № 2. – P. 163–185.
14. *Koshmanenko V. D., Samoilenko I. V.* A dynamical system model for a conflict triad // *Nonlinear Oscillations*. – 2011. – **14**, № 1. – P. 55–75.
15. *Koshmanenko V. D.* Existence theorems of the ω -limit states for conflict dynamical systems // *Methods Funct. Anal. and Topology*. – 2014. – **20**, № 4. – P. 379–390.
16. *Koshmanenko V., Karataieva T., Kharchenko N., Verygina I.* Models of the conflict redistribution of vital resources // *Soc. Simul. Conf.* – Italy, Rome, 2016. – P. 4.
17. *Koshmanenko V. D., Karataieva T. V.* On personal strategies in conflict socium // *Econophys. Colloq.* (Warsaw, 5–7 July, 2017). – P. 32.
18. *Кошманенко В. Д.* Спектральна теорія динамічних систем конфлікту. – Київ: Наук. думка, 2016. – 288 с.
19. *Karataieva T., Koshmanenko V., Krawczyk M., Kulakowski K.* Mean field model of a game for power // *Physica A*. – 2019. – **525**. – P. 535–547.
20. *Каратасва Т. В., Кошманенко В. Д.* Соціум, математична модель динамічної системи конфлікту // *Нелінійні коливання*. – 2019. – **22**, № 1. – С. 66–85.
21. *Koshmanenko V., Kharchenko N.* Fixed points of complex systems with attractive interaction // *Methods Funct. Anal. and Topology*. – 2017. – **23**, № 2. – P. 164–176.

Одержано 07.04.19