Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 1, 127 – 140

Критерий безусловной базисности семейств векторных экспонент

Мария Г. Волкова, Елена И. Олефир

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. В статье доказывается критерий безусловной базисности семейств вектор-функций

$$E_k(t) := c_k e^{i\lambda_k t}, \quad c_k \in \mathbb{C}^n, \quad \lambda_k \in \Lambda$$

в декартовом произведении n экземпляров пространства $L_2(0,a)$ без ограничительного условия $\inf_k \operatorname{Im} \lambda_k > -\infty$

2010 MSC. 46E40.

Ключевые слова и фразы. Безусловные базисы, несамосопряженные операторы, векторные экспоненты.

Обозначим через $L_2^{(n)}(0,a)$ декартово произведение n экземпляров пространства $L_2(0,a)$ со стандартным скалярным произведением и рассмотрим в нем семейство функций

$$E_n(t) := c_n e^{i\lambda_n t}, \quad \lambda_n \in \Lambda, \tag{1}$$

где c_n — постоянные векторы из $\mathbb{C}^n$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ — комплексная последовательность с единственной предельной точкой ∞. Критерии безусловной базисности семейств вида (1) в пространстве $L_2^{(n)}(0,a)$ находят ряд важных приложений в теории управления системами с распределенными параметрами [1]. В этой монографии доказан ряд критериев безусловной базисности векторных экспонент при дополнительном условии

$$\inf_{\lambda_n \in \Lambda} \operatorname{Im} \lambda_n > -\infty. \tag{2}$$

Статья поступила в редакцию 5.05.2013

ISSN 1810 – 3200.

Операторный подход к изучению базисных свойств семейств (1) приводит к необходимости исследовать спектральную структуру конечномерных возмущений специального вида оператора интегрирования в пространстве $L_2^{(n)}(0,a)$. Действительно, пусть семейство (1) образует безусловный базис пространства $L_2^{(n)}(0,a)$. Тогда существует ограниченный в $L_2^{(n)}(0,a)$ оператор K такой, что $(KE_n)(t) = \lambda_n^{-1}E_n(t), \lambda_n \in \Lambda$ (без ограничения общности, считаем, что $0 \notin \Lambda$). Оператор K будем искать в виде

$$K = B^* + \Gamma,$$

где оператор B задается формулой

$$(Bh)(t) = \operatorname{col}\bigl((Ih_k)(t)\bigr)_{k=1}^n, \quad h = \operatorname{col}(h_k), \quad (Ih_k)(t) = i\int\limits_0^t h_k(s)\,ds, \tag{3}$$

а оператор Γ подлежит определению. Из того, что λ_n^{-1} суть собственные числа оператора K, следуют равенства

$$(\Gamma E_p)(t) = -\lambda_p^{-1}e^{i\lambda_p a}c_p, \quad \lambda_p \in \Lambda, \tag{4}$$

то есть образ Γ натягивается на стандартные орты $e_k = \operatorname{col}(\delta_{kj})_{j=1}^n$ пространства $\mathbb{C}^n$. Это означает, что оператор $K - K^*$ конечномерен и потому сходится ряд [2]

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left|\operatorname{Im}\lambda_p^{-1}\right| < \infty,$$

что, в свою очередь, влечет однозначную разрешимость для каждого k, $1 \le k \le n$ проблемы моментов

$$(E_p, f_k) = -\lambda_p^{-1}e^{i\lambda_p a}c_p^k, \quad c_p = \operatorname{col}(c_p^k)_{k=1}^n,\ \lambda_p \in \Lambda, \tag{5}$$

где скобки обозначают скалярное произведение в $L_2^{(n)}(0,a)$. Действительно, правые части равенств (5) после деления их на $\|E_p\|$ принадлежат l_2 в силу сходимости указанного ряда. Теперь равенства (4) с помощью найденных векторов f_k можем переписать в виде

$$\Gamma E_p = \sum_{k=1}^n (E_p, f_k)e_k, \quad p \in \mathbb{Z},$$

и, таким образом, приходим к формуле для оператора K:

$$Kh = B^*h + \sum_{k=1}^n (h, f_k)e_k, \quad h \in L_2^{(n)}(0,a), \tag{6}$$

где оператор B задается формулой (3), f_k — векторы из пространства $L_2^{(n)}(0,a)$, $1 \le k \le n$.

Итак, задача сводится к нахождению условий, при которых семейства собственных векторов произвольного оператора K вида (6) образуют безусловный базис пространства $L_2^{(n)}(0,a)$. Такой подход позволяет понять происхождение последовательностей $\{c_n\}_{-\infty}^{+\infty}, \Lambda$ в задаче о безусловной базисности семейств вида (1). В самом деле, введем в рассмотрение целую матрицу-функцию Φ с элементами

$$\Phi_{kj}(z) = \delta_{kj} - ze^{-iza} \int\limits_0^a e^{izt} \overline{f_k^j(t)}\, dt, \quad f_k(t) = \operatorname{col}(f_k^j(t))_{j=1}^n. \tag{7}$$

Легко проверяется, что фредгольмов спектр оператора K совпадает с последовательностью Λ, которая, в свою очередь, совпадает с множеством нулей целой функции $\Delta(z) := \det \Phi(z)$. Далее, последовательность c_p определяется из систем линейных уравнений:

$$\Phi(\lambda_p)c_p = 0, \quad \operatorname{rank} \Phi(\lambda_p) = n-1,\ \lambda_p \in \Lambda, \tag{8}$$

причем вторые равенства (8) равносильны тому, что размерность всех собственных подпространств оператора вида (6) равна 1.

Для исследования операторов K, задаваемых формулами (6), применяется метод интегральных оценок норм резольвент [3, 4]. Это было проделано в работе [5], причем условие (2) предполагалось выполненным.

В настоящей статье мы рассматриваем задачу о безусловной базисности векторных экспонент без довольно сильного ограничения (2). Отметим, что отказ от этого ограничения существенно усложняет доказательства.

В дальнейшем мы будем предполагать, что существует прямая $\mathbb{R} + ib,\ b \in \mathbb{R}$ такая, что

$$\operatorname{dist}(\Lambda, \mathbb{R} + ib) > 0. \tag{9}$$

Для определенности будем считать, что $b \ge 0$, и введем обозначения

$$\Lambda_b^+ = \{\lambda_k \in \Lambda : \operatorname{Im} \lambda_k > b\}, \quad \Lambda_b^- = \{\lambda_k \in \Lambda : \operatorname{Im} \lambda_k < b\}.$$

Далее из формулы (7) следует, что имеют место факторизации [6]:

$$\begin{gathered} \Phi(z+ib)e^{iza} = W_+(z)Q_+(z), \quad z \in \mathbb{C}_+, \\ \Phi(z+ib) = W_-(z)Q_-(z), \quad z \in \mathbb{C}_-, \end{gathered} \tag{10}$$

где $W_\pm$ — внешние матрицы-функции в полуплоскостях $\mathbb{C}_\pm$, $Q_\pm$ — внутренние матрицы-функции в $\mathbb{C}_\pm$.

Кроме последовательности c_n рассмотрим также векторы d_n, которые удовлетворяют условиям

$$\Phi^*(\lambda_n)d_n = 0, \quad \lambda_n \in \Lambda. \tag{11}$$

Напомним также обозначение $\Delta(z) = \det \Phi(z)$ Сформулируем теперь основной результат этой статьи.

Теорема 1. *Пусть K — произвольный оператор вида* (6), *причем имеют место равенства* (8), (9). *Для того, чтобы семейство собственных векторов оператора K было безусловным базисом пространства $L_2^{(n)}(0,a)$, необходимо и достаточно выполнение совокупности условий:*

1) *вес $W_b^2(x) := \Phi(x+ib)\Phi^*(x+ib)$, $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет матричному (A_2)-условию Макенхаупта;*

2) $\lim\limits_{y\to+\infty} \sup y^{-1}\log|\Delta(iy)| = na, \quad \lim\limits_{y\to-\infty} \sup |y|^{-1}\log|\Delta(iy)| = 0;$

3) *справедливы неравенства*

$$\inf_{\lambda_k\in\Lambda_b^+} \frac{(\operatorname{Im}\lambda_k - b)\exp(\operatorname{Im}\lambda_k a)\,|(\Phi'(\lambda_k)c_k, d_k)|}{\|c_k\|\|W_+^*(\lambda_k - ib)d_k\|} > 0,$$

$$\inf_{\lambda_k\in\Lambda_b^-} \frac{(b - \operatorname{Im}\lambda_k)\,|(\Phi'(\lambda_k)c_k, d_k)|}{\|c_k\|\|W_-^*(\lambda_k - ib)d_k\|} > 0.$$

Уместно напомнить [7], что матричное (A_2)-условие для веса W_b^2 состоит в том, что

$$\sup_l \|\left(M(W_b^{-2})\right)^{\frac12}\left(M(W_b^2)\right)^{\frac12}\| < \infty;$$

$$M(W_b^\pm) := |l|^{-1}\int\limits_l W_b^{\pm 2}(x)\,dx,$$

где l — произвольный интервал на $\mathbb{R}$, $|l|$ — его длина.

Отметим также, что в условии 3) фигурирует евклидово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$ и отвечающая ему норма.

Мы существенно сократим доказательство теоремы 1, если воспользуемся результатом работы [8], в которой изучались более общие возмущения вольтеровых операторов. Далее, для упрощения выкладок ограничимся случаем, когда в формулировке теоремы параметр $b = 0$.

Применим результаты работы [8] к произвольному оператору K вида (6). Простые выкладки показывают, что

$$K(I - zK)^{-1}h = B^*(I - zB^*)^{-1}h + \sum_{k=1}^{n} f_k(h,z)(I - zB^*)^{-1}e_k,$$

где функционалы $f_k(h,z)$ вычисляются по формулам:

$$f_k(h,z) = \sum_{j=1}^{n} \Psi_{kj}(z)\left((I - zB^*)^{-1}h, f_j\right), \quad \Psi(z) := \Phi^{-1}(z),\ 1 \le k \le n. \tag{12}$$

Имеет место

Лемма 1. *Пусть K — произвольный оператор, действующий в $L_2^{(n)}(0,a)$ по формуле* (6)*. Следующие условия равносильны:*

1) *для всех $h \in L_2^{(n)}(0,a)$ существует константа M такая, что*

$$\int_{\mathbb{R}} \|K(I - xK)^{-1}h\|^2\,dx \le m\|h\|^2;$$

2) *вес $W_0^2(x) = \Phi(x)\Phi^*(x),\ x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет (A_2)-условию.*

Введем в рассмотрение столбец

$$K(h,z) = \operatorname{col}\left((I - zK)^{-1}h, e_j\right)_{j=1}^{n}, \quad h \in L_2^{(n)}(0,a).$$

Простые вычисления показывают, что

$$\left((I - zK)^{-1}h, e_j\right) = \left((I - zB^*)^{-1}h, e_j\right) - i\left(1 - e^{-iaz}\right) f_j(h,z), \tag{13}$$

где функционалы $f_j(h,z)$ вычисляются по формулам (12). Из леммы 1 вытекает, что условие 2) этой леммы гарантирует наличие оценки сверху:

$$\int_{\mathbb{R}} \|K(h,x)\|_{\mathbb{C}_n}^2 dx \le M_1\|h\|^2, \quad h \in L_2^{(n)}(0,a).$$

Напомним, что $\Lambda = \Lambda_+ \cup \Lambda_-$, $\Lambda_\pm = \Lambda \cap \mathbb{C}_\pm$. Обозначим через B_+ произведение Бляшке в $\mathbb{C}$ с нулями на Λ_+. Аналогично B_- — произведение Бляшке, обращающееся в нуль на Λ_-.

Лемма 2. *Пусть матричный вес $\Phi(x)\Phi^*(x), x \in \mathbb{R}$, удовлетворяет (A_2)-условию и справедливы неравенства:*

$$\inf_{\operatorname{Im}\lambda>0}\{|B_+(\lambda)|+|e^{i\lambda a}-1|\} > 0, \quad \inf_{\operatorname{Im}\lambda<0}\{|B_-(\lambda)|+|e^{-i\lambda a}-1|\} > 0. \quad (14)$$

Тогда существуют константы $m, M > 0$ такие, что для всех $h \in L_2^{(n)}(0,a)$

$$m\|h\|^2 \le \int\limits_{\mathbb{R}} \|K(h,x)\|^2_{\mathbb{C}^n}\,dx \le M\|h\|^2.$$

Отметим, что сформулированные леммы доказаны в уже упоминавшейся статье [8]. В условиях леммы 2 оператор

$$(Sh)(x) := K(h,x), \quad h \in L_2^{(n)}(0,a)$$

отображает пространство $L_2^{(n)}(0,a)$ на подпространство пространства $L_2^{(n)}(\mathbb{R})$ и осуществляет подобие $SK = \tilde{K}S$, где оператор $\tilde{K}$ на образе оператора S действует по формуле

$$(\tilde{K}f)(x) = x^{-1}(f(x) - f(0)). \tag{15}$$

Для дальнейшего продвижения нам необходимо вычислить образ L оператора S. Поскольку $L \subset L_2^{(n)}(\mathbb{R})$, то

$$L = L_+ \oplus L_-, \quad L_+ \subseteq \mathcal{H}^2_+(\mathbb{C}^n), \quad L_- \subseteq \mathcal{H}^2_-(\mathbb{C}^n), \tag{16}$$

где $\mathcal{H}^2_\pm(\mathbb{C}^n)$ — векторные классы Харди в $\mathbb{C}_\pm$.

Лемма 3. *Если выполнены условия леммы* 2, *то в разложении* (16) *$L_\pm$ являются модельными подпространствами, то есть*

$$L_+ = \mathcal{H}^2_+(\mathbb{C}^n) \ominus \theta_+\mathcal{H}^2_+(\mathbb{C}^n), \quad L_- = \mathcal{H}^2_-(\mathbb{C}^n) \ominus \theta_-\mathcal{H}^2_-(\mathbb{C}^n),$$

$$\theta_+(z) := Q_-^*(\overline{z}),\ z \in \mathbb{C}_+, \quad \theta_-(z) := Q_+^*(\overline{z}),\ z \in \mathbb{C}_-,$$

где $Q_\pm$ — внутренние матрицы-функции из факторизации (10) *при $b = 0$.*

Особо отметим, что из леммы 3 и равенств (15), (16) следует, что в условиях леммы 2 оператор K подобен ортогональной сумме диссипативного и антидиссипативного модельных операторов с характеристическими матрицами-функциями θ_+, θ_-, соответственно. Это разложение является основой доказательства теоремы о безусловной базисности семейств векторных экспонент.

Доказательство леммы 3. Для произвольного вектора

$$h = \sum_{k=1}^{n} b_k (1 - \lambda B^*)^{-1} e_k, \quad b_k \in \mathbb{C} \tag{17}$$

вычислим столбец $K(h, z)$). Из формулы (12) найдем

$$\begin{aligned} f_j(h,z) &= \sum_{p=1}^{n} \Psi_{jp}(z) \sum_{k=1}^{n} b_k \left((I - zB^*)^{-1} (I - \lambda B^*)^{-1} e_k, f_p \right) \\ &= \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Psi_{jp}(z) (\lambda - z)^{-1} (\Phi_{pk}(z) - \Phi_{pk}(\lambda)) b_k, \end{aligned}$$

или в векторной форме

$$f(h,z) = \mathrm{col}(f_j(h,z)) = \frac{\Phi^{-1}(z)(\Phi(z) - \Phi(\lambda))}{\lambda - z} b, \quad b = \mathrm{col}(b_k).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \left((I - zB^*)^{-1} h, e_j \right) &= \sum_{k=1}^{n} b_k \left((I - zB^*)^{-1} (I - \lambda B^*)^{-1} e_k, e_j \right) \\ &= -i (\lambda - z)^{-1} \left(e^{-iaz} - e^{-i\lambda a} \right) b_j. \end{aligned}$$

Таким образом, из формулы (13) следует, что

$$\begin{aligned} K(h,z) &= \frac{-i \left(e^{-iaz} - e^{-i\lambda a} \right)}{\lambda - z} b - i \left(1 - e^{-iaz} \right) \frac{E - \Phi(z)^{-1} \Phi(\lambda)}{\lambda - z} b \\ &= -i \frac{1 - e^{-i\lambda a}}{\lambda - z} b + i \frac{(1 - e^{-iaz})}{\lambda - z} \Phi^{-1}(z) \Phi(\lambda) b. \end{aligned} \tag{18}$$

Заметим, что из первой факторизации (10) при $b = 0$ следует равенство $\Phi^{-1}(x) = e^{ixa} Q_+^{-1}(x + i0) W_+^{-1}(x + i0)$, $x \in \mathbb{R}$. Если считать, что в формуле для $K(h, x)$ параметр $\lambda \in \mathbb{C}_-$, то принимая во внимание определение θ_-, найдем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_- K(h,x) &= i \mathbb{P}_- \Phi^{-1}(x) \frac{1 - e^{-ixa}}{\lambda - x} \Phi(\lambda) b \\ &= i \mathbb{P}_- \theta_-(x - i0) W_+^{-1}(x + i0) \frac{e^{ixa} - 1}{\lambda - x} \Phi(\lambda) b, \end{aligned}$$

где $\mathbb{P}_-$ — ортопроектор из $L_2^{(n)}(\mathbb{R})$ на $\mathcal{H}_-^2(\mathbb{C}^n)$. Если ввести обозначение $\varphi(x + i0) = i W_+^{-1}(x + i0)(e^{ixa} - 1)(\lambda - x)^{-1} \Phi(\lambda) b, \lambda \in \mathbb{C}_\pm$, то последнее равенство перепишется в виде

$$\mathbb{P}_- K(h,x) = \mathbb{P}_- \theta_-(x - i0) \varphi(x + i0).$$

Поскольку векторы $\varphi \in \mathcal{H}^2_+(\mathbb{C}^n)$, отсюда вытекает, что $L_- \subseteq \mathcal{H}^2_-(\mathbb{C}^n) \ominus \theta_- \mathcal{H}^2_-(\mathbb{C}^n)$. В работе [8, лемма 2.6] доказано, что линеал L_- замкнут в $L_2^{(n)}(\mathbb{R})$. Поэтому мы докажем, что в указанном включении на самом деле равенство, если установим плотность в $\mathcal{H}^2_+(\mathbb{C}^n)$ векторов, которые отвечают линейной комбинации векторов вида (17). Из приведенных формул следует, что речь идет о векторах вида

$$\varphi(x) = \sum_j a_j W_+^{-1}(x+i0)\frac{1-e^{iax}}{\lambda_j - x}\Phi(\lambda_j)b_j, \quad \operatorname{Im}\lambda_j < 0,\ a_j \in \mathbb{C}.$$

Предположим теперь, что функция $f_+ \in \mathcal{H}^2_+(\mathbb{C}^n)$ ортогональна ко всем указанным векторам, и, стало быть,

$$\left(\frac{W_+^{-1}(x+i0)(1-e^{iax})}{\lambda - x}, f_+\right) = 0, \quad \operatorname{Im}\lambda < 0.$$

Из этих равенств легко вывести, что

$$\int_{\mathbb{R}} (\mu - x)^{-1}(W_+^*(x+i0))^{-1}(1-e^{-iax})f_+(x)\,dx = 0, \quad \operatorname{Im}\mu > 0. \quad (19)$$

Отметим, что вектор $g(x) := (W_+^*(x+i0))^{-1}(1-e^{-iax})f_+(x)$ принадлежит весовому пространству $L_2^{(n)}(\mathbb{R}, W^2)$, $W^2(x) = \Phi(x)\Phi^*(x)$:

$$\int_{\mathbb{R}} \big(W^2(x)g(x), g(x)\big)_{\mathbb{C}^n}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \big(W_+(x+i0)W_+^*(x+i0)g(x), g(x)\big)_{\mathbb{C}^n}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \|(1-e^{-iax})f_+(x)\|_{\mathbb{C}^n}\,dx < \infty.$$

Поэтому из (19) следует [9], что $g \in \mathcal{H}^2_-(\mathbb{C}^n, W^2)$, причем весовой класс Харди определяется по факторизации $W^2(x) = w_-^*(x - i0)w_-(x-i0)$. Нетрудно видеть, что $w_-(z) = W^*(\overline{z})$, $z \in \mathbb{C}_-$. Поэтому $w_-(x-i0)g(x) \in \mathcal{H}^2_-(\mathbb{C}^n)$ [9] и, следовательно, $(1-e^{-iax})f_+(x) \in \mathcal{H}^2_-(\mathbb{C}^n)$. Отсюда вытекает, что $f_+ = 0$, то есть доказано одно из утверждений леммы 3. Аналогично доказывается равенство для подпространства L_+. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. *Пусть фредгольмов спектр* Λ *оператора* K *вида* (6) *удовлетворяет условиям* (14). *Если семейство* $\{E_n(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$ *собственных векторов оператора* K *образует безусловный базис пространства* $L_2^{(n)}(0,a)$, *то выполняются все условия теоремы* 1.

Доказательство. Шаг 1. Если система $\{E_n(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$ образует базис, то для любого $h \in L_2^{(n)}(0,a)$ имеем разложение

$$h(t) = \sum_n a_n E_n(t), \quad a_n \in \mathbb{C}, \ \|h\|^2 \asymp \sum_n |a_n|^2 \|E_n\|^2.$$

Отметим, что $K(I - xK)^{-1}E_n = (\lambda_n - x)^{-1}E_n$. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \|K(I - xK)^{-1}h\|^2 \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \Big\| \sum a_n(\lambda_n - x)^{-1} E_n \Big\|^2 \, dx$$
$$\le M \sum_n |a_n|^2 (|\operatorname{Im} \lambda_n|)^{-1} \|E_n\|^2 \le M_1 \sum_n |a_n|^2 \|E_n\|^2 \le M_2 \|h\|^2,$$
$$h \in L_2^{(n)}(0,a).$$

Таким образом, из леммы 1 следует, что вес $\Phi(x)\Phi^*(x)$ удовлетворяет матричному условию (A_2).

Шаг 2. Теперь мы находимся в условиях применимости леммы 3, в силу которой оператор подобен ортогональной сумме модельных операторов в подпространствах L_+, L_-. Из полноты семейства $\{E_n(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$ в $L_2^{(n)}(0,a)$ следует полнота обоих операторов в пространствах $L_\pm$. Хорошо известно [10], что это равносильно тому, что оба детерминанта $\det \theta_\pm$ являются произведениями Бляшке в полуплоскостях $\mathbb{C}_\pm$. Возвращаясь к факторизации (10) ($b = 0$), получаем, что $\det \theta_\pm(z)$ есть произведениями Бляшке. Переходя к определителям в равенствах (10), заключаем, что условие 2) выполнено.

Шаг 3. Напомним, что оператор преобразования S задается равенством $(Sh)(x) = K(h,x)$. Поскольку

$$E_k(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{i\lambda_k a} c_k^j (I - \lambda_k B^*)^{-1} e_k, \quad c_k = \operatorname{col}(c_k^j)_{j=1}^n,$$

то из (18), с учетом равенств (8), найдем:

$$S(E_k)(x) = -i \frac{1 - e^{i\lambda_k a}}{x - \lambda_k} c_k, \quad \lambda_k \in \Lambda. \tag{20}$$

Таким образом, семейства рациональных дробей $\{(x - \lambda_k)^{-1} c_k : \lambda_k \in \Lambda_+\}$ и $\{(x - \lambda_k)^{-1} c_k : \lambda_k \in \Lambda_-\}$ образуют безусловные базисы пространств L_- и L_+, соответственно.

Сформулируем критерий безусловной базисности первого семейства дробей в пространстве L_-. Поскольку $L_- = \mathcal{H}_-^2(\mathbb{C}^n) \ominus \theta_- \mathcal{H}_-^2(\mathbb{C}^n)$, то полагая $D_k := W_+^*(\lambda_k)d_k$, найдем

$$\left(\frac{\theta_-(x)D_k}{x-\overline{\lambda}_k}, \frac{c_j}{x-\lambda_j}\right)_{\mathcal{H}^2_-(\mathbb{C}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{(\theta_-(x)D_k, c_j)_{\mathbb{C}^n}}{(x-\overline{\lambda}_k)(\lambda-\overline{\lambda}_j)}\,dx = 0, \tag{21}$$

если $k \neq j$. В самом деле, из равенств (10), (11) следует, что $\theta_-(\overline{\lambda}_k)D_k = Q_+^*(\lambda_k)W_+^*(\lambda_k)d_k = e^{-i\overline{\lambda}_k a}\Phi^*(\lambda_k)d_k = 0$ и, следовательно, $(x-\overline{\lambda}_k)^{-1}\theta_-(x)D_k \in L_-$ при каждом $\lambda_k \in \Lambda_+$. Далее, $(\theta_-(\overline{\lambda}_j)D_k, c_j) = (D_k, \theta_-^*(\overline{\lambda}_j)c_j) = (D_k, Q_+(\lambda_j)c_j) = 0$, откуда и вытекает равенство (21).

Если $k = j$, то интеграл (21) равен $(\theta_-'(\overline{\lambda}_k)D_k, c_k)_{\mathbb{C}^n} = (D_k, Q_+'(\lambda_k)c_k)_{\mathbb{C}^n}$ (с точностью до множителя, который не зависит от k). Если продифференцировать первое равенство (10) при $b = 0$ и положить $z = \lambda_k$, то получим

$$\alpha_k := (D_k, Q'(\lambda_k)c_k)_{\mathbb{C}^n} = (d_k, \Phi'(\lambda_k)c_k)_{\mathbb{C}^n} \exp\{-\operatorname{Im}\lambda_k a\}.$$

Таким образом, биотогональная система к рассматриваемому семейству дробей имеет вид(с точностью до постоянного множителя):

$$\alpha_k^{-1}\frac{\theta_-(x)D_k}{x-\overline{\lambda}_k}, \quad \lambda_k \in \Lambda_+.$$

Условие равномерной минимальности семейства $\{(x-\lambda_k)^{-1}c_k : \lambda_k \in \Lambda_+\}$, то есть [10]

$$\sup_k \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}} \|(x-\lambda_k)^{-1}c_k\|^2\,dx \int\limits_{\mathbb{R}} \|(x-\lambda_k)^{-1}\alpha_k^{-1}\theta_-(x)D_k\|^2\,dx \right\} < \infty$$

эквивалентно первому неравенству из условия 3) теоремы 1. Поскольку рассматриваемое семейство дробей совпадает с множеством собственных векторов диссипативного оператора с конечномерной мнимой частью, то в силу теоремы Трейля [11] безусловная базисность равносильна равномерной минимальности.

Аналогично доказывается второе неравенство из условия 3) теоремы 1. Лемма доказана. □

После проведенной подготовительной работы перейдем к доказательству теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. *Достаточность.* При доказательстве леммы 4 (шаг 3) установлено, что оба неравенства из условия 3) теоремы 1 означают безусловную базисность семейств функций:

$$\{(x-\lambda_k)^{-1}c_k : \lambda_k \in \Lambda_+\}, \quad \{(x-\lambda_k)^{-1}c_k : \lambda_k \in \Lambda_-\}$$

в пространствах L_-, L_+, соответственно. Известно [10], что в этом случае обе последовательности Λ_+, Λ_- представимы в виде объединения не более чем n подмножеств, каждое из которых удовлетворяет условию Карлесона. Но тогда выполняются оба условия (14) [8], и поэтому в силу леммы 2 отображение $(Sh)(x) = K(h,x)$ есть изоморфизм $L_2^{(n)}(0,a)$ на свой образ. Из равенств (20) вытекает, что семейство векторных экспонент $\{E_k(x)\}_{-\infty}^{\infty}$ также образует безусловный базис пространства $L_2^{(n)}(0,a)$.

Необходимость. Пусть семейство векторных экспонент образует безусловный базис пространства $L_2(0,a)$. Тогда (шаг 1 из доказательства леммы 4) справедлива оценка

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \|K(I-xK)^{-1}h\|^2\,dx \le M\|h\|^2, \quad h \in L_2^{(n)}(0,a).$$

Из формулы (3) легко выводится, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \|B^*(I-xB^*)^{-1}h\|^2\,dx \le M\|h\|^2, \quad h \in L_2^{(n)}(0,a).$$

Поскольку

$$K(I-xK)^{-1}h = B^*(I-xB^*)^{-1}h + \sum_{k=1}^{n} f_k(h,x)e^{-ixa}e^{ixt}e_k.$$

Из двух последних оценок следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \|f(h,z)\|^2_{\mathbb{C}^n} dx \le M_1\|h\|^2, \quad h \in L_2^{(n)}(0,a). \tag{22}$$

Для любой линейной комбинации $h = \sum_k a_k E_k(t)$ можем вычислить

$$\begin{aligned} f(h,z) = \sum_k a_k f(E_k,z) = \sum a_k \frac{\Phi^{-1}(z)(\Phi(z)-\Phi(\lambda_k))}{\lambda_k - z} c_k \\ = \sum a_k(\lambda_k - z)^{-1}c_k, \quad \lambda_k \in \Lambda,\ a_k \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Полагая, что $\lambda_k \in \Lambda_+$, из (22) выводим оценку

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left\| \sum a_k \frac{c_k}{x-\lambda_k} \right\|^2_{\mathbb{C}^n} dx \le M_1 \left\| \sum a_k E_k(t) \right\|^2, \quad \lambda_k \in \Lambda_+.$$

Поскольку

$$\int_0^\infty e^{-ixt} c_k e^{i\lambda_k t}\, dt = \frac{c_k}{i(x-\lambda_k)}, \quad \lambda_k \in \Lambda_+,$$

справедливо обратное неравенство

$$\int_{\mathbb{R}} \left\| \sum a_k \frac{c_k}{x-\lambda_k} \right\|^2_{\mathbb{C}^n} \geq \left\| \sum a_k E_k(t) \right\|^2_{L_2^{(n)}(0,a)}.$$

Из двух последних неравенств вытекает, что семейство $\{(x-\lambda_k)^{-1} c_k : \lambda_k \in \Lambda_+\}$ образует безусловный базис в замыкании своей оболочки. Как уже отмечалось при доказательстве достаточности условий теоремы 1 отсюда вытекает [8, 10], что выполняется первое неравенство (14).

Из леммы 1 вытекает оценка:

$$\int_{\mathbb{R}} \|(Sh)(x)\|^2_{\mathbb{C}^n}\, dx \leq M \|h\|^2, \quad h \in L_2^{(n)}(0,a).$$

Полагая здесь $h = \sum a_k E_k(t)$ и принимая во внимание равенство (20), найдем

$$\int_{\mathbb{R}} \left\| \sum a_k \frac{e^{i\lambda_k a} - 1}{x-\lambda_k} c_k \right\|^2_{\mathbb{C}^n} dx \leq M \left\| \sum a_k E_k(t) \right\|^2, \quad \lambda_k \in \Lambda_-. \tag{23}$$

С другой стороны, поскольку

$$\int_0^\infty e^{ixt} c_k e^{-i\lambda_k t} dt = -\frac{c_k}{i(x-\lambda_k)}, \quad \lambda_k \in \Lambda_-,$$

имеет место неравенство:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left\| \sum a_k \frac{e^{i\lambda_k a} - 1}{x-\lambda_k} c_k \right\|^2_{\mathbb{C}^n} dx &\geq \int_0^a \left\| \sum a_k (e^{i\lambda_k a} - 1) c_k e^{-i\lambda_k t} \right\|^2_{\mathbb{C}^n} dt \\ &= \int_0^a \left\| \sum a_k (1 - e^{-i\lambda_k a}) E_k(t) \right\|^2_{\mathbb{C}^n} dt\end{aligned}$$

для произвольной комплексной финитной последовательности $\{a_k\}$. Учитывая, что семейство векторных экспонент образует безусловный базис пространства $L_2^{(n)}(0,a)$, предыдущую оценку можно продолжить

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left\| \sum a_k \frac{e^{i\lambda_k a}-1}{x-\lambda_k} c_k \right\|^2_{\mathbb{C}^n} dx \geq \delta_1 \sum_k \left| a_k(1-e^{i\lambda_k a})\right|^2 \|E_k(t)\|^2$$

$$\geq \delta_2 \sum_k |a_k|^2 \|E_k(t)\|^2 \geq \delta_3 \| \sum a_k E_k(t)\|^2, \quad \lambda_k \in \Lambda_-.$$

Вместе с оценкой (23) это означает, что семейство дробей $\{(x-\lambda_k)^{-1}c_k : \lambda_k \in \Lambda_-\}$ образует безусловный базис в замыкании своей оболочки. Как уже отмечалось, отсюда вытекает, что выполняется второе неравенство (14). Теперь необходимость условий теоремы 1 вытекает из леммы 4. Теорема доказана. □

В случае $n = 1$ неравенства условия 3) равносильны тому, что обе последовательности $\Lambda_b^{\pm}$ удовлетворяют условию Карлесона в $\mathbb{C}_{\pm}$ соответственно. Проверка этих условий при $n > 1$ сопряжена с техническими трудностями. Эту задачу существенно облегчает теорема Никольского–Павлова о сериях Карлесона [10].

Литература

[1] S. A. Avdonin, S. A. Ivanov, *Families of Exponentials*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[2] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, Наука, М., 1965.

[3] Г. М. Губреев, *Спектральная теория регулярных квазиэкспонент и регулярных B-представимых вектор-функций* // Алгебра и Анализ, **12** (2000), вып. 6, 1–97.

[4] Г. М. Губреев, *Регулярные ядра Миттаг-Леффлера и спектральное разложение одного класса несамосопряженных операторов* // Известия РАН, **69**, (2005), No. 1, 17–60.

[5] Г. М. Губреев, Е. И. Олефир, *Безусловная базисность некоторых семейств функций, матричное условие Макехаупта и серии Карлесона в спектре* // Зап. научн. семин. ПОМИ, **262** (1999), 90–126.

[6] D. Z. Arov, H. Dym, *J-contractive matrix valued functions and related topics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[7] S. Treil, A. Volberg, *Wavelets and the angle between past and future* // J. Funct. Anal., **143** (1997), No. 2, 269–301.

[8] G. M. Gubreev, M. V. Dolgopolova, S. I. Nedobachiy, *A spectral decomposition in one class of non-selfajoint operators* // Methods of Func. Anal. and Topology, **16** (2010), No. 2, 140–157.

[9] Г. М. Губреев, Ю. Д. Латушкин, *Функциональные модели несамосопряженных операторов, сильно непрерывные полугруппы и матричные веса Макенхаупта* // Изв. РАН, серия матем., **75** (2011), No. 2, 69–126.

[10] Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига*, М. Наука: 1980.

[11] С. Р. Трейль, *Пространственно-компактная система собственных векторов образует базис Риса, если она равномерно минимальная* // Докл. АН СССР, **288** (1986), No. 2, 308–312.

Сведения об авторах

Мария Георгиевна Волкова, Елена Ивановна Олефир

Южно-Украинский национальный педагогический университет имени К. Д. Ушинского,
ул. Старопортофранковская, 26,
Одесса 65020
Украина
E-Mail: volkovamg@mail.ru, l.olefir@i.ua