Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 1, 96 – 108

Приближения классов $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных полиномами по системе Хаара

Сергей А. Стасюк

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. В работе исследуются некоторые вопросы приближения классов $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных полиномами, построенными по системе Хаара. Для функций из этих классов получены точные по порядку оценки наилучшего m-членного приближения полиномами по системе Хаара, а также оценки сверху приближения ступенчато-гиперболическими суммами Фурье–Хаара.

2010 MSC. 41A10, 41A25, 41A30, 41A46, 41A63.

Ключевые слова и фразы. приближение функций многих переменных, система Хаара, ступенчатый гиперболический крест, наилучшее m-членное приближение .

1. Введение

В настоящей работе изучаются вопросы, связанные с некоторыми способами приближения классов $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных полиномами, построенными по системе Хаара.

В первой части работы для функций из классов $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty$, исследуется их наилучшее приближение полиномами по системе Хаара с индексами из ступенчатых гиперболических крестов, а также приближение ступенчато-гиперболическими суммами Фурье–Хаара в метрике $L_q([0,1]^d)$, $1 < q < \infty$.

Во второй части работы устанавливаются точные по порядку оценки наилучшего m-членного приближения классов $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ полиномами по системе Хаара в пространстве $L_q([0,1]^d)$, $1 < q < \infty$.

Статья поступила в редакцию 3.07.2014
Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект № GP/F32/0100) и FP7-People-2011-IRSES (проект № 295164 (EUMLS: EU–Ukrainian Mathematicians for Life Sciences)).

ISSN 1810 – 3200.

Для определения рассматриваемых аппроксимационных характеристик и изложения истории их исследования приведем необходимые обозначения и определения.

Пусть $L_p([0,1]^d)$, $1 \le p < \infty$, — пространство 1-периодических по каждой переменной и суммируемых в степени p на кубе $[0,1]^d$ функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ с нормой, которая определяется следующим образом:

$$||f||_p = \left(\int\limits_{[0,1]^d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Будем считать, что пространство $L_\infty([0,1]^d)$ состоит из 1-периодических по каждой переменной и непрерывных на $[0,1]^d$ функций и снабжено обычной равномерной нормой.

Всюду ниже будем предполагать, что для функций $f \in L_p([0,1]^d)$, $1 \le p \le \infty$, выполняется условие

$$\int\limits_0^1 f(x) \, dx_j = 0, \quad j = 1, \dots, d.$$

В дальнейшем некоторые положительные величины μ_1 и μ_2 связываются отношением $\mu_1 \ll \mu_2$ ($\mu_1 \gg \mu_2$), если для них выполняется неравенство $\mu_1 \le C_1 \mu_2$ ($\mu_1 \ge C_2 \mu_2$) при некотором значении величины $C_1 > 0$ ($C_2 > 0$), которая не зависит от одного параметра, обозначенного контекстом. Если же одновременно $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_2 \ll \mu_1$, то будем писать $\mu_1 \asymp \mu_2$.

Приведём определение системы Хаара.

Пусть D_l, $l \in \mathbb{Z}_+$, обозначает множество всех двоичных интервалов на отрезке $[0,1]$ вида $I = [j2^{-l}, (j+1)2^{-l})$, $j = 0, \dots, 2^l - 1$. Для вектора $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ положим

$$\mathcal{D}_s = \{ I = I_1 \times \dots \times I_d, \ I_j \in D_{s_j}, \ j = 1, \dots, d \}$$

и

$$Q_n = \bigcup_{||s||_1 \le n} \mathcal{D}_s,$$

где $||s||_1 = s_1 + \dots + s_d$. Множество Q_n называют ступенчатым гиперболическим крестом и для него имеет место соотношение (см., например, [1])

$$\# Q_n \asymp 2^n n^{d-1}, \tag{1.1}$$

где через $\# A$ обозначено количество элементов конечного множества A.

Положим для $I\in D_s,\ s\in\mathbb{Z}_+,\ I=[j2^{-s},(j+1)2^{-s}),\ j=0,\ldots,2^s-1$,

$$H_I(t)=|I|^{-1/2}\begin{cases}1, & \text{если } t\in[j2^{-s},(j+\frac{1}{2})2^{-s}),\\ -1, & \text{если } t\in[(j+\frac{1}{2})2^{-s},(j+1)2^{-s}),\\ 0, & \text{если } t\notin I,\end{cases}$$

где $|I|=2^{-s}$ — длина двоичного интервала I.

В d-мерном случае для $I=I_1\times\cdots\times I_d$ обозначим

$$H_I(x)=\prod_{j=1}^{d}H_{I_j}(x_j)$$

и

$$\delta_s(f)=\sum_{I\in\mathcal{D}_s}c_I(f)H_I,$$

где

$$c_I(f)=(f,H_I)=\int\limits_{[0,1]^d}f(x)H_I(x)\,dx.$$

Приведем еще некоторые соотношения, которыми будем пользоваться.

Теорема Литтлвуда–Пэли (см., [2, гл. 3]). *Для любой функции $f\in L_p([0,1])$, $1<p<\infty$, имеет место сотношение*

$$C_1(p)||f||_p\le\left\|\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+}|\delta_s(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p\le C_2(p)||f||_p. \tag{1.2}$$

Из (1.2) вытекает следующее неравенство (см., например, [3])

$$||f||_p\le C_3(p)\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+}||\delta_s(f)||_p^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}}, \tag{1.3}$$

где $p_0=\min\{p;2\}$.

Пусть $1\le p<q<\infty$, тогда для $f\in L_p([0,1]^d)$ имеет место неравенство [4]

$$||f||_q\le C(p,q,d)\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+^d}\left(||\delta_s(f)||_p\,2^{||s||_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.4}$$

Заметим, что аналогичные к (1.3) и (1.4) неравенства имеют место и для тригонометрической системы (см., например, [1, 5, 6]).

Для $r > 0$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ определим пространства $MB^r_{p,\theta}$, которые являются аналогами пространств Никольского–Бесова функций смешанной гладкости, следующим образом:

$$MB^r_{p,\theta} := \{f \in L_p([0,1]^d)\colon ||f||_{MB^r_{p,\theta}} < \infty\},$$

где

$$||f||_{MB^r_{p,\theta}} := \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}^d_+} (2^{r||s||_1} ||\delta_s(f)||_p)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1.5}$$

$$||f||_{MB^r_{p,\infty}} := ||f||_{MH^r_p} := \sup_{s \in \mathbb{Z}^d_+} \frac{||\delta_s(f)||_p}{2^{-r||s||_1}}. \tag{1.6}$$

Далее, через $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ обозначим единичный шар пространства $MB^r_{p,\theta}$, т.е.

$$\mathbf{MB}^r_{p,\theta} := \{f \in MB^r_{p,\theta}\colon ||f||_{MB^r_{p,\theta}} \le 1\}. \tag{1.7}$$

Множества $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ будем называть классами. Согласно определений (1.5)–(1.7) имеют место вложения

$$\mathbf{MB}^r_{p,1} \subset \mathbf{MB}^r_{p,\theta_1} \subset \mathbf{MB}^r_{p,\theta_2} \subset \mathbf{MB}^r_{p,\infty}, \quad 1 < \theta_1 < \theta_2 < \infty. \tag{1.8}$$

2. Приближения классов $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ ступенчато-гиперболическими суммами по системе Хаара

Пусть

$$H(Q_n) := \left\{ t = \sum_{|I| \ge 2^{-n}} a_I H_I, a_I \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad —$$

множество полиномов по системе Хаара с индексами из множества Q_n, а

$$S_{H(Q_n)}(f) := \sum_{||s||_1 \le n} \delta_s(f) \quad — \tag{2.1}$$

ступенчато-гиперболическая сумма Фурье–Хаара функции f. Для $f \in L_q([0,1]^d)$ положим

$$E_{H(Q_n)}(f)_q := \inf_{t \in H(Q_n)} ||f - t||_q \quad — \tag{2.2}$$

наилучшее приближение функции f в метрике пространства $L_q([0,1]^d)$ полиномами из множества $H(Q_n)$, и

$$\mathcal{E}_{H(Q_n)}(f)_q = ||f - S_{H(Q_n)}(f)||_q \quad — \tag{2.3}$$

величина приближения функции f в метрике пространства $L_q([0,1]^d)$ частной суммой Фурье–Хаара вида (2.1).

Непосредственно из определений (2.2) и (2.3) видим, что величины $E_{H(Q_n)}(f)_q$ и $\mathcal{E}_{H(Q_n)}(f)_q$ связаны неравенством

$$E_{H(Q_n)}(f)_q \le \mathcal{E}_{H(Q_n)}(f)_q. \tag{2.4}$$

Сформулируем и докажем теорему, в которой установлены порядковые оценки сверху для величин

$$E_{H(Q_n)}(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q = \sup_{f\in \mathbf{MB}^r_{p,\theta}} E_{H(Q_n)}(f)_q$$

и

$$\mathcal{E}_{H(Q_n)}(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q = \sup_{f\in \mathbf{MB}^r_{p,\theta}} \mathcal{E}_{H(Q_n)}(f)_q.$$

Теорема 2.1. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $1 < q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+ < r < 1$, *тогда*

$$E_{H(Q_n)}(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \le \mathcal{E}_{H(Q_n)}(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \ll \begin{cases} 2^{-(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n}\, n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, & 1 \le p < q < \infty, \\ 2^{-rn}\, n^{(d-1)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, & 1 < q \le p \le \infty, \end{cases}$$

где $p_0 = \min\{p;2\}$, $a_+ = \max\{a;0\}$.

Доказательство. Для $f \in \mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ при $1 \le p < q \le \theta < \infty$, используя неравенства (2.4), (1.4) и неравенство Гельдера (с показателем $\frac{\theta}{q}$), получим

$$E_{H(Q_n)}(f)_q \le \mathcal{E}_{H(Q_n)}(f)_q = \Big\| \sum_{||s||_1>n} \delta_s(f) \Big\|_q$$

$$\ll \left(\sum_{||s||_1>n} \left(||\delta_s(f)||_p\, 2^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})||s||_1} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{||s||_1>n} \left(2^{r||s||_1} ||\delta_s(f)||_p \right)^q 2^{-q||s||_1(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \left(\sum_{||s||_1>n} 2^{r||s||_1\theta} ||\delta_s(f)||_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{||s||_1>n} 2^{-||s||_1(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})\frac{q\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{\theta-q}{q\theta}}$$

$$\ll ||f||_{MB^r_{p,\theta}} 2^{-(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \leq 2^{-(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}. \quad (2.5)$$

Если же $1 \leq p < q < \infty$, а $1 \leq \theta < q$, то используя (1.8) и (2.5), получим

$$\mathcal{E}_{H(Q_n)}(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \leq \mathcal{E}_{H(Q_n)}(\mathbf{MB}^r_{p,q})_q \ll 2^{-(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n}.$$

Пусть теперь $1 < q = p < \infty$. В случае $\theta \geq p_0 = \min\{p, 2\}$, используя (1.3), неравенство Гельдера (с показателем $\frac{\theta}{p_0}$), имеем

$$\mathcal{E}_{H(Q_n)}(f)_p \leq \Bigg\| \sum_{||s||_1 > n} \delta_s(f) \Bigg\|_p$$

$$\ll \left(\sum_{||s||_1 > n} \left(2^{r||s||_1} ||\delta_s(f)||_p \, 2^{-r||s||_1} \right)^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}}$$

$$\leq \left(\sum_{||s||_1 > n} 2^{r||s||_1 \theta} ||\delta_s(f)||_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{||s||_1 > n} 2^{-r\frac{\theta p_0}{\theta - p_0}||s||_1} \right)^{\frac{\theta - p_0}{\theta p_0}}$$

$$\ll ||f||_{MB^r_{p,\theta}} 2^{-rn} n^{(d-1)(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta})} \leq 2^{-rn} n^{(d-1)(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta})}. \quad (2.6)$$

Если же $1 < q = p < \infty$ и $1 \leq \theta < p_0$, то, используя (1.8) и (2.6), получаем

$$\mathcal{E}_{H(Q_n)}(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \leq \mathcal{E}_{H(Q_n)}(\mathbf{MB}^r_{p,p_0})_q \ll 2^{-rn}. \quad (2.7)$$

Для случая $1 \leq q < p < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, вследствие неравенства $|| \cdot ||_q \leq || \cdot ||_p$ и доказанных выше оценок (2.6) и (2.7), имеем

$$\mathcal{E}_{H(Q_n)}(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \leq \mathcal{E}_{H(Q_n)}(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_p \ll 2^{-rn} n^{(d-1)(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Наконец, при $1 < q < \infty$, $p = \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, в силу вложения $B^r_{\infty,\theta} \subset B^r_{q+1,\theta}$, а также оценок (2.6) и (2.7), получим

$$\mathcal{E}_{H(Q_n)}(\mathbf{MB}^r_{\infty,\theta})_q \leq \mathcal{E}_{H(Q_n)}(\mathbf{MB}^r_{\infty,\theta})_{q+1} \leq \mathcal{E}_{H(Q_n)}(\mathbf{MB}^r_{q+1,\theta})_{q+1}$$

$$\ll 2^{-rn} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Теорема 2.1 доказана. $\square$

3. Наилучшие m-членные приближения классов $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ полиномами по системе Хаара

Для заданного множества $\mathcal{D}$ элементов некоторого банахова пространства B наилучшим m-членным приближением элемента $f \in B$ по отношению к системе $\mathcal{D}$ является величина (см., например, [7])

$$\sigma_m(f,\mathcal{D})_B = \inf_{g_j\in\mathcal{D},a_j} \left\| f - \sum_{j=1}^{m} a_j g_j \right\|_B, \quad m = 1,2,\ldots. \tag{3.1}$$

Для $F \subset B$ полагаем

$$\sigma_m(F,\mathcal{D})_B = \sup_{f\in F} \sigma_m(f,\mathcal{D})_B. \tag{3.2}$$

Величина $\sigma_m(f,\{e^{ikx}\}_k)_{L_2}$ для функций $f \in L_2[0,2\pi]$ одной переменной была введена С. Б. Стечкиным [8] при формулировке критерия абсолютной сходимости ортогональных рядов. Впоследствии исследования величин (3.1), (3.2) для тех или иных функциональных классов, проводились в работах многих авторов (см., например, [1, 6, 9–14], где можно также ознакомиться с более подробной информацией по данному вопросу). Относительно исследования величин (3.1) и (3.2) для системы Хаара $\mathcal{H} = \{H_I\}_I$ отметим работы [7, 15–20].

Пусть $\mathcal{D}$ — ортонормированная система в гильбертовом пространстве $H \subset B$ такова, что для любого $f \in B$ определены числа $a_j = (f,g_j)$, $g_j \in H$, $j = 1,2,\ldots$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в H. Определим величину

$$\sigma_m^{\perp}(f,\mathcal{D})_B = \inf_{g_j\in\mathcal{D}} \left\| f - \sum_{j=1}^{m} (f,g_j)\, g_j \right\|_B, \quad m = 1,2,\ldots, \tag{3.3}$$

которая называется наилучшим m-членным ортогональным приближением элемента $f \in B$ по системе $\mathcal{D}$. Для $F \subset B$ полагаем

$$\sigma_m^{\perp}(F,\mathcal{D})_B = \sup_{f\in F} \sigma_m^{\perp}(f,\mathcal{D})_B. \tag{3.4}$$

Заметим, что непосредственно из определений (3.1) и (3.3) следует соотношение

$$\sigma_m(f,\mathcal{D})_B \le \sigma_m^{\perp}(f,\mathcal{D})_B. \tag{3.5}$$

Величины $\sigma_m^{\perp}(f,\mathcal{D})_B$ и $\sigma_m^{\perp}(F,\mathcal{D})_B$ были введены Э. С. Белинским [21] в случае, когда $\mathcal{D} = \mathcal{T} = \{e^{i(k,x)}\}$, $(k,x) = k_1x_1 + \cdots + k_dx_d$,

$B = L_q([0, 2\pi]^d)$ и затем эти величины изучались в работах [6, 22, 23] и др.

Рассматривая в (3.2) и (3.4) в качестве $\mathcal{D}$ систему Хаара $\mathcal{H} = \{H_I\}_I$, а в качестве B — пространство $L_q([0,1]^d)$, полагая также, что $H = L_2([0,1]^d)$, а $(f, g_j) = \int_{[0,1]^d} f(x) g_j(x)\, dx$, $f \in B$, $g_j \in H$, сформулируем и докажем для $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_q := \sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_{L_q}$ и $\sigma_m^\perp(\mathbf{MB}^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_q := \sigma_m^\perp(\mathbf{MB}^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_{L_q}$ следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть* $1 < p, q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $\frac{1}{p} < r < 1$. *Тогда для любого* $m \ge 2$

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_q \asymp \sigma_m^\perp(\mathbf{MB}^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_q \asymp m^{-r} \left(\log_2^{d-1} m\right)^{r + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Установим сначала в (3.6) оценки сверху для величины $\sigma_m^\perp(\mathbf{MB}^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_q$. При этом будем использовать схему рассуждений аналогичну той, которая применялась А. В. Андриановым [7] при оценке величин $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_p, \mathcal{H})_q$.

По заданному m выберем $n \in \mathbb{N}$, которое удовлетворяет соотношению

$$m \asymp 2^n n^{d-1}. \tag{3.7}$$

Введём следующие обозначения

$$\Delta Q_k = Q_k \backslash Q_{k-1}, \quad N_k = \#\{s \in \mathbb{N}^d : ||s||_1 = k\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$M_k = [\#\{\Delta Q_n\} 2^{-\eta(k-n)}], \quad k > n,$$

где $n \in \mathbb{N}$, а $\eta > 0$ — число, значение которого будет уточнено позже.

Заметим, что при этом

$$N_k \asymp k^{d-1}, \tag{3.8}$$

а, вследствие (1.1),

$$M_k \asymp 2^n n^{d-1} 2^{-\eta(k-n)}. \tag{3.9}$$

Представим функцию $f \in \mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ в виде

$$\begin{aligned} f &= S_{H(Q_n)}(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{||s||_1 = k} \delta_s(f) \\ &= S_{H(Q_n)}(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{||s||_1 = k} \sum_{I \in \mathcal{D}_s} (f, H_I) H_I \end{aligned} \tag{3.10}$$

и опишем процедуру построения полинома P_m, которым будем приближать функцию f.

Для каждого $k = n+1, n+2, \dots$ и $s\colon ||s||_1 = k$ найдём $\big[M_k/N_k\big]$ наибольших по модулю коэффициентов (f, H_I), $H_I \in \mathcal{D}_s$, в сумме

$$\sum_{I\in\mathcal{D}_s}(f, H_I)H_I, \tag{3.11}$$

содержащейся в (3.10).

Поскольку для функций Хаара (одной переменной) H_{I_j} с $|I_j| = 2^{-k_j}$, $k_j = 0, 1, \dots$, при любом $p \in [1;\infty)$ и произвольных действительных a_{I_j}, имеет место равенство [24]

$$\Big\| \sum_{|I_j|=2^{-k_j}} a_{I_j} H_{I_j} \Big\|_p = 2^{k_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \Big(\sum_{|I_j|=2^{-k_j}} |a_{I_j}|^p \Big)^{\frac{1}{p}},$$

то, для функций H_I с $I \in \mathcal{D}_s$, $||s||_1 = k$, имеем

$$||\delta_s(f)||_p = 2^{||s||_1(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \Big(\sum_{I\in\mathcal{D}_s} |(f, H_I)|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \Big(\sum_{I\in\mathcal{D}_s} |(f, H_I)|^p \Big)^{\frac{1}{p}} 2^{-k(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}. \tag{3.12}$$

Таким образом, вследствие (3.12), можем записать

$$\Big(\sum_{||s||_1=k} 2^{r||s||_1\theta} ||\delta_s(f)||_p^\theta \Big)^{\frac{1}{\theta}}$$
$$= 2^{k(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} \Big(\sum_{||s||_1=k} \Big(\sum_{I\in\mathcal{D}_s} |(f, H_I)|^p \Big)^{\frac{\theta}{p}} \Big)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{3.13}$$

Итак, для каждого $k = n+1, n+2, \dots$ и s: $||s||_1 = k$ выделим $\big[M_k/N_k\big]$ слагаемых $(f, H_I)H_I$ из (3.11) (с наибольшими значениями $|(f, H_I)|$) и, по такому же принципу, $\big[M_k/N_k\big]$ слагаемых $|(f, H_I)|^p$ из суммы $\sum_{I\in\mathcal{D}_s} |(f, H_I)|^p$ в (3.13). Отметим, что каждое из оставшихся в (3.13) слагаемых $|(f, H_I)|^p$, а также каждый из коэфициентов оставшихся в (3.10) и (3.11) слагаемых $(f, H_I)H_I$, в силу неравенства

$$2^{k(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} \Big(\sum_{||s||_1=k} \Big(\sum_{I\in\mathcal{D}_s} |(f, H_I)|^p \Big)^{\frac{\theta}{p}} \Big)^{\frac{1}{\theta}} \le 1,$$

которое вытекает из оценки $||f||_{MB^r_{p,\theta}} \le 1$ и равенств (1.5), (3.13), будет удовлетворять соотношению

$$|(f, H_I)| \ll 2^{-k(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} \left(\frac{N_k}{M_k}\right)^{\frac{1}{p}} k^{-\frac{d-1}{\theta}}. \qquad (3.14)$$

Таким образом, искомый полином P_m будет состоять из суммы $S_{H(Q_n)}(f)$ и всех выделенных (описанной выше процедурой) в (3.10) и (3.11) слагаемых $(f, H_I)H_I$. Легко убедиться, что количество слагаемых $(f, H_I)H_I$ построенного полинома P_m равно по порядку m.

Действительно, принимая во внимание (1.1), (3.8), (3.9) и (3.7), имеем

$$\#Q_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\frac{M_k}{N_k}\right] k^{d-1} \asymp 2^n n^{d-1} + 2^n n^{d-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-\eta(k-n)} \asymp 2^n n^{d-1} \asymp m.$$

Оценим теперь $||f - P_m||_q$ сверху. В силу теоремы Литтлвуда–Пэли, а также соотношений (3.10), (3.14), (3.8), (3.9), получаем (далее χ_A обозначает индикатор множества $A \subset \mathbb{R}^d$)

$$\begin{aligned}
||f - P_m||_q &\asymp \left\| \left(\sum_I |(f - P_m, H_I)|^2 \, |H_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \\
&\ll \left\| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{I \in \Delta Q_k} 2^{-2k(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} k^{-\frac{2(d-1)}{\theta}} \left(\frac{N_k}{M_k}\right)^{\frac{2}{p}} H_I^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \\
&\asymp \left\| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-2k(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} k^{-\frac{2(d-1)}{\theta}} \left(\frac{k^{d-1}}{M_k}\right)^{\frac{2}{p}} 2^k \sum_{I \in \Delta Q_k} \chi_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \\
&\ll \left\| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-2k(r-\frac{1}{p})} k^{-\frac{2(d-1)}{\theta}} \left(\frac{k^{d-1}}{M_k}\right)^{\frac{2}{p}} k^{d-1} \chi_{[0,1]^d} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \\
&= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-2k(r-\frac{1}{p})} \left(\frac{k^{d-1}}{M_k}\right)^{\frac{2}{p}} k^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta})} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\asymp \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-2k(r-\frac{1}{p})} 2^{k\eta\frac{2}{p}-(\eta+1)\frac{2n}{p}} n^{-\frac{2}{p}(d-1)} k^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta}+\frac{2}{p})} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2^{-(\eta+1)\frac{n}{p}} n^{-\frac{d-1}{p}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-2k(r-\frac{1}{p}-\frac{\eta}{p})} k^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta}+\frac{2}{p})} \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Поскольку $\frac{1}{p} < r < 1$, то, очевидно, существует такое $\eta > 0$, для которого $r - \frac{1}{p} - \frac{\eta}{p} > 0$. Поэтому из (3.15), учитывая (3.7), имеем

$$\sigma^{\perp}_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_q \ll 2^{-(\eta+1)\frac{n}{p}} n^{-\frac{d-1}{p}} \left(2^{-2n(r-\frac{1}{p}-\frac{\eta}{p})} n^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta}+\frac{2}{p})}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2^{-rn} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \asymp m^{-r} \left(\log_2^{d-1} m\right)^{r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

Оценки сверху установлены.

Перейдём к получению в (3.6) оценки снизу. В работе [20] при $1 < q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $0 < r < 1$ доказано соотношение

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{\infty,\theta}, \mathcal{H})_q \asymp m^{-r} \left(\log_2^{d-1} m\right)^{r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}},$$

воспользовавшись которым, вследствие неравенства (3.5) и вложения $\mathbf{MB}^r_{p,\theta} \supset \mathbf{MB}^r_{\infty,\theta}$, $1 < p < \infty$, получим

$$\sigma^{\perp}_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_q \ge \sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_q \ge \sigma_m(\mathbf{MB}^r_{\infty,\theta}, \mathcal{H})_q$$
$$\asymp m^{-r} \left(\log_2^{d-1} m\right)^{r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

Оценка снизу установлена.

Теорема 2.1 доказана. □

4. Замечания и комментарии к полученным результатам

Оценка снизу в теореме 2.1, как видно из доказательства, справедлива при $0 < r < 1$.

При $1 < q \le p < \infty$, $p \ge 2$, $2 \le \theta < \infty$ оценки сверху в теореме 2.1 являются точными по порядку. Это является следствием оценок снизу величины $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_q$ в теореме 2.1 и неравенства $\sigma_m(f, \mathcal{H})_q \le E_{H(Q_n)}(f)_q$, $1 < q < \infty$, где $m = \#Q_n$.

В. С. Романюком [25] установлено (как следствие одного результата для произвольного натурального d), что для $d = 1$ при $1 \le p, \theta < \infty$, $1 < q < \infty$, $(1/p - 1/q)_+ < r < 1/p$ имеет место оценка $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_q \asymp m^{-r}$. В случае $1 < q \le p < \infty$, $p \ge 2$, $2 \le \theta < \infty$ при ограничении $\frac{1}{p} < r < 1$, такая же оценка содержится в теореме 2.1 и остается верной в силу сделанных выше замечаний и при $0 < r \le 1/p$.

Отметим также, что в случае $\theta = \infty$, т.е. для классов $\mathbf{MH}^r_p$, утверждения, аналогичные теоремам 2.1 и 2.1, ранее доказаны А. В. Андриановым [7].

Благодарности. В заключении выражаю искреннюю признательность проф. А. С. Романюку за внимание к работе. Также выражаю огромную благодарность моему коллеге В. С. Романюку за полезное обсуждение результатов работы.

Литература

[1] В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной* // Труды МИАН СССР, **178** (1986), 1–112.

[2] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, М.: АФЦ, 1999.

[3] V. N. Temlyakov, *The best m-term approximation and greedy algorithms* // Adv. Comput. Math., **8** (1998), No. 3, 249–265.

[4] V. N. Temlyakov, *Some inequalities for multivariate Haar polinomials* // East J. Appr., **1** (1995), No. 1, 61–72.

[5] V. N. Temlyakov, *Approximation of periodic functions*, New York: Nova Science, 1993.

[6] А. С. Романюк, *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных*, К.: Ін-т математики НАН України, 2012.

[7] А. В. Андрианов, *Приближение функций из классов MH_p^r полиномами Хаара* // Матем. заметки, **66** (1999), No. 3, 323–335.

[8] С. Б. Стечкин, *Об абсолютной сходимости ортогональных рядов* // Докл. АН СССР, **102** (1955), No. 2, 37–40.

[9] Р. С. Исмагилов, *Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами* // Успехи матем. наук, **29** (1974), No. 3, 161–178.

[10] Б. С. Кашин, *Об аппроксимационных свойствах полных ортонормированных систем* // Труды МИАН СССР, **172** (1985), 187–191.

[11] Э. С. Белинский, *Приближение "плавающей" системой экспонент на классах гладких периодических функций* // Матем. сб., **132** (1987), No. 1, 20–27.

[12] Б. С. Кашин, В. Н. Темляков, *О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1* // Матем. заметки, **56** (1994), No. 5, 57–86.

[13] V. N. Temlyakov, *Nonlinear methods of approximation* // Found. Comput. Math., **3** (2003), No. 1, 33–107.

[14] А. С. Романюк, *Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных* // Изв. РАН, Сер. матем., **67** (2003), No. 2, 61–100.

[15] V. N. Temlyakov, *Non-linear m-term approximation with regard to the multivariate Haar system* // East J. Appr., **4** (1998), No. 1, 87–106.

[16] A. V. Andrianov, V. N. Temlyakov, *Best m-term approximation of functions from classes $MW_{q,\alpha}^r$* // Approx. Theory IX, **1** (1998), 7–14.

[17] A. V. Andrianov, *Nonlinear Haar approximation of functions with bounded mixed derivative* // Lecture notes in pure and applied mathematics. Wavelet analysis and multiresolution methods, **212** (2000), 27–47.

[18] П. Освальд, *Об N-членных приближениях по системе Хаара в H^s-нормах* // Теория функций, СМФН, **25**, (2007), 106–125.

[19] С. А. Стасюк, *Приближение функций многих переменных классов* H^Ω_p *полиномами по системе Хаара* // Anal. Math., **35** (2009), 4, 257–271.

[20] С. А. Стасюк, *Наилучшее* m*-членное приближение классов* $B^r_{\infty,\theta}$ *функций многих переменных полиномами по системе Хаара* // Укр. матем. журн., **63** (2011), No. 4, 549–555.

[21] Э. С. Белинский, *Приближение плавающей системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной*, Исследования по теории функций многих вещественных переменных, Ярославль: Ярослав. ун-т, 1988, с. 16–33.

[22] А. С. Романюк, *Приближение классов периодических функций многих переменных* // Матем. заметки, **71** (2002), No. 1, 109–121.

[23] А. С. Романюк, *Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике* // Матем. заметки, **82** (2007), No. 2, 247–261.

[24] Б. И. Голубов, *Наилучшие приближения функций в метрике* L_p *полиномами Хаара и Уолша* // Матем. сб., **87(129)** (1972), No. 2, 254–274.

[25] В. С. Романюк, *Базисная система Хаара функций многих переменных и ее аппроксимационные свойства на классах Бесова и их аналогах* // Препр. Инт математики НАН Украины; К.: Інститут математики НАН України, (2012), 1–44.

Сведения об авторах

Сергей Андреевич Стасюк

Институт математики НАН Украины,
ул. Терещенковская, 3,
Киев 01601,
Украина
E-Mail: stasyuk@imath.kiev.ua