Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 3, 293 – 310

Об одном классе несамосопряженных операторов, сопутствующих дифференциальным уравнениям дробного порядка

Темирхан С. Алероев, Хеди Т. Алероева

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. В работе излагается метод исследования несамосопряженных интегральных операторов, сопутствующих дифференциальным уравнениям дробного порядка. С помощью этого метода, в частности, получены оценки для собственных функций и собственных значений краевой задачи для дробного осцилляционного уравнения.

2010 MSC. 34L10.

Ключевые слова и фразы. Функция Миттаг–Леффлера, спектр, собственное число, дробная производная.

1. Основные понятия

Пусть $f(x) \in L_1(0,1)$. Тогда, функция

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}\, f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \in L_1(0,1)$$

называется дробным интегралом порядка $\alpha > 0$ с началом в точке $x = 0$, и функция

$$\frac{d^{-\alpha}}{d(1-x)^{-\alpha}}\, f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^1 (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt \in L_1(0,1)$$

называется дробным интегралом порядка $\alpha > 0$ с концом в точке $x = 1$ [1]. Здесь, $\Gamma(\alpha)$ является гамма-функцией Эйлера. Как известно

Статья поступила в редакцию 03.06.2015

(см. [1]), функция $g(x) \in L_1(0,1)$ называется дробной производной функции $f(x) \in L_1(0,1)$ порядка $\alpha > 0$ с началом в точке $x = 0$, если

$$f(x) = \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} g(x).$$

Обозначив тогда

$$g(x) = \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} f(x),$$

в дальнейшем под символом

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}},$$

будем подразумевать дробный оператор дробного интегрирования при $\alpha < 0$ и дробного дифференцирования при $\alpha > 0$. Дробная производная

$$\frac{d^{\alpha}}{d(1-x)^{\alpha}}$$

порядка $\alpha > 0$ функции $f(x) \in L_1(0,1)$ с концом в точке $x = 1$, определяется так же.

Пусть $\{\gamma_k\}_0^n$ — некоторое множество действительных чисел, удовлетворяющих условию $0 < \gamma_j \leq 1$, $(0 \leq j \leq n)$. Обозначим

$$\sigma_k = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j - 1; \quad \mu_k = \sigma_k + 1 = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j \ \ (0 \leq k \leq n),$$

и предположим, что

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j - 1 = \sigma_n = \mu_n - 1 > 0.$$

Следуя М.М. Джрбашяну [2], рассмотрим интегро-дифференциальные операторы

$$D^{(\sigma_0)} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}} f(x),$$

$$D^{(\sigma_1)} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}} \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} f(x),$$

$$D^{(\sigma_2)} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_2)}}{dx^{-(1-\gamma_2)}} \frac{d^{\gamma_1}}{dx^{\gamma_1}} \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} f(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D^{(\sigma_n)} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}} \frac{d^{\gamma_{n-1}}}{dx^{\gamma_{n-1}}} \cdots \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} f(x).$$

Работа посвящена исследованию некоторых краевых задач для дробных дифференциальных уравнений

$$D^{(\sigma_n)}u - \lambda u = 0,\ 0 < \sigma_n < \infty,$$

и им сопутствующих интегральных операторов [1]

$$A_\gamma^{[\alpha,\beta]}u(x) = c_\alpha \int\limits_0^x (x-t)^{\frac{1}{\alpha}-1}u(t)\,dt + c_{\beta,\gamma}\int\limits_0^1 x^{\frac{1}{\beta}-1}(1-t)^{\frac{1}{\gamma}-1}u(t)\,dt,$$

где c_α и $c_{\beta,\gamma}$ — произвольные постоянные. Отметим, что операторы $A_\gamma^{[\alpha,\beta]}$ относятся к тем классам несамосопряженных операторов, спектральная структура которых мало исследована. В связи с этим следует отметить очень важные работы М.М. Маламуда и Л.Л. Оридороги [3], посвященные исследованию подобных операторов.

В [5, 6] методами теории возмущений исследован оператор

$$Bu = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\int\limits_0^x (x-t)^{1-\alpha}u(t)dt - x\int\limits_0^1 (1-t)^{1-\alpha}u(t)dt\right], \qquad (1.1)$$

сопутствующий задаче

$$u'' + \lambda\,\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\,u = 0, \quad 0 < \alpha < 1, \qquad (1.2)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \qquad (1.3)$$

(отметим, что функция Грина задачи (1.2)–(1.3) впервые была построена одним из авторов в его студенческой работе [4]). Хотя заметка [6] и не осталась незамеченной (см., например, [7]) следует подчеркнуть, что там не было результатов, позволяющих включить исследование операторов вида $A_\gamma^{[\alpha,\beta]}$ в общую схему теории возмущений. Данная работа восполняет этот пробел. Здесь проводится спектральный анализ операторов B, заданного формулой (1.1), и

$$A_\rho(u) = \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\left[\int\limits_0^x (x-t)^{\frac{1}{\rho}-1}u(t)dt - \int\limits_0^1 x^{\frac{1}{\rho}-1}(1-t)^{\frac{1}{\rho}-1}u(t)\,dt\right],$$

где $0 < \rho < 2$. Так как задача (1.2)–(1.3) находится в центре внимания многих авторов [8], то особое внимание уделено исследованию оператора B.

2. Спектральный анализ интегрального оператора, сопутствующего краевой задаче для модельного дробного дифференциального уравнения

В пространстве $L^2(0,1)$ изучим оператор

$$\begin{aligned} A_\rho(u) &= \int\limits_0^1 G(x,t)u(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\left[\int\limits_0^x (x-t)^{\frac{1}{\rho}-1}u(t)dt - \int\limits_0^1 x^{\frac{1}{\rho}-1}(1-t)^{\frac{1}{\rho}-1}u(t)\,dt\right], \end{aligned}$$

который впервые был рассмотрен в [9, 10], где $0<\rho<2$, а

$$G(x,t)=\begin{cases} \dfrac{(1-t)^{\frac{1}{\rho}-1}x^{\frac{1}{\rho}-1}-(x-t)^{\frac{1}{\rho}-1}}{\Gamma(\rho^{-1})}, & 0\le t\le x\le 1\\ \dfrac{(1-t)^{\frac{1}{\rho}-1}x^{\frac{1}{\rho}-1}}{\Gamma(\rho^{-1})}, & 0\le x\le t\le 1\end{cases}$$

— функция Грина следующей задачи S (при $\lambda=0$):

$$\frac{1}{\Gamma(n-\rho^{-1})}\frac{d^n}{dx^n}\int\limits_0^x (x-s)^{n-\rho^{-1}-1}u(s)ds+\lambda\,u=0,$$

$$(n-1\le\rho^{-1}<n,\ n=[\rho^{-1}]+1, \text{ где } [\rho^{-1}] \text{ — целая часть числа } \rho^{-1})$$

$$u(0)=0,\ u'(0)=0,\ \ldots,\ u^{(n-2)}(0)=0,\ u(1)=0.$$

При этом [11] если $\gamma_0=\gamma_1=\ldots=\gamma_n=1$, то задача S примет вид

$$u^{(n)}+\lambda\,u=0,$$

$$u(0)=0,\ u'(0)=0,\ \ldots,\ u^{(n-2)}(0)=0,\ u(1)=0.$$

а ее функция Грина $G(x,t)$ (при $\lambda=0$) равна

$$G(x,t)=\begin{cases} \dfrac{(1-t)^{n-1}x^{n-1}-(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}, & 0\le t\le x\le 1,\\ \dfrac{(1-t)^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}, & 0\le x\le t\le 1\,.\end{cases}$$

Последняя функция достаточно хорошо изучена, и этим мы будем пользоваться в дальнейшем. Оператор A_ρ изучен в работах [1, 9–13].

Мы так тщательно не стали бы исследовать этот оператор, если бы не обнаружилось, что уравнение Майнарди [14] (дробное осцилляционное уравнение) не обладает многими основными осцилляционными свойствами. Поиск уравнения дробного порядка, обладающего этими свойствами, и привел нас к исследованию оператора A_ρ. Выпишем наиболее важные свойства этого оператора, установленные нами ранее:

1. при $\rho > 1$ оператор A_ρ вполне несамосопряженный [10, 15];
2. при $\rho \leq 1$ оператор A_ρ секториальный [15, 16];
3. при $0 < \rho < 2$ система собственных функций оператора A_ρ полна в L_2 [9–11].

Теперь приведем один из основных результатов данной работы (в [5] подобный результат приводится без полного доказательства).

Теорема 2.1. *Если* $|\varepsilon| < 1$*, то оператор*

$$A(\varepsilon)u = -\int\limits_0^x (x-t)^{1+\varepsilon} u(t)dt + \int\limits_0^1 x^{1+\varepsilon}(1-t)^{1+\varepsilon} u(t)dt$$

образует голоморфное семейство типа (A)*.*

Доказательство. Прежде всего, сформулируем известный критерий голоморфности типа (A) [19, с. 473]:

Теорема (критерий голоморфности (A)**).** Пусть, T-замыкаемый оператор из X в Y, и $T^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — операторы из X в Y, области определения которых содержат $D(T) = D$. Предположим, что существуют постоянные $a, b, c \geq 0$, такие что

$$T^{(n)}u \leq c^{n-1}(a||u|| + b||Tu||), \quad u \in D, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.1}$$

Тогда ряд

$$T(\kappa)u = Tu + \kappa T^{(1)}u + \kappa^2 T^{(2)}u + \ldots, \, u \in D$$

для $|\kappa| < 1/c$ определяет оператор $T(\kappa)$ с областью определения D. Если $|\kappa| < (b+c)^{-1}$, то оператор $T(\kappa)$ замыкаем и замыкания $\widetilde{T}(\kappa)$ образуют голоморфное семейство типа (A).

Теперь приступим к доказательству теоремы 2.1. Введем обозначения

$$M(\varepsilon)u(x)=\int\limits_0^x (x-t)^{1+\varepsilon}u(t)dt,$$

$$N(\varepsilon)u(x)=\int\limits_0^1 x^{1+\varepsilon}(1-t)^{1+\varepsilon}u(t)dt.$$

Очевидно, что

$$A(\varepsilon)u=N(\varepsilon)u(x)-M(\varepsilon)u(x).$$

Как и в работах [11, 18] для оператора $A(\varepsilon)$ получим представление

$$A(\varepsilon)u=A(0)u+\varepsilon A_1u+\varepsilon^2A_2u+\ldots+\varepsilon^nA_nu+\ldots. \tag{2.2}$$

Для получения представления (2.2) поступим следующим образом: изучим разность операторов $A(\varepsilon)-A(0)$, что равносильно исследованию операторов $M(\varepsilon)-M(0)$ и $N(\varepsilon)-N(0)$. Введем обозначения: ядро оператора $M(\varepsilon)$ обозначим символом $K(\varepsilon;x,t)$, а ядро оператора $M(0)$ обозначим символом $K(0;x,t)$. Очевидно, что

$$K(\varepsilon;x,t)=\begin{cases}(x-t)^{1+\varepsilon}, & t<x,\\ 0, & t\geq x,\end{cases}$$

$$K(0;x,t)=\begin{cases}(x-t), & t<x,\\ 0, & t\geq x.\end{cases}$$

Аналогично, ядра операторов $N(\varepsilon)$ и $N(0)$ обозначим $\widetilde{K}(\varepsilon;x,t)$ и $\widetilde{K}(0;x,t)$ соответственно, где

$$\widetilde{K}(\varepsilon;x,t)=x^{1+\varepsilon}(1-t)^{1+\varepsilon},$$

$$\widetilde{K}(0;x,t)=x(1-t).$$

Очевидно, что

$$(A(\varepsilon)-A(0))u=(M(0)-M(\varepsilon))u-(N(0)-N(\varepsilon))u$$

и

$$(M(0)-M(\varepsilon))u=\int\limits_0^1[K(0;x,t)-K(\varepsilon;x,t)]u(t)dt.$$

Т.к.

$$a^x=e^{x\ln a}=1+\frac{x\ln a}{1!}+\frac{(x\ln a)^2}{2!}+\ldots \tag{2.3}$$

$$|x| < \infty, a > 0,$$

то

$$K(0;x,t) - K(\varepsilon;x,t) =$$
$$= \begin{cases} -(x-t)\left[\varepsilon\frac{\ln(x-t)}{1!} + \varepsilon^2\frac{\ln^2(x-t)}{2!} + \ldots + \varepsilon^n\frac{\ln^n(x-t)}{n!} + \ldots\right], & t < x, \\ 0, & t \geq x. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$(M(0) \quad - \quad M(\varepsilon))u = -\varepsilon\int\limits_0^1 K_1(x,t)u(t)dt$$
$$- \quad \varepsilon^2\int\limits_0^1 K_2(x,t)u(t)dt - \ldots - \varepsilon^n\int\limits_0^1 K_n(x,t)u(t)dt - \ldots$$

Из последнего равенства следует

$$M(\varepsilon)u = \int\limits_0^1 K_0(x,t)u(t)dt + \varepsilon\int\limits_0^1 K_1(x,t)u(t)dt$$
$$+ \quad \varepsilon^2\int\limits_0^1 K_2(x,t)u(t)dt + \ldots + \varepsilon^n\int\limits_0^1 K_n(x,t)u(t)dt + \ldots, \quad (2.4)$$

где

$$K_n(x,t) = \begin{cases} \frac{(x-t)\ln^n(x-t)}{n!}, & t < x, \\ 0, & t \geq x, \end{cases} \qquad n = 0;1;2;3;\ldots.$$

Точно также, можно получить представление вида (2.4) и для оператора $N(\varepsilon)$ с помощью равенства

$$\widetilde{K}(0;x,t) - \widetilde{K}(\varepsilon;x,t)$$
$$= \quad -x(1-t)\left[\varepsilon\frac{\ln(x-xt)}{1!} + \varepsilon^2\frac{\ln^2(x-xt)}{2!} + \ldots + \varepsilon^n\frac{\ln^n(x-xt)}{n!} + \ldots\right].$$

Получаем представление

$$N(\varepsilon)u = \int\limits_0^1 \widetilde{K}_0(x,t)u(t)dt + \varepsilon\int\limits_0^1 \widetilde{K}_1(x,t)u(t)dt$$
$$+ \quad \varepsilon^2\int\limits_0^1 \widetilde{K}_2(x,t)u(t)dt + \ldots + \varepsilon^n\int\limits_0^1 \widetilde{K}_n(x,t)u(t)dt + \ldots, \quad (2.5)$$

где

$$\widetilde{K}_n(x,t) = \frac{x(1-t)\ln^n(1-t)x}{n!}, \ n = 0;1;2;3;\dots .$$

Таким образом, формально имеем представление

$$A(\varepsilon)u = A(0)u + \varepsilon A_1 u + \varepsilon^2 A_2 u + \ldots + \varepsilon^n A_n u + \ldots ,$$

здесь

$$A(0) = N(0) - M(0), A_1 = N_1 - M_1, \ldots, A_n = N_n - M_n, \ldots,$$

где $M_n u = \int\limits_0^1 K_n(x,t)u(t)dt$, а $N_n u = \int\limits_0^1 \widetilde{K}_n(x,t)u(t)dt$. Далее, вычислим нормы операторов $M(\varepsilon)$ и $N(\varepsilon)$ (операторы рассматриваются в L_2). Имеем, [19, с. 331]

$$\|M_n\|^2_{L_2} \le \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 [\theta(x,t)K_n(x,t)]^2 dt\, dx, \quad n = 0,1,2,3,\dots .$$

(безусловно, здесь можно было воспользоваться формулой

$$\|M_n\|_{L_2} \le |\theta(x,t)K_n(x,t)|,$$

где $|\theta(x,t)K_n(x,t)|$ обозначает норму функции как элемента пространства $\boldsymbol{L}^2$, а $\|M_n\|$ — норму оператора в пространстве L^2). Здесь

$$\theta(x,t) = \begin{cases} 1, & t < x, \\ 0, & t \ge x. \end{cases}$$

Итак нужно сначала вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 [\theta(x,t)K_n(x,t)]^2 dt,$$

т.е.

$$\int\limits_0^x [(x-t)^2 \ln^{2n}(x-t)dt.$$

Имеем

$$\int\limits_0^x [(x-t)^2 \ln^{2n}(x-t)dt = -\int\limits_x^0 z^2 \ln^{2n} z dz = \int\limits_0^x z^2 \ln^{2n} z\, dz$$

$$\le \int\limits_0^1 z^2 \ln^{2n} z dz = \int\limits_0^\infty e^{-3t} t^{2n} dt = \frac{(2n)!}{3^{2n+1}}.$$

И теперь

$$\|M_n\|^2_{L_2} \leq \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 [\theta(x,t)K_n(x,t)]^2 dtdx \leq \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \frac{(2n)!}{3^{2n+1}}.$$

Используя асимптотическую формулу Стирлинга

$$n! = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}},\ 0<\theta<1$$

получим

$$\|M_n\|^2_{L_2} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{(2n\pi)}(\frac{n}{e})^n}\right)^2 \frac{(\sqrt{4n\pi}(\frac{2n}{e})^{2n})}{3^{2n+1}e} = \frac{2^{2n}}{e\sqrt{n\pi}3^{2n+1}} \leq \left(\frac{2^n}{3^n}\right)^2.$$

Отсюда

$$\|M_n\|_{L_2} \leq (\frac{2}{3})^n.$$

Теперь получим подобную оценку для нормы оператора N_n

$$\|N_n\|^2_{L_2} \leq \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 [\widetilde{K}_n(x,t)]^2 dtdx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \left[\frac{x(1-t)^2 \ln^n x(1-t)}{n!}\right]^2 dt\,dx.$$

Сначала рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^1 (x-xt)^2 \ln^{2n}(x-xt)dt.$$

Имеем

$$\int\limits_0^1 [(x-xt)^2 \ln^{2n}(x-xt)dt = x\int\limits_0^1 (1-t)(x-xt)\ln^{2n}(x-xt)dt$$

$$\leq x\int\limits_0^1 (x-xt)\ln^{2n}(x-xt)dt = \int\limits_0^z z\ln^{2n} zdz$$

$$\leq \frac{z^2\ln^{2n} z}{2}\big|_0^1 - \frac{2n}{2}\int\limits_0^1 z\ln^{2n-1} zdz = -\frac{2n}{2}\int\limits_0^1 z\ln^{2n-1} zdz$$

$$-\frac{2n}{2}\left[\frac{z^2\ln^{2n-1} z}{2}\bigg|_0^1 - \frac{2n-1}{2}\int_0^1 z(\ln^{2n-2} z)dz\right]$$

$$= \frac{2n(2n-1)}{2^2}\int_0^1 z(\ln^{2n-2} z)dz$$

$$= -\frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2}{2^{2n-1}}\int_0^1 z\ln z dz$$

$$= -\frac{(2n)!}{2^{2n-1}}\int\limits_0^1 z\ln z dz = -\frac{(2n)!}{2^{2n-1}}\left[z^2(\frac{\ln z}{2}-\frac{1}{2^2})\right]\Big|_0^1 = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}}$$

И теперь

$$\|N_n\|^2_{L_2} = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 [\theta(x,t)K_n(x,t)]^2 dtdx \le \left(\frac{1}{n!}\right)^2\frac{(2n)!}{2^{2n+1}}$$

Как и выше, используя оценку для $n!$, получим

$$\|N_n\|^2_{L_2} \le 1.$$

Таким образом для A_n имеем оценку

$$\|A_n u\|_{L_2(0,1)} \le 2\|u\|.$$

Теперь из критерия голомофности следует, что представление (2.2) для $|\varepsilon| < 1$ образует голоморфное семейство типа (A).

Теорема 2.1 доказана. □

Приведем теперь следствие из теоремы 2.1, в котором будет дана оценка отклонения первого собственного значения и первой собственной функции оператора $A(\varepsilon)$ от первого собственного значения и первой собственной функции соответствующей задачи Штурма–Лиувилля.

Следствие 2.1. *Пусть $\lambda_1(\varepsilon)$ — первое собственное число оператора $A(\varepsilon)$, а $\varphi_1(\varepsilon)$ — соответствующая собственная функция. Тогда, при*

$$|\varepsilon| < \frac{3}{64\pi^2},$$

справедливы соотношения

$$\left|\lambda_1(\varepsilon) - \frac{1}{\pi^2}\right| \le 64|\varepsilon|,$$

$$|\varphi_1(\varepsilon) - \sin x\pi| \le \frac{32\pi^2}{3}|\varepsilon|\,.$$

Доказательство. Так как $A(\varepsilon)$ образует голоморфное семейство типа (A), то в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ определены функции

$$\lambda_1(\varepsilon) = \lambda_1(0) + \varepsilon\lambda_1^{(1)} + \varepsilon^2\lambda_1^{(2)} + \ldots + \varepsilon^n\lambda_1^{(n)} + \ldots, \tag{2.6}$$

$$\varphi_1(\varepsilon) = \varphi_1(0) + \varepsilon\varphi_1^{(1)} + \varepsilon^2\varphi_1^{(2)} + \ldots + \varepsilon^n\varphi_1^{(n)} + \ldots. \tag{2.7}$$

Имеются различные формулы для вычисления нижней границы радиусов сходимости этих рядов и оценки собственных функций и собственных значений [19,20], но мы решили воспользоваться формулами, приведенными у Б.В. Логинова [20], в знак глубокой благодарности за очень сильную поддержку, оказанную одному из авторов при защите кандидатской диссертации [21] (следует отметить, что работа Б.В. Логинова [20] появилась намного раньше книги Т. Като [19]).

Теорема Логинова. *Пусть G_0 - некоторая связная область в комплексной плоскости ε, содержащая точку $\varepsilon = 0$, и пусть в ней*
1. определена и регулярна функция

$$A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A + \varepsilon^2 A_2 + \ldots + \varepsilon^n A_n + \ldots,$$

2. величина

$$s = s(\varepsilon) = ||R|| \cdot ||B|| < \frac{1}{2},$$

3. выполнены неравенства

$$||A_n u|| \leq p^{n-1}\{a||u|| + b||A_0 u||\}, \; (n = 1, 2, \ldots)$$

с неотрицательными постоянными a, b, p.
Тогда для $\varepsilon \leq \frac{1}{c}$ имеют место оценки

$$|\lambda_1(\varepsilon) - (\lambda_1(0) + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \ldots + \varepsilon^n\lambda_n)| \leq \frac{d}{2}(\|c\|\varepsilon)^{n+1},$$

$$|\varphi_1(\varepsilon) - (\varphi_1(0) + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \ldots + \varepsilon^n\varphi_n)| \leq \frac{1}{2}(\|c\|\varepsilon)^{n+1},$$

здесь $|\varepsilon| \leq (1/c)$, $c = \max\{8\frac{a+mb}{d}; 8p + 4\frac{a+mb}{d}\}$, $m = \|A_0\|$, $B = B(\varepsilon) = A(\varepsilon) - A_0$, $\frac{1}{d} = \|R\|$ (R — приведенная резольвента оператора A_0 относительно собственного числа $\lambda_1(0)$, т.е. оператор, обратный к $A_0 - \lambda_1(0)$ в ортогональном дополнении к $\varphi_1(0)$ и распространенным его на все пространство, считая $R\varphi_1(0) = 0$). Очевидно, что в нашем случае $b = 0$, $a = 2$, $p = 1$.

Найдем значение указанных параметров. Т.к. $\frac{1}{d} = \|R\|$, и оператор A_0 самосопряженный, то норма $\|R\|$ находится по формуле

$$\|R\| = \frac{1}{\min\limits_{k\neq 1}|\lambda_1 - \lambda_k|} = \frac{1}{\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2}} = \frac{4\pi^2}{3}.$$

Далее находим m. Т.к. оператор A_0 — самосопряженный, то $m = \|A_0\| = sprA_0$, где $sprA_0$ — спектральный радиус оператора A_0, но спектральный радиус $sprA_0 = |\lambda_0|$, где λ_0 — наибольшее по модулю собственное значение оператора A_0. Наибольшее по модулю собственное значение A_0 равно $\frac{1}{\pi^2}$, поэтому $\|A_0\| = sprA_0 = \frac{1}{\pi^2}$. Таким образом $m = \frac{1}{\pi^2}$.

Итак,

$$|\varepsilon| < \frac{3}{64\pi^2},$$

поэтому

$$|\lambda_1(\varepsilon) - (\lambda_1(0) + \varepsilon\lambda_1^{(1)} + \varepsilon^2\lambda_1^{(2)} + \ldots + \varepsilon^n\lambda_1^{(n)})| \leq \frac{3}{8\pi^2}(|\varepsilon|c)^{n+1}$$

$$= \frac{3}{8\pi^2}\left[|\varepsilon|\left(\frac{64\pi^2}{3}\right)\right]^{n+1},$$

$$|\varphi_1(\varepsilon) - (\varphi_1(0) + \varepsilon\varphi_1^{(1)} + \varepsilon^2\varphi_1^{(2)} + \ldots + \varepsilon^n\varphi_1^{(n)})| \leq \frac{1}{2}(|\varepsilon|c)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[|\varepsilon|\left(\frac{64\pi^2}{3}\right)\right]^{n+1}.$$

Из полученных соотношений, в частности, следует, что

$$|\lambda_1(\varepsilon) - \frac{1}{\pi^2}| \leq 64|\varepsilon|,$$

здесь $\lambda_1(\varepsilon)$ — первое собственное число оператора $A(\varepsilon)$. Точно также доказывается, что

$$|\varphi_1(\varepsilon) - \sin x\pi| \leq \frac{32\pi^2}{3}|\varepsilon|,$$

где $\varphi_1(\varepsilon)$ — первая собственная функция оператора $A(\varepsilon)$. Следствие доказано полностью. □

3. Спектральный анализ интегрального оператора, сопутствующего краевой задаче для дробного осцилляционного уравнения

Рассмотрим оператор

$$\begin{aligned}\widetilde{B}u &= -Bu \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\int\limits_0^x -(x-\xi)^{1-\alpha}u(\xi)d\xi + x\int\limits_0^1 (1-\xi)^{1-\alpha}u(\xi)d\xi\right].\end{aligned}$$

Проанализируем ядро этого оператора, чтобы понять, насколько правильно в качестве осцилляционного уравнения выбрано уравнение (1.2).

Легко проверить, что при $\alpha > 0$, ядро оператора $\widetilde{B}$ не является знакопостоянным. Поэтому, первое собственное число оператора $\widetilde{B}$ необязательно должно быть вещественным. Вышеизложенный метод позволяет, в частности, доказать, что при достаточно малых α, первые собственные числа оператора $\widetilde{B}$ являются вещественными.

Теорема 3.1. *Оператор*

$$\widetilde{B}(\varepsilon)u = -\int\limits_0^x (x-t)^{1+\varepsilon}u(t)dt + \int\limits_0^1 x(1-t)^{1+\varepsilon}u(t)dt,$$

при $|\varepsilon| < \frac{3}{2}$, *также образует голоморфное семейство типа* (A).

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 2.1, оператор $\widetilde{B}(\varepsilon)u$ запишем следующим образом

$$\widetilde{B}(\varepsilon)u = -M(\varepsilon)u(x) + C(\varepsilon)u(x) = \widetilde{B}(0)u + \varepsilon\widetilde{B}_1u + \ldots + \varepsilon^n\widetilde{B}_nu + \ldots,$$

где оператор $M(\varepsilon)$ уже изучен выше, а оператор $C(\varepsilon)u(x) = \int\limits_0^1 x(1-t)^{1+\varepsilon}u(t)dt$.

Для оператора $M(\varepsilon)$ представление по степеням ε мы уже получили (теорема 2.1), и теперь подобное представление получим для оператора $C(\varepsilon)$. Точно так же, как и для оператора $N(\varepsilon)$ (теорема 2.1), запишем представление для оператора $C(\varepsilon)u$

$$C(\varepsilon)u = C(0)u + \varepsilon C_1u + \ldots + \varepsilon^nC_nu + \ldots,$$

где

$$C(0)u(x) = \int\limits_0^1 x(1-t)u(t)\,dt,$$

$$C_n u(x) = \frac{1}{n!} \int\limits_0^1 x(1-t)[\ln(1-t)]^n u(t)\,dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Далее,

$$\|C_n\|^2_{L_2} \le \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 x^2 (1-t)^2 \left[\ln(1-t)\right]^{2n} dt\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \int\limits_0^1 x^2 \{\int\limits_0^1 (1-t)^2 \left[\ln(1-t)\right]^{2n} dt\} dx.$$

Так как для интеграла

$$\int\limits_0^x (x-t)^2 \left[\ln(x-t)\right]^{2n} dt$$

оценка сверху для любого $x \in (0, 1)$ нами уже получена, то

$$\|C_n\|_{L_2} \le \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Поэтому

$$\|M_n u\|_{L_2(0,1)} + \|C_n u\|_{L_2(0,1)} \le 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{2}{3} \|u\|. \tag{3.1}$$

Что и доказывает теорему 3.1. □

Конечно, эта оценка является весьма грубой и ее можно улучшить. Но на данном этапе, такая задача авторами не ставится.

Следствие 3.1. *Пусть*

$$|\varepsilon| < \frac{1}{\frac{16}{3} + \frac{4}{\pi^2}},$$

тогда первое собственное число оператора $\widetilde{B}(\varepsilon)$ вещественное.

Доказательство. Так как $\widetilde{B}(\varepsilon)$ образуют голоморфное семейство типа (A), то в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ определены функции

$$\lambda_1(\varepsilon) = \lambda_1(0) + \varepsilon\lambda_1^{(1)} + \varepsilon^2\lambda_1^{(2)} + \ldots + \varepsilon^n\lambda_1^{(n)} + \ldots, \tag{3.2}$$

$$\varphi_1(\varepsilon)=\varphi_1(0)+\varepsilon\varphi_1^{(1)}+\varepsilon^2\varphi_1^{(2)}+\ldots+\varepsilon^n\varphi_1^{(n)}+\ldots. \tag{3.3}$$

Нижняя граница для радиуса сходимости ряда Тейлора функций $\lambda_1(\varepsilon)$ и $\varphi_1(\varepsilon)$, с учетом неравенства (3.1), вычисляется точно также, как и в следствии 2.1. Очевидно, что нижняя граница этого радиуса $r_0>\frac{1}{\frac{16}{3}+\frac{4}{\pi^2}}$.

Далее, коэффициенты $\lambda_1^{(n)}$ и $\varphi_1^{(n)}$ будем вычислять по формулам, указанным в работе [20]

$$\lambda_1^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}(\widetilde{A}_k\varphi_1^{(n-k)},\varphi_1(0)),\quad \varphi_1^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}R(\lambda_1^{(k)}-\widetilde{A}_k)\varphi_1^{(n-k)}. \tag{3.4}$$

В нашем случае, R — приведенная резольвента оператора $\widetilde{B}(0)$, соответствующая собственному значению $\lambda_1(0)$, а $\widetilde{A}_k=\widetilde{B}_k$, $(k=1,2,3,\ldots)$. Из (3.4) следует, что

$$\lambda_1^{(1)}=(\widetilde{B}_1\varphi_1(0),\varphi_1(0)).$$

Т.к. ядро оператора $\widetilde{B}_1$ является вещественнозначным, то $\operatorname{Im}\lambda_1^{(1)}=0$. Далее из (3.4) следует, что

$$\varphi_1^{(1)}=R(\lambda_1^{(1)}-\widetilde{B}_1)\varphi_1(0)$$

т.к. ядра операторов R и $\widetilde{B}_1$ вещественнозначные, то $\operatorname{Im}\varphi_1^{(1)}=0$.

Таким образом последовательно можно установить что $\operatorname{Im}\lambda_1^{(n)}=\operatorname{Im}\varphi_1^{(n)}=0$, для всех n $(n=1,2,3,\ldots)$. Итак, если ε вещественное, то $\lambda_1(\varepsilon)$ также вещественное число, что и доказывает следствие 3.1. $\square$

Безусловно, таким же образом можно показать, что и второе собственное число оператора $\widetilde{B}(\varepsilon)$ является вещественным (разумеется, тут границы изменения ε будут другими). Много интересного можно получить еще если за невозмущенные операторы брать $A(n)$ и $\widetilde{B}(n)$ при определенных натуральных числах n. Но нам кажется, как это было подчеркнуто выше, подобные вопросы лучше изложить в отдельной работе.

Так как [6] Фредгольмов спектр исследованных операторов совпадает с нулями соответствующих функций типа Миттаг–Леффлера, то изложенный метод позволяет эффективно исследовать распределение нулей этих функций. В подтверждение приведем хотя бы два утверждения. Следуя [22], введем обозначения: $\lambda_n(\alpha)$ — собственные значения задачи (1.2)–(1.3), где сказано, что в “предельном случае

$\alpha = 0$ задача (1.2)–(1.3) становится краевой задачей Штурма–Лиувилля с последовательностью собственных значений $\lambda_n = (\pi n)^2$. Верно ли, что $\lim_{\alpha\to 0+} \lambda_n(\alpha) = (\pi n)^2$ при любом фиксированном n? Ответ положителен."

Докажем более сильное утверждение.

Теорема 3.2. $\lim_{\alpha\to\alpha_0+} \lambda_n(\alpha) = \lim_{\alpha\to\alpha_0-} \lambda_n(\alpha) = \lambda_n(\alpha_0)$ *при любом* $\alpha_0 \in [0;1]$.

Доказательство. Теорема 3.2 является простым следствием теоремы 4.2 [23, с. 35] и того факта, что операторная функция $\widetilde{B}(\varepsilon)$ сильно непрерывна когда $|\varepsilon| < 1$. $\square$

И наконец, обратимся к еще одному очень важному вопросу – к вопросу о кратности собственных чисел оператора $\widetilde{B}(\varepsilon)$ (как уже отмечалось, этот вопрос тесно связан с вопросом кратности нулей соответствующей функции типа Миттаг–Леффлера [21]).

Известно, что все достаточно большие по модулю нули функции типа Миттаг–Леффлера $E_\rho(z,\mu)$ (где $\rho > \frac{1}{2}$, $\rho \neq 1$, $\mathrm{Im}\,(\mu) = 0$) простые. Поэтому, основное внимание мы уделим кратности первых собственных чисел оператора $\widetilde{B}(\varepsilon)$.

Теорема 3.3. *Пусть* $|\varepsilon| < (\frac{32\pi^2}{9} + \frac{2}{3})^{-1}$, *тогда первое собственное число* $\lambda_1(\varepsilon)$ *оператора* $\widetilde{B}(\varepsilon)$ *простое.*

Доказательство. Известно [19, с. 475], что если спектр оператора $\widetilde{B}(0)$ разбивается на две части замкнутой кривой Γ, то спектр оператора $\widetilde{B}(\varepsilon)$ также разбивается кривой Γ для достаточно малых ε. Известна [19, с. 475] оценка, насколько для этого должно быть малым ε

$$|\varepsilon| < \min_{\zeta\in\Gamma}(a||R(\zeta,\widetilde{B}(0))|| + b||\widetilde{B}(0)R(\zeta,\widetilde{B}(0))|| + c)^{-1} \tag{3.5}$$

(где a, b, c — параметры, фигурирующие в неравенстве (2.1)). В формуле (3.5) в качестве контура Γ возьмем окружность $|\zeta - \frac{1}{\pi^2}| = \frac{\rho}{2}$, где ρ — расстояние от $\frac{1}{\pi^2}$ до множества остальных собственных чисел оператора $\widetilde{B}(0)$, а параметры a, b, c — нами уже вычислены (см. (3.1)). Что и доказывает теорему 3.3. $\square$

Заметим, что точно так же можно установить простоту второго собственного числа оператора $\widetilde{B}(\varepsilon)$. А самое главное, этот метод позволяет включить исследование несамосопряженных операторов вида $A_\gamma^{[\alpha,\beta]}$ (и не только операторов вида $A_\gamma^{[\alpha,\beta]}$) в общую схему теории возмущений.

Авторы очень надеются, что изложенный в этой работе метод станет тем толчком, который наконец-то позволит построить спектральную теорию несамосопряженных операторов хотя бы вида $A_{\gamma}^{[\alpha,\beta]}$.

Авторы глубоко благодарны рецензенту за многочисленные, очень полезные замечания, способствовавшие устранению недостатков в работе.

Литература

[1] Т. С. Алероев, *Краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка* // Сиб. электрон. матем. изв., **10** (2013), 41–55.

[2] М. М. Джрбашян, *Краевая задача для дифференциального оператора типа Штурма–Лиувилля дробного порядка* // Изв. Акад. наук Армянской ССР, серия Математика, **5**(1970), No. 2, 71–96.

[3] М. М. Маламуд, Л. Л. Оридорога, *Аналог теоремы Биркгофа и полнота собственных функций для дифференциальных уравнений дробного порядка* // Росс. журнал. мат. физ., **8** (2001), No. 3, 287–308.

[4] Т. С. Алероев, *Задача Штурма–Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах* // Дифф. уравнения, **18** (1982), No. 2, 341–342.

[5] Т. С. Алероев, Х. Т. Алероева, *Задача Штурма–Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах* // Изв. Вузов. Математика, **10** (2014), 3–12.

[6] Т. С. Алероев, *Об одной краевой задаче для дифференциального оператора дробного порядка* // Дифф. уравнения, **34** (1998), No. 1, 123.

[7] E. R. Kaufmann, *Existence and nonexistence of positive solutions for a nonlinear fractional boundary value problem* // Discrete and continuous dynamical systems, **2009** (2009), 416–423.

[8] А. М. Нахушев, *Дробное исчисление и его применение*, М.: Физматлит, 2003.

[9] Т. С. Алероев, *О полноте собственных функций одного дифференциального оператора дробного порядка* // Дифференц. уравнения, **36** (2000), No. 6, 829–830.

[10] Т. С. Алероев, *Краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробными производными* // Дисс. доктора физ.-мат. наук, МГУ, 2000.

[11] T. S. Aleroev, H. T. Aleroeva, Ning-Ming Nie, Yi-Fa Tang, *Boundary Value Problems for Diferential Equations of Fractional Order* // Mem. Diferential Equations Math. Phys., **49** (2010), 19–82.

[12] T. S. Aleroev, H. T. Aleroeva, *A problem on the zeros of the Mittag-Lefer function and the spectrum of a fractional-order diferential operator* // Electron. J. Qual. Theory Difer. Equ., **25** (2009), 1–18.

[13] Yuan Chengjun, *Multiple positive solutions for (n-1, 1)-type semipositone conjugate boundary value problems of nonlinear fractional diferential equations* // E. J. Qualitative Theory of Dif. Equ., **36** (2010), 1–12.

[14] F. Mainardi, *Fractional Relaxation-Oscillation and fractional Difusion-wave Phenomena Chaos* // Solutions and Fractals. **7** (1996), No. 9, 1461–1477.

[15] Т. С. Алероев, *Об одном классе операторов, связанных с дифференциальными уравнениями дробного порядка* // Сиб. мат. журнал. **46** (2005), No. 6, 1201–1207.

[16] Э. Р. Кехарсаева, А. К. Микитаев, Т. С. Алероев, *Модель деформационно-прочностных характеристик хлорсодержащих полиэфиров на основе производных дробного порядка* // Пластические массы, **3** (2001), 35.

[17] Т. С. Алероев, А. М. Гачаев, *К проблеме о нулях функции типа Миттаг–Леффлера* // Материалы Международного Российско-Узбекского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики". Нальчик-Эльбрус, 2003, 14–15.

[18] Т. С. Алероев, Х. Т. Алероева, *Неокоторые применения теории возмущений в дробном исчислении* // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, **10** (2008), No. 2, 9–13.

[19] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир, 1972.

[20] Б. В. Логинов, *К оценке точности метода возмущений* // Известия АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, **6** (1963), 14–19.

[21] Т. С. Алероев, *Краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробными производными* // Дисс. канд. физ.-мат. наук, Баку, 1983.

[22] А. Ю. Попов, *О количестве вещественных собственных значений одной краевой задачи для уравнения второго порядка с дробной производной* // Фунд. и прикл. мат., **12** (2006), No. 6, 137-–155.

[23] А. М. Седлецкий, А. Ю. Попов, *Распределение корней функций Миттаг–Леффлера* // Современная математика. Фундаментальные направления, **40** (2011), 3-–171.

[24] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопря- женных операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Наука, 1965.

Сведения об авторах

Темирхан Султанович Алероев
Национальный исследовательский Университет МГСУ
E-Mail: `aleroev@mail.ru`

Хеди Темирхановна Алероева
Московский технический университет связи и информатики
E-Mail: `BinSabanur@gmail.com`