Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 1, 109 – 126

Про одну коефіцієнтну обернену задачу для параболічного рівняння в області з вільною межею

Галина А. Снітко

(*Представлена А. Є. Шишковим*)

Анотація. У роботі розглядається обернена задача визначення коефіцієнта при першій похідній за просторовою змінною невідомої функції одновимірного параболічного рівняння в області, межа якої визначається двома невідомими функціями. Встановлено умови локального існування та єдиності розв'язку оберненої задачі.

2010 MSC. 35R30.

Ключові слова та фрази. Обернена задача, параболічне рівняння, вільна межа, функція Гріна.

Вступ

На сучасному етапі розвитку теорії обернених задач коефіцієнтні обернені задачі в областях з відомими межами достатньо повно вивчені. Зокрема, в [1] встановлено умови глобального існування розв'язку оберненої задачі для рівняння

$$u_t = u_{xx} + p(t)u_x, \quad x \in (0,1), \quad t > 0,$$

з невідомим коефіцієнтом $p(t)$ та умовою перевизначення

$$u_x(0,t) + p(t)u(0,t) = g(t), \quad t > 0.$$

Дослідження такої задачі продовжено в [2, 3]. В [2] отримано умови локального існування розв'язку задачі, а також умови, за яких задача не може мати глобального розв'язку. В [3] знайдено умови локального

Стаття надійшла в редакцію 21.08.2012

ISSN 1810 – 3200.

за часом існування, єдиності та неперервної залежності від вихідних даних розв'язку оберненої задачі з умовою перевизначення

$$m(t) = \int\limits_0^{b(t)} u(x,t)dx, \quad t \in [0,T],$$

де $0 < b(t) < 1,\ t \in [0,T]$, — задана функція. В [4] встановлено умови однозначної розв'язності оберненої задачі визначення залежних від часу старшого і молодшого коефіцієнтів параболічного рівняння у випадку нелокальних та інтегральних умов.

Результати досліджень коефіцієнтних обернених задач для параболічних рівнянь показали, що питання ідентифікації коефіцієнта, який залежав би від усіх незалежних змінних, залишається відкритим. Певним наближенням до вирішення цього питання можна вважати подання коефіцієнта у вигляді добутку двох функцій від різних аргументів, одна з яких відома, а інша підлягає визначенню. У роботі [5] знайдено умови однозначної розв'язності оберненої задачі визначення старшого коефіцієнта одновимірного параболічного рівняння, який подається у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить від просторової змінної, а інша — від часу, причому просторова залежність є відомою. В [6] досліджено обернену задачу знаходження невідомих коефіцієнтів $(a_0(t), a_1(t))$ одновимірного параболічного рівняння

$$u_t = (a_0(t) + xa_1(t))u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t),$$

$$(x,t) \in (0,h) \times (0,T).$$

Багато практично важливих задач зводяться до задач з вільними межами, в яких невідома межа розділяє або речовини з різними властивостями, або різні фази однієї і тієї ж речовини. Заміною змінних задачі з вільними межами можна звести до коефіцієнтних обернених задач в областях з відомими межами. Такий підхід дозволяє застосувати до цих задач методику, розроблену для дослідження обернених задач. В [7, 8] знайдено умови існування та єдиності розв'язків обернених задач для одновимірних параболічних рівнянь

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(x,t),$$

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t)$$

з невідомим, залежним від часу, старшим коефіцієнтом в області, частина або вся межа якої є невідомою. В [9–11] досліджено обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при першій похідній за просторовою змінною невідомої функції в одновимірному параболічному рівнянні в області, частина або вся межа якої є невідомою.

1. Формулювання задачі

В області $\Omega_T = \{(x,t) : h_1(t) < x < h_2(t),\ 0 < t < T\}$, де $h_1 = h_1(t),\ h_2 = h_2(t)$ — невідомі функції, розглядаємо обернену задачу визначення коефіцієнтів $b_1(t),\ b_2(t)$ параболічного рівняння

$$u_t = a(x,t)u_{xx}+(b_1(t)x+b_2(t))u_x+c(x,t)u+f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1.1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [h_1(0), h_2(0)], \tag{1.2}$$

крайовими умовами

$$u(h_1(t),t) = \mu_1(t), \quad u(h_2(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.3}$$

та умовами перевизначення

$$h_1'(t) = u_x(h_1(t),t) + \mu_3(t), \quad h_2'(t) = -u_x(h_2(t),t) + \mu_4(t),$$

$$\int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} u(x,t)\,dx = \mu_5(t), \quad \int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} xu(x,t)\,dx = \mu_6(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.4}$$

де $h_1(0) = h_{01}$ — задане число.

Ввівши нову змінну $y = \frac{x-h_1(t)}{h_2(t)-h_1(t)}$, задачу (1.1)–(1.4) зводимо до оберненої задачі з невідомими $(h_1(t),\, h_3(t),\, b_1(t),\, b_2(t),\, v(y,t))$, де $h_3(t) = h_2(t) - h_1(t)$, $v(y,t) = u(yh_3(t) + h_1(t), t)$, в області з відомою межею $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1, 0 < t < T\}$:

$$v_t = \frac{a(yh_3(t) + h_1(t),t)}{h_3^2(t)}\, v_{yy} + \left(\frac{b_1(t)(yh_3(t) + h_1(t)) + b_2(t)}{h_3(t)} + \frac{h_1'(t) + y\,h_3'(t)}{h_3(t)}\right) v_y + c(yh_3(t) + h_1(t),t)\, v + f(yh_3(t) + h_1(t),t), \quad (y,t) \in Q_T, \tag{1.5}$$

$$v(y,0) = \varphi(yh_3(0) + h_1(0)), \quad y \in [0,1], \tag{1.6}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \quad v(1,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.7}$$

$$h_1'(t) = \frac{v_y(0,t)}{h_3(t)} + \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.8}$$

$$h_3'(t) = -\frac{v_y(0,t) + v_y(1,t)}{h_3(t)} + \mu_4(t) - \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.9}$$

$$h_3(t) \int_0^1 v(y,t)\,dy = \mu_5(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.10}$$

$$h_3^2(t) \int_0^1 yv(y,t)\,dy + h_1(t)\mu_5(t) = \mu_6(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.11}$$

де $h_1(0) = h_{01}$ — задане число.

Означення 1.1. *Під розв'язком задачі* (1.5)–(1.11) *розуміємо функції* $(h_1, h_3, b_1, b_2, v) \in (C^1[0,T])^2 \times (C[0,T])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, $h_3(t) > 0$, $t \in [0,T]$, *які задовольняють рівняння* (1.5) *та умови* (1.6)–(1.11).

2. Існування розв'язку задачі (1.5)–(1.11)

Умови існування розв'язку задачі (1.5)–(1.11) містяться в наступній теоремі.

Теорема 2.1. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $a \in C^{1,0}(\mathbb{R} \times [0,T])$, $c, f \in H^{\alpha,0}(\mathbb{R} \times [0,T])$, $\alpha \in (0,1)$, $\varphi \in C^2[h_{01}, h_{02}]$, $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2,5,6$, $\mu_j \in C[0,T]$, $j = 3,4$;

2) $0 < a_0 \le a(x,t) \le a_1$, $c(x,t) \le 0$, $f(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$, $\varphi(x) \ge \varphi_0 > 0$, $x \in [h_{01}, \infty)$, $\varphi'(x) > 0$, $x \in [h_{01}, h_{02}]$, $\varphi'(x) - \varphi'(h_{02} + h_{01} - x) > 0$, $(h_{02} - x)\varphi'(h_{02} + h_{01} - x) - (x - h_{01})\varphi'(x) > 0$, $x \in [h_{01}, \frac{h_{01}+h_{02}}{2})$, $\mu_i(t) > 0$, $i = 1,2,5$, $t \in [0,T]$, *де* $h_{02} = h_2(0)$ *— розв'язок рівняння* $\int_{h_{01}}^{h_2(0)} \varphi(x)\,dx = \mu_5(0)$;

3) *умови узгодження нульового і першого порядків.*

Тоді можна вказати таке число T_0, $0 < T_0 \le T$, *яке визначається вихідними даними, що існує розв'язок задачі* (1.5)–(1.11) *при* $(y,t) \in Q_{T_0}$.

Доведення. Визначимо початкове значення функції $h_2(t)$, що задає частину межі області. За умов теореми існує єдиний розв'язок $h_{02} = h_2(0)$ рівняння

$$\int_{h_{01}}^{h_2(0)} \varphi(x)\,dx = \mu_5(0).$$

Позначимо $h_{03} = h_{02} - h_{01}$. Встановимо оцінки функцій $h_1(t)$, $h_3(t)$. З умов (1.10), (1.11) отримуємо

$$h_3(t) = \frac{\mu_5(t)}{\int_0^1 v(y,t)\,dy}, \quad t \in [0,T], \tag{2.1}$$

$$h_1(t) = \frac{\mu_6(t)}{\mu_5(t)} - \frac{h_3^2(t)}{\mu_5(t)} \int\limits_0^1 y v(y,t)\,dy, \quad t \in [0,T]. \tag{2.2}$$

Із принципу максимуму [12] для розв'язку прямої задачі (1.5)–(1.7) випливає

$$v(y,t) \ge M_0 > 0, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T,$$

де стала M_0 визначається вихідними даними. Тоді для розв'язків рівнянь (2.1), (2.2) одержуємо наступні нерівності:

$$h_3(t) \le \frac{1}{M_0} \max_{[0,T]} \mu_5(t) \equiv H_1 < \infty, \quad t \in [0,T],$$

$$\begin{aligned} |h_1(t)| \le \frac{|\mu_6(t)|}{\mu_5(t)} &+ \frac{\mu_5(t)}{\int_0^1 v(y,t)\,dy} \\ &\le \max_{[0,T]} \frac{|\mu_6(t)|}{\mu_5(t)} + \frac{1}{M_0} \max_{[0,T]} \mu_5(t) \equiv H_2, \quad t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Для оцінки знизу $h_3(t)$ оцінимо $v(y,t)$ зверху. Для цього знову використаємо принцип максимуму

$$v(y,t) \le M_1 < \infty, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T,$$

де M_1 визначається вихідними даними. Згідно з (2.1) отримуємо

$$h_3(t) \ge \frac{1}{M_1} \min_{[0,T]} \mu_5(t) \equiv H_0 > 0, \quad t \in [0,T].$$

Таким чином,

$$0 < M_0 \le v(y,t) \le M_1 < \infty, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T,$$

$$|h_1(t)| \le H_2, \quad 0 < H_0 \le h_3(t) \le H_1 < \infty, \quad t \in [0,T]. \tag{2.3}$$

Зведемо задачу (1.5)–(1.11) до системи рівнянь. Введемо нову функцію

$$\widetilde{v}(y,t) = v(y,t) - \varphi(yh_{03} + h_{01}) - y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + (y-1)(\mu_1(t) - \mu_1(0)).$$

Для функції $\widetilde{v}(y,t)$ одержуємо задачу

$$\begin{gathered}\widetilde{v}_t = \frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)}\,\widetilde{v}_{yy} \\ +\frac{b_1(t)(yh_3(t)+h_1(t))+b_2(t)+h_1'(t)+y\,h_3'(t)}{h_3(t)} \\ \times(\widetilde{v}_y+d(y,t))+c(yh_3(t)+h_1(t),t)\widetilde{v}+F(y,t), \quad (y,t)\in Q_T, \\ \widetilde{v}(y,0)=0, \quad y\in[0,1], \\ \widetilde{v}(0,t)=\widetilde{v}(1,t)=0, \quad t\in[0,T],\end{gathered} \tag{2.4}$$

де $d(y,t)=h_{03}\varphi'(yh_{03}+h_{01})+\mu_2(t)-\mu_2(0)-\mu_1(t)+\mu_1(0)$,

$$\begin{aligned}F(y,t) &= h_{03}^2\frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)}\varphi''(yh_{03}+h_{01})+c(yh_3(t)+h_1(t),t) \\ &\times\big(\varphi(yh_{03}+h_{01})+y(\mu_2(t)-\mu_2(0))+(1-y)(\mu_1(t)-\mu_1(0))\big) \\ &+f(yh_3(t)+h_1(t),t)-y\mu_2'(t)+\mu_1'(t)(y-1).\end{aligned}$$

За допомогою функції Гріна $G_1(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$\widetilde{v}_t = \frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)}\,\widetilde{v}_{yy}+c(yh_3(t)+h_1(t),t)\,\widetilde{v}$$

задачу (2.4) зводимо до рівняння

$$\begin{aligned}\widetilde{v}(y,t) &= \int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\Bigg(\bigg(\frac{b_1(\tau)(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau))+b_2(\tau)}{h_3(\tau)} \\ &+\frac{h_1'(\tau)+\eta h_3'(\tau)}{h_3(\tau)}\bigg)(\widetilde{v}_\eta(\eta,\tau)+d(\eta,\tau))+F(\eta,\tau)\Bigg)d\eta\,d\tau, \\ &\qquad (y,t)\in\overline{Q}_T.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Позначимо $w(y,t)=v_y(y,t)$. Тоді з умов (1.8), (1.9) отримуємо

$$h_1'(t)=\frac{w(0,t)}{h_3(t)}+\mu_3(t), \quad h_3'(t)=-\frac{w(0,t)+w(1,t)}{h_3(t)}+\mu_4(t)-\mu_3(t). \tag{2.6}$$

Використавши (2.6), подамо (2.5) у вигляді

$$\begin{aligned}v(y,t) &= \varphi(yh_{03}+h_{01})+y(\mu_2(t)-\mu_2(0))+(1-y)(\mu_1(t)-\mu_1(0)) \\ &+\int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\Bigg(F(\eta,\tau)+w(\eta,\tau)\bigg(\frac{w(0,\tau)(1-\eta)-\eta w(1,\tau)}{h_3^2(\tau)}\end{aligned}$$

$$+\frac{b_1(\tau)(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau))+b_2(\tau)+(1-\eta)\mu_3(\tau)+\eta\mu_4(\tau)}{h_3(\tau)}\Big)d\eta\,d\tau,$$
$$(y,t)\in\overline{Q}_T. \quad (2.7)$$

Продиференціювавши (2.7) за змінною y, отримаємо

$$w(y,t)=h_{03}\varphi'(yh_{03}+h_{01})+\mu_2(t)-\mu_2(0)-\mu_1(t)+\mu_1(0)$$
$$+\int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\Big(F(\eta,\tau)+w(\eta,\tau)\Big(\frac{w(0,\tau)(1-\eta)-\eta w(1,\tau)}{h_3^2(\tau)}$$
$$+\frac{b_1(\tau)(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau))+b_2(\tau)+(1-\eta)\mu_3(\tau)+\eta\mu_4(\tau)}{h_3(\tau)}\Big)d\eta\,d\tau,$$
$$(y,t)\in\overline{Q}_T. \quad (2.8)$$

Продиференціювавши (1.10), (1.11) і використавши (1.5), (2.6), одержуємо

$$b_1(t)=\Bigg[\int_0^1(a(yh_3(t)+h_1(t),t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))$$
$$+a_x(yh_3(t)+h_1(t),t)(\mu_5(t)-h_3(t)\mu_2(t)+yh_3(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))))w(y,t)\,dy$$
$$+\frac{w(0,t)}{h_3(t)}(a(h_1(t),t)(\mu_5(t)-h_3(t)\mu_2(t))+2\mu_2(t)\mu_5(t)-\mu_1(t)\mu_5(t)$$
$$-h_3(t)\mu_1(t)\mu_2(t))+\frac{w(1,t)}{h_3(t)}(\mu_2(t)-a(h_3(t)+h_1(t),t))(\mu_5(t)-h_3(t)\mu_1(t))$$
$$-h_3(t)\int_0^1(\mu_5(t)-h_3(t)\mu_2(t)+yh_3(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t)))(c(yh_3(t)$$
$$+h_1(t),t)v(y,t)+f(yh_3(t)+h_1(t),t))\,dy+\mu_5(t)(\mu_1(t)\mu_3(t)-\mu_2(t)\mu_4(t))$$
$$+\mu_5'(t)(\mu_5(t)-h_3(t)\mu_2(t)-h_1(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t)))-h_3(t)\mu_1(t)\mu_2(t)(\mu_3(t)$$
$$-\mu_4(t))+\mu_6'(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))\Bigg]\big(2h_3(t)\mu_2(t)\mu_5(t)-\mu_5^2(t)-h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t)$$
$$+2(\mu_2(t)-\mu_1(t))(h_1(t)\mu_5(t)-\mu_6(t))\big)^{-1},\quad t\in[0,T], \quad (2.9)$$

$$b_2(t)=\Bigg[\int_0^1(a(yh_3(t)+h_1(t),t)(\mu_5(t)-h_3(t)\mu_2(t)-h_1(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t)))$$
$$+a_x(yh_3(t)+h_1(t),t)(h_3^2(t)\mu_2(t)+h_1(t)h_3(t)\mu_2(t)+h_1(t)\mu_5(t)-2\mu_6(t)$$

$$
\begin{aligned}
&- yh_3(t)(h_3(t)\mu_2(t) - \mu_5(t) + h_1(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t))))\big)w(y,t)\,dy \\
&+ \frac{w(0,t)}{h_3(t)}(a(h_1(t),t)(h_3^2(t)\mu_2(t) + h_1(t)h_3(t)\mu_2(t) + h_1(t)\mu_5(t) - 2\mu_6(t)) \\
&+ 2\mu_5^2(t) - 2h_3(t)\mu_2(t)\mu_5(t) - 2h_1(t)\mu_5(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) + h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t) \\
&- 2\mu_1(t)\mu_6(t) + h_1(t)\mu_1(t)\mu_5(t) + h_1(t)h_3(t)\mu_1(t)\mu_2(t)) + \frac{w(1,t)}{h_3(t)}(h_3(t)\mu_5(t) \\
&+ h_1(t)h_3(t)\mu_1(t) + h_1(t)\mu_5(t) - 2\mu_6(t))(\mu_2(t) - a(h_3(t) + h_1(t),t)) \\
&- h_3(t)\int_0^1 (h_3^2(t)\mu_2(t) + h_1(t)h_3(t)\mu_2(t) + h_1(t)\mu_5(t) - 2\mu_6(t) \\
&+ yh_3(t)(\mu_5(t) - h_3(t)\mu_2(t) - h_1(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t))))(f(yh_3(t) + h_1(t),t) \\
&+ v(y,t)c(yh_3(t) + h_1(t),t))\,dy + (h_1(t)\mu_5(t) - 2\mu_6(t))(\mu_1(t)\mu_3(t) \\
&- \mu_2(t)\mu_4(t)) + h_3(t)\mu_2(t)(h_3(t)\mu_1(t)\mu_3(t) - \mu_4(t)\mu_5(t)) \\
&+ h_1(t)h_3(t)\mu_1(t)\mu_2(t)(\mu_3(t) - \mu_4(t)) + \mu_5'(t)(h_3^2(t)\mu_2(t) - 2\mu_6(t) \\
&+ 2h_1(t)h_3(t)\mu_2(t) + (\mu_2(t) - \mu_1(t))h_1^2(t)) + \mu_6'(t)(\mu_5(t) - h_3(t)\mu_2(t) \\
&- h_1(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)))\Big]\big(2h_3(t)\mu_2(t)\mu_5(t) - \mu_5^2(t) - h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t) \\
&+ 2(\mu_2(t) - \mu_1(t))(h_1(t)\mu_5(t) - \mu_6(t))\big)^{-1}, \quad t \in [0,T]. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

Отже, задачу (1.5)–(1.11) зведено до системи інтегральних рівнянь (2.1), (2.2), (2.7)–(2.10) відносно невідомих $(h_3(t), h_1(t), v(y,t), w(y,t), b_1(t), b_2(t))$. Якщо $(h_1, h_3, b_1, b_2, v) \in (C^1[0,T])^2 \times (C[0,T])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ є розв'язком задачі (1.5)–(1.11), то $(h_3, h_1, v, w, b_1, b_2) \in (C[0,T])^2 \times (C(\overline{Q}_T))^2 \times (C[0,T])^2$ є розв'язком системи рівнянь (2.1), (2.2), (2.7)–(2.10). Правильним є і обернене твердження.

Нехай $(h_3, h_1, v, w, b_1, b_2)$ є неперервним розв'язком системи рівнянь (2.1), (2.2), (2.7)–(2.10). Продиференціюємо (2.7) за змінною y. Праві частини отриманої рівності та рівності (2.8) співпадають, тому можемо зробити висновок, що $w(y,t) = v_y(y,t)$. Отже, функція $v \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ задовольняє рівняння

$$
\begin{aligned}
v_t = \frac{a(yh_3(t) + h_1(t),t)}{h_3^2(t)}v_{yy} &+ \bigg(\frac{(yh_3(t) + h_1(t))b_1(t) + b_2(t)}{h_3(t)} \\
&+ \frac{(1-y)\mu_3(t) + y\mu_4(t)}{h_3(t)} + \frac{(1-y)v_y(0,t) - yv_y(1,t)}{h_3^2(t)}\bigg)v_y \\
&+ c(yh_3(t) + h_1(t),t)v + f(yh_3(t) + h_1(t),t), \quad (y,t) \in Q_T, \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

та умови (1.6), (1.7) для довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $b_1(t), b_2(t), h_1(t), h_3(t)$. З рівностей (2.1), (2.2) випливають умови

(1.10), (1.11). Подамо (2.9), (2.10) у вигляді

$$b_1(t)(h_3(t)\mu_2(t)-\mu_5(t)+h_1(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t)))+b_2(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))$$
$$=\int\limits_0^1 a_x(yh_3(t)+h_1(t),t)v_y(y,t)\,dy+\frac{\mu_2(t)-a(h_1(t)+h_3(t),t)}{h_3(t)}v_y(1,t)$$
$$+\frac{\mu_1(t)+a(h_1(t),t)}{h_3(t)}v_y(0,t)-h_3(t)\int\limits_0^1(f(yh_3(t)+h_1(t),t)+v(y,t)$$
$$\times c(yh_3(t)+h_1(t),t))\,dy+\mu_5'(t)-\mu_2(t)\mu_4(t)+\mu_1(t)\mu_3(t), \quad (2.12)$$

$$b_1(t)(h_3^2(t)\mu_2(t)-2\mu_6(t)+h_1(t)\mu_5(t)+h_1(t)h_3(t)\mu_2(t))+b_2(t)(h_3(t)\mu_2(t)$$
$$-\mu_5(t))=\int\limits_0^1(yh_3(t)a_x(yh_3(t)+h_1(t),t)+a(yh_3(t)+h_1(t),t))v_y(y,t)\,dy$$
$$+(\mu_2(t)-a(h_1(t)+h_3(t),t))v_y(1,t)-h_3^2(t)\int\limits_0^1 y(c(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)$$
$$+f(yh_3(t)+h_1(t),t))\,dy+\mu_6'(t)-h_1(t)\mu_5'(t)-h_3(t)\mu_2(t)\mu_4(t). \quad (2.13)$$

Припущення теореми дозволяють нам продиференціювати (2.1), (2.2) за t. Використавши те, що функція $v(y,t)$ задовольняє рівняння (2.11), та віднявши від отриманих рівностей (2.12), (2.13), отримуємо

$$\left(h_3'(t)-\mu_4(t)+\mu_3(t)+\frac{v_y(0,t)+v_y(1,t)}{h_3(t)}\right)\frac{\mu_5(t)}{h_3(t)}=0,$$

$$\frac{2(\mu_6(t)-h_1(t)\mu_5(t))}{h_3^2(t)}\left(h_3'(t)-\mu_4(t)+\mu_3(t)+\frac{v_y(0,t)+v_y(1,t)}{h_3^2(t)}\right)$$
$$+\left(h_1'(t)-\mu_3(t)-\frac{v_y(0,t)}{h_3(t)}\right)\frac{\mu_5(t)}{h_3(t)}=0.$$

Звідси робимо висновок, що $(h_1,h_3)\in(C^1[0,T])^2$, функція $v(y,t)$ задовольняє рівняння (1.5) та умови (1.8), (1.9).

Отже, еквівалентність задачі (1.5)–(1.11) та системи рівнянь (2.1), (2.2), (2.7)–(2.10) у вище зазначеному сенсі доведено.

Подамо знаменник у (2.9), (2.10) у вигляді

$$2h_3(t)\mu_2(t)\mu_5(t) - \mu_5^2(t) - h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t) + 2(\mu_2(t) - \mu_1(t))(h_1(t)\mu_5(t) - \mu_6(t)) = \frac{h_3^2(t)}{2}\left[\int_0^1 yw(y,t)\,dy \int_0^1 (1-2y)w(y,t)\,dy + \int_0^1 w(y,t)\,dy \int_0^1 y(2y-1)w(y,t)\,dy\right].$$

Згідно з припущеннями теореми з (2.8) можемо зробити висновок про існування такого числа $t_1,\ 0 < t_1 \le T$, що

$$w(y,t) \ge \frac{h_{03}}{2} \min_{[0,1]} \varphi'(yh_{03} + h_{01}) > 0, \quad (y,t) \in \overline{Q}_{t_1}.$$

Тоді

$$\int_0^1 yw(y,t)\,dy > 0, \quad \int_0^1 w(y,t)\,dy > 0, \quad t \in [0, t_1].$$

Подамо вирази $\int_0^1 (1-2y)w(y,t)\,dy$, $\int_0^1 y(2y-1)w(y,t)\,dy$ у вигляді

$$\int_0^1 (1-2y)w(y,t)\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2y)(w(y,t) - w(1-y,t))\,dy, \tag{2.14}$$

$$\int_0^1 y(2y-1)w(y,t)\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2y)((1-y)w(1-y,t) - yw(y,t))\,dy. \tag{2.15}$$

Підставимо (2.8) в (2.14). Всі доданки, крім першого, при $t \to 0$ прямують до нуля. Тоді можемо вважати, що існує таке число $t_2,\ 0 < t_2 \le T$, що

$$\int_0^1 (1-2y)w(y,t)\,dy \ge \frac{h_{03}}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2y)(\varphi'(yh_{03} + h_{01}) - \varphi'(h_{03}(1-y) + h_{01}))\,dy > 0, \quad t \in [0, t_2].$$

Підставивши (2.8) в (2.15), можемо зробити висновок про існування такого числа $t_3,\ 0 < t_3 \le T$, що

$$\int_0^1 y(2y-1)w(y,t)\,dy \ge \frac{h_{03}}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2y)((1-y)\varphi'(h_{03}(1-y) + h_{01}) - y\varphi'(yh_{03} + h_{01}))\,dy > 0, \quad t \in [0, t_3].$$

Таким чином,

$$
\begin{gathered}
2h_3(t)\mu_2(t)\mu_5(t)-\mu_5^2(t)-h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t) \\
+2(\mu_2(t)-\mu_1(t))(h_1(t)\mu_5(t)-\mu_6(t))\geq C_0>0, \\
t\in[0,t_4],\quad t_4=\min\{t_1,t_2,t_3\}. \quad (2.16)
\end{gathered}
$$

Встановимо оцінки розв'язків системи рівнянь (2.1), (2.2), (2.7)–(2.10). Позначимо $W(t)=\max_{y\in[0,1]}|w(y,t)|$. З (2.9), (2.10), враховуючи (2.3), (2.16), одержуємо

$$
|b_1(t)|\leq C_1+C_2W(t),\quad |b_2(t)|\leq C_3+C_4W(t),\quad t\in[0,t_4]. \quad (2.17)
$$

Використовуючи (2.3), (2.17) та оцінки функції Гріна [12], з (2.8) отримуємо

$$
W(t)\leq C_5+C_6\int_0^t\frac{W(\tau)+W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau,\quad t\in[0,t_4].
$$

Метод розв'язування останньої нерівності подано в [13]. Звідси отримуємо оцінку

$$
W(t)\leq M_2<\infty,\quad t\in[0,t_5],
$$

де $t_5, 0<t_5\leq t_4$, визначається сталими C_5, C_6. Тоді

$$
|b_1(t)|\leq C_1+C_2M_2\equiv B_1,\quad |b_2(t)|\leq C_3+C_4M_2\equiv B_2,\quad t\in[0,t_5].
$$

Подамо систему рівнянь (2.1), (2.2), (2.7)–(2.10) у вигляді операторного рівняння

$$
\omega=P\omega,
$$

де $\omega=(h_3(t),h_1(t),v(y,t),w(y,t),b_1(t),b_2(t))$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (2.1), (2.2), (2.7)–(2.10).

Візьмемо довільні (h_3,h_1,v,w,b_1,b_2), для яких справедливі вище встановлені оцінки. Оцінимо праву частину рівняння (2.8):

$$
|P_4w|\leq C_7+C_8\sqrt{t}.
$$

Вибираючи число $t_6, 0<t_6\leq T$, так, щоб виконувалась нерівність $C_7+C_8\sqrt{t_6}\leq M_2$, отримаємо

$$
|P_4w|\leq M_2,\quad (y,t)\in[0,1]\times[0,t_6].
$$

Позначимо $N=\{(h_3,h_1,v,w,b_1,b_2)\in(C[0,T_0])^2\times(C(\overline{Q}_{T_0}))^2\times(C[0,T_0])^2:\ H_0\leq h_3(t)\leq H_1, |h_1(t)|\leq H_2,\ M_0\leq v(y,t)\leq M_1,$

$|w(y,t)| \le M_2,\ |b_1(t)| \le B_1,\ |b_2(t)| \le B_2\}$, де $T_0 = \min\{t_5, t_6\}$. Очевидно, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера, а оператор P переводить N в себе. Те, що оператор P цілком неперервний на N, доводиться як у [9].

Отже, за теоремою Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора існує розв'язок системи рівнянь (2.1), (2.2), (2.7)–(2.10) і, відповідно, розв'язок задачі (1.5)–(1.11) при $(y,t) \in \overline{Q}_{T_0}$. $\square$

3. Єдиність розв'язку задачі (1.5)–(1.11)

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови:* $a \in C^{2,0}(\mathbb{R}\times[0,T])$, $c, f \in C^{1,0}(\mathbb{R}\times[0,T])$, $a(x,t) > 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]$, $\varphi(x) \ge \varphi_0 > 0$, $x \in [h_{01}, \infty)$, $\varphi'(x) > 0$, $x \in [h_{01}, h_{02}]$, $\varphi'(x) - \varphi'(h_{02}+h_{01}-x) > 0$, $(h_{02} - x)\varphi'(h_{02}+h_{01}-x) - (x-h_{01})\varphi'(x) > 0$, $x \in [h_{01}, \frac{h_{01}+h_{02}}{2})$, $\mu_i(t) > 0$, $i = 2,5$, $t \in [0,T]$.

Тоді можна вказати таке число $t_4, 0 < t_4 \le T$, *яке визначається вихідними даними, що задача* (1.5)–(1.11) *не може мати двох різних розв'язків при* $(y,t) \in Q_{t_4}$.

Доведення. Припустимо, що $(h_{1i}(t), h_{3i}(t), b_{1i}(t), b_{2i}(t), v_i(y,t))$, $i = 1,2$, — два розв'язки задачі (1.5)–(1.11). Позначимо

$$\frac{b_{1i}(t)}{h_{3i}(t)} = r_i(t),\ \frac{b_{2i}(t)}{h_{3i}(t)} = q_i(t),\ \frac{h'_{1i}(t)}{h_{3i}(t)} = s_i(t),\ \frac{h'_{3i}(t)}{h_{3i}(t)} = p_i(t),\ i = 1,2,$$

$$r(t) = r_1(t) - r_2(t), \quad q(t) = q_1(t) - q_2(t), \quad s(t) = s_1(t) - s_2(t),$$

$$p(t) = p_1(t) - p_2(t), \quad v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t).$$

Функції $r(t), q(t), s(t), p(t), v(y,t)$ задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} v_t = \frac{a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)}{h_{31}^2(t)} v_{yy} + (r_1(t)(yh_{31}(t)+h_{11}(t)) \\ + q_1(t) + s_1(t) + yp_1(t))v_y + c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)v \\ + \left(\frac{a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)}{h_{31}^2(t)} - \frac{a(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)}{h_{32}^2(t)}\right) v_{2yy} \\ + (r(t)(yh_{31}(t)+h_{11}(t)) + r_2(t)(y(h_{31}(t)-h_{32}(t)) + h_{11}(t) - h_{12}(t)) \\ + q(t) + s(t) + yp(t))v_{2y} + (c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t) \\ - c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))v_2 + f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t) - f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t), \\ (y,t) \in Q_T, \quad (3.1) \end{aligned}$$

та умови

$$v(y,0) = 0, \quad y \in [0,1], \qquad (3.2)$$

$$v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{3.3}$$

$$h'_{11}(t) - h'_{12}(t) = \frac{v_y(0,t)}{h_{31}(t)} + v_{2y}(0,t)\left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)}\right),$$

$$h'_{31}(t) - h'_{32}(t) = -(v_{2y}(0,t) + v_{2y}(1,t))\left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)}\right) - \frac{v_y(0,t) + v_y(1,t)}{h_{31}(t)},$$

$$\int\limits_0^1 v(y,t)\,dy = \mu_5(t)\left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)}\right),$$

$$\int\limits_0^1 yv(y,t)\,dy = \mu_6(t)\left(\frac{1}{h^2_{31}(t)} - \frac{1}{h^2_{32}(t)}\right) - \left(h_{11}(t)\left(\frac{1}{h^2_{31}(t)} - \frac{1}{h^2_{32}(t)}\right) + (h_{11}(t) - h_{12}(t))\frac{1}{h^2_{32}(t)}\right)\mu_5(t), \quad t \in [0,T]. \tag{3.4}$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)}{h^2_{31}(t)}v_{yy} + (r_1(t)(yh_{31}(t) + h_{11}(t)) + q_1(t) + s_1(t) + yp_1(t))v_y + c(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)v$$

з урахуванням умов (3.2), (3.3) функцію $v(y,t)$ подамо у вигляді

$$v(y,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_1^*(y,t,\eta,\tau)\Bigg[v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)\left(\frac{a(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau),\tau)}{h^2_{31}(\tau)} - \frac{a(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau)}{h^2_{32}(\tau)}\right) + (r(\tau)(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau)) + r_2(\tau)(\eta(h_{31}(\tau) - h_{32}(\tau)) + h_{11}(\tau) - h_{12}(\tau)) + q(\tau) + s(\tau) + \eta p(\tau))v_{2\eta}(\eta,\tau) + v_2(\eta,\tau) \times (c(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau),\tau) - c(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau)) + f(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau),\tau) - f(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau)\Bigg]d\eta\,d\tau, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T. \tag{3.5}$$

Продиференціювавши (3.5) за змінною y, одержуємо

$$v_y(y,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}^*(y,t,\eta,\tau)\Big[v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)\Big(\frac{a(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)}{h_{31}^2(\tau)}$$
$$-\frac{a(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)}{h_{32}^2(\tau)}\Big)+(r(\tau)(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau))+r_2(\tau)(\eta(h_{31}(\tau)$$
$$-h_{32}(\tau))+h_{11}(\tau)-h_{12}(\tau))+q(\tau)+s(\tau)+\eta p(\tau))v_{2\eta}(\eta,\tau)+v_2(\eta,\tau)$$
$$\times(c(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)-c(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau))+f(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)$$
$$-f(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)\Big]d\eta d\tau,\qquad (y,t)\in\overline{Q}_T. \quad (3.6)$$

Оскільки для $h'_{1i},\ h'_{3i},\ b_{1i}(t),\ b_{2i}(t),\ i=1,2$, справджуються рівності, аналогічні до (2.6), (2.9), (2.10), то звідси отримуємо

$$(q(t)+s(t))(\mu_2(t)-\mu_1(t))+p(t)\mu_2(t)+r(t)(h_{31}(t)\mu_2(t)-\mu_5(t)+h_{11}(t)$$
$$\times(\mu_2(t)-\mu_1(t)))=\frac{v_y(0,t)a(h_{11}(t),t)-v_y(1,t)a(h_{11}(t)+h_{31}(t),t)}{h_{31}^2(t)}$$
$$+\Big(\frac{1}{h_{31}^2(t)}-\frac{1}{h_{32}^2(t)}\Big)(v_{2y}(0,t)a(h_{11}(t),t)-v_{2y}(1,t)a(h_{11}(t)+h_{31}(t),t))$$
$$+\frac{1}{h_{31}^2(t)}(v_{2y}(0,t)(a(h_{11}(t),t)-a(h_{12}(t),t))-(a(h_{11}(t)+h_{31}(t),t)$$
$$-a(h_{12}(t)+h_{32}(t),t))v_{2y}(1,t))+\frac{1}{h_{31}(t)}\int\limits_0^1(a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)v_y(y,t)$$
$$+v_{2y}(y,t)(a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-a(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)))\,dy$$
$$+\Big(\frac{1}{h_{31}(t)}-\frac{1}{h_{32}(t)}\Big)\Big(\mu'_5(t)+\int\limits_0^1 a(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)v_{2y}(y,t)\,dy\Big)$$
$$-\int\limits_0^1(v(y,t)c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)+(c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-c(yh_{32}(t)$$
$$+h_{12}(t),t))v_2(y,t)+f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))\,dy$$
$$-r_2(t)(\mu_2(t)(h_{31}(t)-h_{32}(t))+(\mu_2(t)-\mu_1(t))(h_{11}(t)-h_{12}(t))),$$
$$t\in[0,T],\quad (3.7)$$

$$s(t)=\frac{v_y(0,t)}{h_{31}^2(t)}+v_{2y}(0,t)\Big(\frac{1}{h_{31}^2(t)}-\frac{1}{h_{32}^2(t)}\Big)+\mu_3(t)\Big(\frac{1}{h_{31}(t)}-\frac{1}{h_{32}(t)}\Big),$$
$$t\in[0,T],\quad (3.8)$$

$$p(t) = -\frac{v_y(0,t)+v_y(1,t)}{h_{31}^2(t)} - (v_{2y}(0,t)+v_{2y}(1,t))\left(\frac{1}{h_{31}^2(t)} - \frac{1}{h_{32}^2(t)}\right)$$
$$+ (\mu_4(t)-\mu_3(t))\left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)}\right), \quad t \in [0,T], \quad (3.9)$$

$$r(t) = \Bigg[\frac{1}{h_{31}(t)}\int_0^1 (a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)(\mu_2(t)-\mu_1(t)) + (yh_{31}(t)(\mu_2(t)$$
$$-\mu_1(t)) + \mu_5(t) - h_{31}(t)\mu_2(t))a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t))v_{1y}(y,t)\,dy + ((\mu_5(t)$$
$$- h_{31}(t)\mu_2(t))a(h_{11}(t),t) + 2\mu_2(t)\mu_5(t) - \mu_1(t)\mu_5(t) - h_{31}(t)\mu_1(t)\mu_2(t))$$
$$\times \frac{v_{1y}(0,t)}{h_{31}^2(t)} + \frac{v_{1y}(1,t)}{h_{31}^2(t)}(\mu_2(t) - a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t))(\mu_5(t) - h_{31}(t)\mu_1(t))$$
$$-\int_0^1 (c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)v_1(y,t) + f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t))(\mu_5(t) - h_{31}(t)$$
$$\times \mu_2(t) + yh_{31}(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t)))\,dy + \mu_5(t)(\mu_1(t)\mu_3(t) - \mu_2(t)\mu_4(t)) + \mu_5'(t)$$
$$\times (\mu_5(t) - h_{31}(t)\mu_2(t) - h_{11}(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))) - h_{31}(t)\mu_1(t)\mu_2(t)(\mu_3(t)$$
$$-\mu_4(t)) + \mu_6'(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))\Bigg](\mu_1(t)\mu_2(t)(h_{31}^2(t) - h_{32}^2(t)) - 2\mu_2(t)\mu_5(t)$$
$$\times (h_{31}(t) - h_{32}(t)) - 2\mu_5(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))(h_{11}(t) - h_{12}(t)))\big((2h_{31}(t)\mu_2(t)$$
$$\times \mu_5(t) - \mu_5^2(t) - h_{31}^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t) + 2(\mu_2(t)-\mu_1(t))(h_{11}(t)\mu_5(t) - \mu_6(t)))$$
$$\times (2h_{32}(t)\mu_2(t)\mu_5(t) - \mu_5^2(t) - h_{32}^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t) + 2(\mu_2(t)-\mu_1(t))(h_{12}(t)$$
$$\times \mu_5(t) - \mu_6(t)))\big)^{-1} + \Bigg[\left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)}\right)\Bigg(\int_0^1 (a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)$$
$$\times (\mu_2(t)-\mu_1(t)) + a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)(\mu_5(t) - h_{31}(t)\mu_2(t) + y(\mu_2(t)$$
$$-\mu_1(t))h_{31}(t)))v_{1y}(y,t)\,dy + \mu_5(t)(\mu_1(t)\mu_3(t) - \mu_2(t)\mu_4(t)) + \mu_6'(t)(\mu_2(t)$$
$$-\mu_1(t)) + \mu_5'(t)(\mu_5(t) - h_{31}(t)\mu_2(t) - h_{11}(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t)))\Bigg) + \frac{1}{h_{32}(t)}$$
$$\times \int_0^1 ((a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)(\mu_2(t)-\mu_1(t)) + (yh_{31}(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t)) + \mu_5(t)$$
$$- h_{31}(t)\mu_2(t))a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t))v_y(y,t) + v_2(y,t)((\mu_2(t)-\mu_1(t))$$
$$\times (a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t) - a(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)) + (yh_{31}(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))$$
$$+ \mu_5(t) - h_{31}(t)\mu_2(t))(a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t) - a_x(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))$$

$$+\,a_x(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)(h_{31}(t)-h_{32}(t))(y(\mu_2(t)-\mu_1(t))-\mu_2(t))))\,dy$$
$$+\,((\mu_5(t)-h_{31}(t)\mu_2(t))a(h_{11}(t),t)+2\mu_2(t)\mu_5(t)-\mu_1(t)\mu_5(t)-h_{31}(t)$$
$$\times\,\mu_1(t)\mu_2(t))\frac{v_y(0,t)}{h_{31}^2(t)}+\frac{v_y(1,t)}{h_{31}^2(t)}(\mu_2(t)-a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t))(\mu_5(t)-h_{31}(t)$$
$$\times\,\mu_1(t))+\left(\frac{1}{h_{31}^2(t)}-\frac{1}{h_{32}^2(t)}\right)((\mu_2(t)-a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t))(\mu_5(t)-h_{31}(t)$$
$$\times\,\mu_1(t))v_{2y}(0,t)+((\mu_5(t)-h_{31}(t)\mu_2(t))a(h_{11}(t),t)+2\mu_2(t)\mu_5(t)-\mu_1(t)$$
$$\times\,\mu_5(t)-h_{31}(t)\mu_1(t)\mu_2(t))v_{2y}(0,t))+\frac{v_{2y}(0,t)}{h_{32}^2(t)}(a(h_{11}(t),t)-a(h_{12}(t),t))$$
$$\times\,(\mu_5(t)-h_{31}(t)\mu_2(t))-(a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t)-a(h_{32}(t)+h_{12}(t),t))(\mu_5(t)$$
$$-\,h_{31}(t)\mu_1(t))\frac{v_{2y}(1,t)}{h_{32}^2(t)}-\frac{h_{31}(t)-h_{32}(t)}{h_{32}^2(t)}\mu_2(t)(\mu_1(t)v_{2y}(1,t)+v_{2y}(0,t)$$
$$\times\,(\mu_1(t)+a(h_{12}(t),t))+\mu_5'(t))+\frac{h_{11}(t)-h_{12}(t)}{h_{32}^2(t)}(\mu_1(t)a(h_{12}(t)+h_{32}(t),t)$$
$$\times\,v_{2y}(1,t)-(\mu_2(t)-\mu_1(t))\mu_5'(t))-\int\limits_0^1(\mu_5(t)-h_{31}(t)\mu_2(t)+yh_{31}(t)(\mu_2(t)$$
$$-\,\mu_1(t)))(c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)v(y,t)+v_2(y,t)(c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)$$
$$-\,c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))+f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))\,dy$$
$$-\int\limits_0^1(c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)v_2(y,t)+f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))(h_{31}(t)-h_{32}(t))$$
$$\times\,(y(\mu_2(t)-\mu_1(t))-\mu_2(t))\,dy\Bigg]\big(2h_{32}(t)\mu_2(t)\mu_5(t)-\mu_5^2(t)-h_{32}^2(t)\mu_1(t)$$
$$\times\,\mu_2(t)+2(\mu_2(t)-\mu_1(t))(h_{12}(t)\mu_5(t)-\mu_6(t))\big)^{-1},\quad t\in[0,T].\quad(3.10)$$

Зауважимо, що

$$2h_{3i}(t)\mu_2(t)\mu_5(t)-\mu_5^2(t)-h_{3i}^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t)$$
$$+\,2(\mu_2(t)-\mu_1(t))(h_{1i}(t)\mu_5(t)-\mu_6(t))\geq C_0>0,$$
$$i=1,2,\ t\in[0,t_4].\quad(3.11)$$

Згідно з припущеннями теореми правильною є наступна рівність:

$$f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)$$
$$=(h_{11}(t)-h_{12}(t)+y(h_{31}(t)-h_{32}(t)))\int\limits_0^1 f_x(yh_{32}(t)+h_{12}(t)$$

$$+ \sigma(y(h_{31}(t) - h_{32}(t)) + h_{11}(t) - h_{12}(t)), t)\, d\sigma, \quad (3.12)$$

яка справедлива і для функцій $c(yh_{3i}(t)+h_{1i}(t), t)$, $a(yh_{3i}(t)+h_{1i}(t), t)$ та $a_x(yh_{3i}(t) + h_{1i}(t), t)$, $i = 1, 2$.

Виразимо $h_{3i}(t)$, $h_{1i}(t)$ через $p_i(t)$, $s_i(t)$

$$h_{3i}(t) = h_{3i}(0) \exp\left(\int_0^t p_i(\tau)\, d\tau\right),$$

$$h_{1i}(t) = h_{1i}(0) + h_{3i}(0) \int_0^t s_i(\tau) \exp\left(\int_0^\tau p_i(\sigma)\, d\sigma\right) d\tau, \quad i = 1, 2,$$

де $h_{31}(0) = h_{32}(0) = h_{03},\ h_{11}(0) = h_{12}(0) = h_{01}$. Враховуючи рівність

$$e^x - e^y = (x - y) \int_0^1 e^{y+\tau(x-y)} d\tau,$$

одержимо

$$\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} = -\frac{1}{h_{03}} \int_0^t p(\tau)\, d\tau \int_0^1 \exp\left(-\int_0^t (\sigma p(\tau) + p_2(\tau))\, d\tau\right) d\sigma, \tag{3.13}$$

$$h_{11}(t) - h_{12}(t) = h_{03}\left(\int_0^t s(\tau) \exp\left(\int_0^\tau p_1(\sigma)\, d\sigma\right) d\tau\right.$$
$$\left. + \int_0^t s_2(\tau) \int_0^\tau p(\eta)\, d\eta \exp\left(\int_0^\tau (p_2(\rho) + \sigma p(\rho))\, d\rho\right) d\sigma\, d\tau\right). \quad (3.14)$$

Аналогічно (3.13) використаємо для зображення різниць $h_{31}(t) - h_{32}(t)$, $h_{31}^2(t) - h_{32}^2(t)$, $\frac{1}{h_{31}^2(t)} - \frac{1}{h_{32}^2(t)}$.

Врахувавши (3.12)–(3.14) і підставивши (3.5), (3.6) в (3.8)–(3.10), одержимо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно невідомих $p(t), s(t), q(t), r(t)$. З єдиності розв'язків таких систем випливає, що $p(t) = 0,\ s(t) = 0,\ q(t) = 0,\ r(t) = 0,$ $t \in [0, t_4]$. Звідси отримаємо $p_1(t) = p_2(t),\ s_1(t) = s_2(t),\ q_1(t) = q_2(t),\ r_1(t) = r_2(t),\ t \in [0, t_4]$, а, отже, $h_{31}(t) = h_{32}(t),\ h_{11}(t) = h_{12}(t),\ b_{21}(t) = b_{22}(t),\ b_{11}(t) = b_{12}(t),\ t \in [0, t_4]$. Використовуючи це в задачі (3.1)–(3.3), знаходимо, що $v_1(y, t) = v_2(y, t),\ (y, t) \in \overline{Q}_{t_4}$, що і завершує доведення теореми. $\square$

Література

[1] Yin Hong-Ming, *Global solvability for some parabolic inverse problems* // J. Math. Anal. Appl., (1991), 392–403.

[2] D. D. Trong, D. D. Ang, *Coefficient identification for a parabolic equation* // Inverse Problems, **10** (1994), No. 3, 733–752.

[3] J. Cannon, S. Perez-Esteva, *Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation* // Inverse Problems, **10** (1994), No. 3, 521–531.

[4] М. І. Іванчов, Н. В. Пабирівська, *Однозначне визначення двох коефіцієнтів у параболічному рівнянні у випадку нелокальних та інтегральних умов* // Укр. мат. журн., **53** (2001), No. 5, 589–596.

[5] B. F. Jones, *Various methods for finding unknown coefficients in parabolic differential equations* // Comm. on Pure and Appl. Math., **16** (1963), 33–44.

[6] Н. В. Пабирівська, *Теплові моменти в обернених задачах для параболічних рівнянь* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., (2000), вип. 56, 142–149.

[7] М. І. Іванчов, *Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності* // Укр. мат. журн., **55** (2003), No. 7, 901–910.

[8] І. Баранська, *Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з невідомими межами* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., (2005), вип. 64, 20–38.

[9] Г. А. Снітко, *Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею* // Мат. методи та фіз.-мех. поля, **50** (2007), No. 4, 7–18.

[10] Г. А. Снітко, *Обернена задача визначення молодшого коефіцієнта в параболічному рівнянні в області з вільною межею* // Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка". "Фізико-математичні науки", **643** (2009), No. 643, 45–52.

[11] Г. А. Снітко, *Коефіцієнтна обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею* // Мат. методи та фіз.-мех. поля., **51** (2008), No. 4, 37–47.

[12] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Москва: Наука, 1967.

[13] M. Ivanchov, *Inverse problems for equations of parabolic type*, Lviv: VNTL Publ. (Math. Studies: Monograph Ser., **10**), 2003.

Відомості про авторів

Галина Анатоліївна Снітко

вул. Дж. Дудаєва, 15, к. 58,
79005, Львів
Україна
E-Mail: snitkog@ukr.net