Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 3, 345 – 362

Усреднение случайных функционалов от решений стохастических уравнений

Ярослав И. Грановский, Сергей Я. Махно

Аннотация. Рассматривается интегральный функционал от случайного стационарного поля с перемешиванием и от решения стохастического уравнения, зависящих от малого параметра. Вид функционала обусловлен вероятностным представлением решения задачи Коши и решения первой граничной задачи для линейного параболического уравнения второго порядка в недивергентной форме с неограниченными случайными быстрыми осцилляциями у слагаемого нулевого порядка производной. Доказана центральная предельная теорема о сходимости функционала.

2010 MSC. 60F05, 60G10, 60H10.

Ключевые слова и фразы. Стационарный процесс, случайный функционал, слабая сходимость мер, стохастические уравнения, усреднение.

1. Введение

В работе рассматривается функционал, зависящий от малого параметра ε,

$$F^{\varepsilon}(t,\theta,\omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t c\left(\frac{\xi^{\varepsilon}(s,\omega)}{\varepsilon}, \theta\right) ds. \tag{1.1}$$

В (1.1) $c(x,\theta)$ — стационарный процесс с перемешиванием, $\xi^{\varepsilon}(s,\omega)$ — решение одномерного стохастического уравнения Ито, заданные на разных вероятностных пространствах. Исследуется сходимость функционала в смысле распределений при стремлении малого параметра к нулю. Выбор такого функционала для исследования обусловлен тем, что через такой функционал выражаются решения задачи Коши

Статья поступила в редакцию 21.09.2015
Работа выполнена при поддержке гранта НАНУ–РФФИ № 09-01-14

ISSN 1810 – 3200.

и первой граничной задачи для одномерных линейных параболических уравнений в частных производных второго порядка недивергентного вида коэффициенты которых зависят от малого параметра и с сингулярно возмущенным случайным коэффициентом при слагаемом нулевого порядка производной неизвестной функции:

$$\frac{\partial u^\varepsilon(t,x)}{\partial t} = \frac{a^\varepsilon(x)}{2}\frac{\partial^2 u^\varepsilon(t,x)}{\partial x^2} + b^\varepsilon(x)\frac{\partial u^\varepsilon(x)}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}c\left(\frac{x}{\varepsilon},\theta\right)u^\varepsilon(t,x).$$

Изучение поведения решений этих уравнений в частных производных — следующая задача авторов. Аналогичная проблема рассматривалась в работах [1,2], но методы исследования существенно подстроены под уравнения в которых оператор, содержащий частные производные, является самосопряженным в соответствующем функциональном пространстве, т.е. $b^\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial a^\varepsilon(x)}{\partial x}$.

В параграфе 2 вводятся необходимые обозначения, предположения и доказываются вспомогательные утверждения. Основной результат работы — теорема в параграфе 3. В параграфе 4 рассмотрены примеры обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка при мультипликативных и аддитивных неограниченных случайных возмущениях.

2. Обозначения. Вспомогательные результаты

Числовую прямую обозначим $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{C}[A_1, A_2]$ — пространство непрерывных функций $f(x)$ заданных на $[A_1, A_2]$ со значениями в $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$– пространство непрерывных функций $f(x)$ заданных на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$, $\mathbb{VC}(\mathbb{R})$ — пространство функций локально ограниченной вариации. Топология в этих пространствах — топология сходимости на компактах. Для функции $k(x) \in \mathbb{VC}(\mathbb{R})$ ее вариацию на отрезке $[a,b]$ обозначим $\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(k)$ [14, c. 202]. Слабая сходимость мер на этих пространствах будет обозначаться одним символом $\Rightarrow$. Условимся говорить, что процессы η^ε слабо сходятся к процессу η и писать $\eta^\varepsilon \Rightarrow \eta$ если слабо сходятся на соответствующих пространствах порожденные ими меры. Пусть задано вероятностное пространство $(\Theta, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Символ $\theta \in \Theta$ часто будет опускаться. Используем обозначение $\mathbb{E}$ для математического ожидания относительно вероятностной меры $\mathbb{P}$. На этом пространстве для $x \geq 0$ и $\theta \in \Theta$ определен винеровский процесс $w(x,\theta)$, т.е. гауссовский процесс с независимыми приращениями и $\mathbb{E}w(x) = 0, \mathbb{E}(w(x)-w(y))^2 = |x-y|$. Пусть для $x \geq 0$, $\theta \in \Theta$, определены $w^{(1)}(x,\theta)$ и $w^{(2)}(x,\theta)$ — независимые винеровские процессы. Через $I(A)$ обозначим индикатор события

A и определим двусторонний винеровский процесс $W(x)$ для $x \in \mathbb{R}$ равенством $W(x) = w^{(1)}(-x)I(x \leq 0) + w^{(2)}(x)I(x \geq 0)$. Далее, на пространстве $(\Theta, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ задан стационарный в широком смысле случайный процесс [3, с. 361], $c(x,\theta)$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \Theta$. Т.е. для любых $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}c^2(x) < \infty$, $\mathbb{E}c(x)c(y) = r(x-y)$. Будем предролагать $\mathbb{E}c(x) = 0$ и процесс $c(x)$ непрерывен в среднем квадратическом: $\lim_{y\to 0}\mathbb{E}|c(x+y) - c(x)|^2 = 0$. Сходимость по вероятностной мере Q будет обозначаться $\overset{Q}{\to}$. Постоянные, появляющиеся при оценивании и независящие от малого параметра, возможно различные даже в одной выкладке, будут обозначаться через Λ.

Определим σ-алгебры, порожденные процессом $c(x)$, $\mathcal{G}_z := \sigma\{c(x), x \leq z\}$, $\mathcal{G}^z := \sigma\{c(x), x \geq z\}$. Следуя [3, с. 388–391], определим коэффициенты перемешивания. Случайный процесс $c(x)$ является процессом сильного перемешивания (с.п) если

$$\alpha(h) := \sup_{\{A\in\mathcal{G}_x, B\in\mathcal{G}^{x+h}\}} |\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \to 0, \text{ при } h \to \infty,$$

и равномерно сильного перемешивания (р.с.п), если

$$\phi(h) := \sup_{\{A\in\mathcal{G}_x, B\in\mathcal{G}^{x+h}\}} |\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|/\mathbb{P}(A) \to 0, \ \textit{при } h \to \infty.$$

В следующей лемме собраны известные оценки.

Лемма 1. *1. [3, теорема 17.2.3, с. 392]. Для стационарного процесса р.с.п. при* $h > 0$,

$$|\mathbb{E}c(x)c(x+h)| \leq 2\phi^{\frac{1}{2}}(h)\mathbb{E}c^2(0).$$

2. [4, лемма 2.1]. Если для стационарного процесса с.п. при некоторой постоянной K, $|c(x)| \leq K$, *то для* $h > 0$,

$$|\mathbb{E}c(x)c(x+h)| \leq 6K^2\alpha^{\frac{1}{2}}(h).$$

3. [4, следствие]. Если для для стационарного процесса с.п. при некотором $\delta > 0$, $\mathbb{E}|c(0)|^{2+\delta} < \infty$, *то для* $h > 0$,

$$|\mathbb{E}c(x)c(x+h)| \leq 12\alpha^{\frac{\delta}{2+\delta}}(h)[\mathbb{E}c^{2+\delta}(0)]^{\frac{2}{2+\delta}}.$$

Определим процесс

$$Y^\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^x c\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)dy.$$

Лемма 2. *Пусть выполнено одно из условий:*

1. Для стационарного процесса р.с.п. $\int_0^\infty \phi^{\frac{1}{2}}(x)dx < \infty$.

2. Выполнены предположение пункта 2 леммы 1 и $\int_0^\infty \alpha^{\frac{1}{2}}(x)dx < \infty$.

3. Выполнены предположение пункта 3 леммы 1 и $\int_0^\infty \alpha^{\frac{\delta}{2+\delta}}(x)dx < \infty$.

Тогда для $x \geq 0$ *имеет место сходимость*

$$Y^\varepsilon(x) \Rightarrow cw(x),\ c > 0,$$

где $c^2 = 2\int_0^\infty \mathbb{E}c(0)c(x)dx > 0$.

Доказательство. При предположениях леммы 2

$$\int_0^\infty Ec(0)c(x)dx = \int_0^\infty r(x)dx < \infty. \tag{2.2}$$

Первое утверждение леммы доказано в [5, с. 246–247], [6, теорема]. Для доказательства утверждений два и три проверим условия теорем 5.3 и 5.4 в [4]. Вычислим, учитывая четность функции $r(z)$,

$$\sigma_\varepsilon^2 = \mathbb{E}\bigg(\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} c(z)dz\bigg)^2 = \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} r(y-z)dydz = \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\bigg[\int_0^z r(z-y)dy$$
$$+ \int_z^{\frac{1}{\varepsilon}} r(y-z)dy\bigg]dz = \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_0^z r(y)dydz + \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}-z} r(y)dydz$$
$$= 2\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_0^z r(y)dydz.$$

Т.е.

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{2}{\varepsilon}\int_0^1\int_0^{\frac{z}{\varepsilon}} r(y)dydz.$$

Отсюда получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\sigma_\varepsilon^2 = c^2. \tag{2.3}$$

Из теорем 5.3 и 5.4 в [4] следует сходимость

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2}}\int_0^{\frac{x}{\varepsilon}} c(y)dy \Rightarrow w(x).$$

Из этой сходимости и (2.3)

$$Y^\varepsilon(x) = c\sqrt{\frac{\varepsilon\sigma_\varepsilon^2}{c^2}}\frac{1}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2}}\int_0^{\frac{x}{\varepsilon}} c(y)dy \Rightarrow cw(x).$$

Лемма доказана. □

Лемма 3. *В условиях леммы 2*

$$Y^\varepsilon(x) \Rightarrow cW(x),\ c > 0.$$

Доказательство. Для $x \geq 0$ воспользуемся леммой 2 и винеровский процесс из этой леммы сейчас обозначим $w^{(2)}(x)$. Для $x \geq 0$ определим процесс

$$Z^\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^x \left[-c\left(-\frac{y}{\varepsilon}\right)\right] dy.$$

Согласно лемме 2 этот процесс слабо сходится к процессу $cw^{(1)}(x)$, где $w^{(1)}(x)$ — винеровский процесс. Выберем его независящим от процесса $w^{(2)}(x)$. Очевидно, для $x \leq 0$, $Y^\varepsilon(x) = Z^\varepsilon(-x)$.

Лемма доказана. □

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 2 и для любого* $N < \infty$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in [-N,N]} |f_\varepsilon(x)| = 0.$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in [-N,N]} \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^x c\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) f_\varepsilon(y) dy \right]^2 = 0.$$

Доказательство. Докажем лемму для условия пункта 1 леммы 2. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Для $x \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} M^\varepsilon(x) &:= \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^x c\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) f_\varepsilon(y) dy \right]^2 \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \int_0^x f_\varepsilon(y) f_\varepsilon(z) \mathbb{E} c\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) c\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) dz dy \qquad (2.4) \\ &\leq \sup_{y \in [0,x]} |f_\varepsilon(y)|^2 \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \int_0^x \left| \mathbb{E} c\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) c\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \right| dz dy. \end{aligned}$$

Оценим внутренний интеграл в правой части (2.4), воспользовавшись оценкой пункта 1 леммы 1. Получим

$$\int_0^x \left| \mathbb{E} c\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) c\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \right| dz = \int_0^y \left| \mathbb{E} c(0) c\left(\frac{y-z}{\varepsilon}\right) \right| dz$$
$$+ \int_y^x \left| \mathbb{E} c(0) c\left(\frac{z-y}{\varepsilon}\right) \right| dz \leq 4\varepsilon \mathbb{E} c^2(0) \int_0^\infty \varphi^{\frac{1}{2}}(z) dz.$$

Отсюда и (2.4) следует:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in [0,N]} M^\varepsilon(x) = 0.$$

Случай $x \leq 0$ рассматривается аналогично.

Лемма доказана. □

Пусть процесс $\xi^\varepsilon(t)$ является решением стохастического уравнения

$$\xi^\varepsilon(t) = x + \int\limits_0^t b^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s))ds + \int\limits_0^t \sigma^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s))dB^\varepsilon(s),\ x \in \mathbb{R},\ t \geq 0. \quad (2.5)$$

Относительно коэффициентов этого уравнения сделаем следующие предположения, полагая $a^\epsilon(x) = (\sigma^\varepsilon(x))^2$:

(A1) Существует постоянная $\lambda \geq 1$ такая, что для $x \in \mathbb{R}$,

$$|b^\varepsilon(x)| + a^\varepsilon(x) \leq \lambda,\ \ a^\varepsilon(x) \geq \frac{1}{\lambda}.$$

(A2) Существует функция $a(x)$ такая, что для любого $N < \infty$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in [-N,N]} |a^\varepsilon(x) - a(x)| = 0.$$

(A3) Существует функция $b(x)$ такая, что для любого $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^x b^\varepsilon(y)dy = \int_0^x b(y)dy.$$

(A4) Функция $b(x)$ непрерывна, функция $a(x)$ имеет ограниченную производную.

Положим $\Omega = \mathbb{C}[0,T]$, $\mathcal{F}$ — борелевская σ-алгебра в Ω, $\mathcal{F}_t = \sigma\{x(s),\ s \leq t,\ x(\cdot) \in \mathbb{C}[0,T]\}$. При предположении **(A1)** уравнение (2.5) при каждом $\varepsilon > 0$ имеет единственное слабое решение [7, теорема 2.17], [8, теорема II.4.6]. Т.е. при каждом $\varepsilon > 0$ существует вероятностная мера $\mathbf{P}^\varepsilon$ такая, что на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}^\varepsilon)$, существует $\mathcal{F}_t$-согласованный одномерный винеровский процесс $B^\varepsilon(t)$ и существует $\mathcal{F}_t$— согласованный одномерный процесс $\xi^\varepsilon(t)$ такие, что равенство (2.5) выполняется с вероятностью единица. Для решений уравнения (2.5) справедливы равномерные по параметру ε оценки моментов. Существует постоянная Λ, зависящая от λ, m, T, такая, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}^\varepsilon \sup_{t \in [0,T]} |\xi^\varepsilon(t)|^{2m} \leq \Lambda(1 + |x|^{2m}), \\ &\mathbf{E}^\varepsilon \sup_{0 \leq s \leq t \leq T} |\xi^\varepsilon(t) - \xi^\varepsilon(s)|^{2m} \leq \Lambda(t-s)^m(1 + |x|^{2m}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

здесь $\mathbf{E}^\varepsilon$ — усреднение по мере $\mathbf{P}^\varepsilon$. Далее, [8, теорема V.1.2], при предположениях **(A1)** – **(A3)** процессы ξ^ε слабо сходятся к процессу ξ — слабому решению уравнения

$$\xi(t) = x + \int\limits_0^t b(\xi(s))ds + \int\limits_0^t \sigma(\xi(s))dB(s), \quad (2.7)$$

на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $\sigma(x) = \sqrt{a(x)} > 0$. Для процесса $\xi(t)$ справедливы оценки (2.6) если в них опустить символ ε. Определим процесс $(\xi^\varepsilon(t), B^\varepsilon(t), \xi(t), B(t))$. Из оценок (2.6) и оценок моментов винеровского процесса следует, что выполнены условия теоремы Скорохода об одном вероятностном пространстве [9, теорема I.4.2]. Т.е. существует вероятностное пространство $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{F}}_t, \widehat{\mathbf{P}})$ и процессы $\widehat{\xi}^\varepsilon(t), \widehat{B}^\varepsilon(t), \widehat{\xi}(t), \widehat{B}(t)$ на нем, имеющие те же распределения, что и $\xi^\varepsilon(t), B^\varepsilon(t), \xi(t), B(t)$, соответственно, для которых с $\widehat{\mathbf{P}}$-вероятностью единица выполнены равенства (2.5) и (2.7). Чтобы не усложнять обозначения будем опускать у процессов символ $\ll\widehat{\ }\gg$, т.е. считать, что сами процессы $\xi^\varepsilon(t), B^\varepsilon(t), \xi(t), B(t)$ определены на вероятностном пространстве $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{F}}_t, \widehat{\mathbf{P}})$. Определим пространство

$$(\widetilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathcal{F}}_t, \widetilde{P}) = (\Sigma \times \widehat{\Omega}, \mathcal{A} \otimes \widehat{\mathcal{F}}, \mathcal{A} \otimes \widehat{\mathcal{F}}_t, \mathbb{P} \times \widehat{\mathbf{P}}).$$

Используем обозначение $\widetilde{E}$ для математического ожидания относительно вероятностной меры $\widetilde{P}$. Через $L(t, y)$ обозначим симметричное локальное время процесса $\xi(t)$ в момент времени t в точке y, существующее с $\widetilde{P}$-вероятностью равной единице, [8, с. 108]:

$$L(t, y) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta} \int_0^t I(y - \delta \leq \xi(s) \leq y + \delta) a(\xi(s)) ds.$$

Определим стандартную операцию усреднения по Соболеву. Пусть $\rho(x)$ — бесконечно дифференцируемая четная неотрицательная функция с носителем на отрезке $[-1, 1]$ такая, что $\int_{-1}^1 \rho(x)dx = 1$. Положим

$$f_n(x) := \int_{-1}^1 f\left(x - \frac{z}{n}\right) \rho(z) dz, \tag{2.8}$$

Лемма 5. *Пусть выполнены условия леммы 2 и условия* **(A1)**, **(A2)**, **(A4)**. *Тогда*

$$\Phi^\varepsilon(x) := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^x \int_0^y \frac{c(\frac{z}{\varepsilon})}{a^\varepsilon(z)} dz dy \Rightarrow \Phi(x) := c \int_0^x \frac{W(y)}{a(y)} dy$$
$$+ c \int_0^x \int_0^y \frac{a'(z)}{a^2(z)} W(z) dz dy,$$

$$\left(\Phi^\varepsilon(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^x \frac{c(\frac{z}{\varepsilon})}{a^\varepsilon(z)} dz \Rightarrow \Phi'(x) = c \frac{W(x)}{a(x)} + c \int_0^x \frac{a'(z)}{a^2(z)} W(z) dz.$$

Кроме того, для некоторой постоянной Λ, $\mathbb{E}[(\Phi^\varepsilon(x))']^2 \leq \Lambda |x|$.

Доказательство. Из предположений **(A1)** и **(A2)** следует, что условие леммы 4 выполнено для функции $f^\varepsilon(x) = \frac{1}{a^\varepsilon(x)} - \frac{1}{a(x)}$. Определим

$$\Psi^\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^x \int_0^y \frac{c(\frac{z}{\varepsilon})}{a(z)} dzdy\,.$$

В силу леммы 4

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in[-N,N]} \mathbb{E}[\Phi^\varepsilon(x) - \Psi^\varepsilon(x)]^2 = 0, \\ &\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in[-N,N]} \mathbb{E}\Big[\Big(\Phi^\varepsilon(x)\Big)' - \Big(\Psi^\varepsilon(x)\Big)'\Big]^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} \Psi^\varepsilon(x) = &\int_0^x \frac{1}{a(y)} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^y c\Big(\frac{z}{\varepsilon}\Big) dzdy \\ &+ \int_0^x \int_0^y \frac{a'(z)}{a^2(z)} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^z c\Big(\frac{u}{\varepsilon}\Big) dudzdy. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Далее, для функции $f(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$, функции $h(x) \in \mathbb{C}[A_1, A_2]$ и суммируемой на интервале $[A_1, A_2]$ функции $g(x)$ функционал

$$[\Gamma(h)](x) = \int_{A_1}^x g(y) f(h(y)) dy$$

является непрерывным функционалом из $\mathbb{C}[A_1, A_2]$ в $\mathbb{C}[A_1, A_2]$ для любых $A_1 < A_2$. Отсюда,(2.10) и леммы 3, заключаем

$$\Psi^\varepsilon(x) \Rightarrow \Phi(x), \ \ \Big(\Psi^\varepsilon(x)\Big)' \Rightarrow \Phi'(x).$$

Утверждение леммы следует теперь из (2.9). Докажем неравенство леммы. Имеем для $x \geq 0$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}((\Phi^\varepsilon(x)')^2 = \varepsilon \int_0^{\frac{x}{\varepsilon}} \int_0^{\frac{x}{\varepsilon}} \frac{r(y-z)}{a^\varepsilon(\varepsilon y) a^\varepsilon(\varepsilon z)} dydz \leq \varepsilon\lambda^2 \int_0^{\frac{x}{\varepsilon}} \Big[\int_0^y r(y-z)dz \\ &+ \int_y^{\frac{x}{\varepsilon}} r(y-z)dz\Big] dy = 2\varepsilon\lambda^2 \int_0^{\frac{x}{\varepsilon}} \int_0^y r(z)dzdy = 2\lambda^2 \int_0^x \int_0^{\frac{y}{\varepsilon}} r(z)dzdy \\ &\leq 2\lambda^2 x \int_0^\infty r(z)dz. \end{aligned}$$

Случай $x \leq 0$ рассматривается аналогично.

Лемма доказана. □

Отметим, что стохастический интеграл в следующей лемме существует, т.к. случайные функции $L(t,y)$ и $W(y)$ независимы на пространстве $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{P})$.

Лемма 6. *Пусть выполнено одно из условий леммы 1 и условия* **(A1)**, **(A2)**, **(A4)**. *Тогда на пространстве* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ *с вероятностью единица*

$$\Phi\left(\xi(t)\right) = \Phi(x) + c\int_0^t \left(\frac{W\left(\xi(s)\right)}{a\left(\xi(s)\right)} + \int_0^{\xi(s)} \frac{a'(z)}{a^2(z)} W(z)dz\right) d\xi(s) +$$

$$+\frac{c}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L(t,y)}{a(y)} dW(y).$$

Доказательство. Определим $W_n(x)$ через $W(x)$ по правилу (2.8) и положим

$$\Phi_n(x) := c\int_0^x\int_0^y \frac{W_n'(z)}{a(z)} dzdy = c\int_0^x \left[\frac{W_n(y)}{a(y)} + \int_0^y \frac{a'(z)}{a^2(z)} W_n(z)dz\right] dy.$$

В силу свойств усреднений с $\mathbb{P}$-вероятностью единица для любого $N < \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-N,N]} |W_n(x) - W(x)| = 0.$$

Поэтому с $\mathbb{P}$-вероятностью единица

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \Phi(x), \ \lim_{n\to\infty} \Phi_n'(x) = \Phi'(x) \tag{2.11}$$

равномерно по x на компактах.

Далее, по формуле Ито

$$\Phi_n\left(\xi(t),\theta\right) = \Phi_n(x,\theta) + \int_0^t \Phi_n'(\xi(s),\theta) d\xi(s) + \frac{c}{2}\int_0^t W_n'\left(\xi(s),\theta\right) ds. \tag{2.12}$$

Воспользуемся “occupation time” формулой [8, следствие II.2.2],

$$\int_0^t W_n'\left(\xi(s)\right) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(t,y)}{a(y)} W_n'\left(y\right) dy.$$

Согласно [9, теорема VI.7.1],

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{L(t,y)}{a(y)} W'_n(y)\,dy - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{L(t,y)}{a(y)} dW(y)\Big]^2 = 0. \qquad (2.13)$$

Переходя в (2.12) к пределу, учитывая (2.11), (2.13), получим утверждение леммы.

Лемма доказана. □

Лемма 7. *Пусть выполнено одно из условий леммы 1 и условия* **(A1)–(A4)**. *Тогда меры, порожденные на пространстве* $\mathbb{C}[0,T] \times \mathbb{C}(\mathbb{R})$ *парой* $(\xi^\varepsilon,\ \Phi^\varepsilon)$, *слабо сходятся к мере, порожденной парой* $(\xi,\ \Phi)$.

Доказательство. Пусть $H(x,y)$ — непрерывный ограниченный функционал на пространстве $\mathbb{C}[0,T] \times \mathbb{C}(\mathbb{R})$ и $\mu^\varepsilon(A) = \widehat{\mathbf{P}}\{\xi^\varepsilon(\cdot) \in A\}$, $\nu^\varepsilon(B) = \mathbb{P}\{\Phi^\varepsilon(\cdot) \in B\}$. При сделанных предположениях

$$\mu^\varepsilon(A) \Rightarrow \mu(A) = \widehat{\mathbf{P}}\{\xi(\cdot) \in A\},\ \nu^\varepsilon(B) \Rightarrow \nu(B) = \mathbb{P}\{\Phi(\cdot) \in B\}. \quad (2.14)$$

Тогда в силу независимости процессов $\xi^\varepsilon(t)$ и $\Phi^\varepsilon(x)$

$$\widetilde{E}H\Big(\xi^\varepsilon(\cdot), \Phi^\varepsilon(\cdot)\Big) = \int\limits_{\mathbb{C}(\mathbb{R})} \Big[\int\limits_{\mathbb{C}[0,T]} H(x(\cdot), y(\cdot))\mu^\varepsilon(dx)\Big]\nu^\varepsilon(dy). \qquad (2.15)$$

В силу первой сходимости в (2.14)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{C}[0,T]} H(x(\cdot), y(\cdot))\mu^\varepsilon(dx) = \int\limits_{\mathbb{C}[0,T]} H(x(\cdot), y(\cdot))\mu(dx) = R(y(\cdot)).$$

Функционал $R(y(\cdot))$ непрерывен и ограничен. Теперь отсюда, (2.14), (2.15) и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \widetilde{E}H\Big(\xi^\varepsilon(\cdot), \Phi^\varepsilon(\cdot)\Big) = \int\limits_{\mathbb{C}[0,T]\times\mathbb{C}(\mathbb{R})} H(x(\cdot), y(\cdot))\mu(dx)\nu(dy)$$

$$= \widetilde{E}H\Big(\xi(\cdot), \Phi(\cdot)\Big).$$

Лемма доказана. □

Лемма 8. *Пусть* $\xi^\varepsilon \Rightarrow \xi$, $|f^\varepsilon(x)| \le \Lambda$, *выполнено условие* **(A1)** *и при любом* $t \in [0,T]$ *и* $\varepsilon \to 0$

$$\int_0^t f^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s))ds \xrightarrow{\widehat{\boldsymbol{P}}} 0.$$

Тогда для любой функции $g(x)$, *удовлетворяющей условию Липшица с постоянной* Λ,

$$\int_0^t g(\xi^\varepsilon(s))f^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s))ds \xrightarrow{\widehat{\boldsymbol{P}}} 0 \ \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Доказательство. Выберем разбиение $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = t$. Имеем

$$\int_0^t g(\xi^\varepsilon(s))f^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s))ds = \sum_{i=1}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\Big(g(\xi^\varepsilon(s)) - g(\xi^\varepsilon(t_i))\Big)f^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s))ds+$$
$$+\sum_{i=1}^{k-1} g(\xi^\varepsilon(t_i))\int_{t_i}^{t_{i+1}} f^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s))ds = J_1^\varepsilon + J_2^\varepsilon. \tag{2.16}$$

В условиях леммы слагаемое J_2^ε в (2.16) сходится к нулю по вероятности $\widehat{\mathbf{P}}$ при любом k при $\varepsilon \to 0$. Оценим первое слагаемое.

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbf{E}}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\Big(g(\xi^\varepsilon(s)) - g(\xi^\varepsilon(t_i))\Big)f^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s))ds\right|^2\\
&\le \widehat{\mathbf{E}}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\Big(g(\xi^\varepsilon(s)) - g(\xi^\varepsilon(t_i))\Big)^2 ds \times \int_{t_i}^{t_{i+1}}\Big(f^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s))\Big)^2 ds\\
&\le \Lambda(t_{i+1}-t_i)\int_{t_i}^{t_{i+1}}\widehat{\mathbf{E}}|\xi^\varepsilon(s) - \xi^\varepsilon(t_k)|^2 ds\\
&\le \Lambda(t_{i+1}-t_i)\int_{t_i}^{t_{i+1}}(s-t_k)ds = \Lambda(t_{i+1}-t_i)^3.
\end{aligned}$$

Здесь использована вторая оценка из (2.6). Следовательно,

$$\widehat{\mathbf{E}}^\varepsilon|J_1^\varepsilon| \le \Lambda\sum_{i=1}^{k-1}(t_{i+1}-t_i)^{\frac{3}{2}} \le \Lambda T \max_{1\le i\le k-1}(t_{i+1}-t_i)^{\frac{1}{2}}$$

Т.о. для сколь угодно малого $\delta > 0$ можно выбрать разбиение $\{t_i\}$, такое, что $\widehat{\mathbf{E}}|J_1^\varepsilon| < \delta$ равномерно по ε. Переходя теперь в (2.16) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим требуемое.

Лемма доказана. □

Лемма 9. *Пусть выполнены предположения леммы 8. Тогда при* $\varepsilon \to 0$
$$\int_0^t \Phi'(\xi^\varepsilon(s)) f^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s))ds \overset{\widetilde{P}}{\to} 0.$$

Доказательство. Фиксируем число N и положим $\Phi'_N(x) = \Phi'(x)$, если $|x| \le N$ и ноль в противном случае. Пусть $(\Phi'_N)_n(x)$ усреднение по Соболеву функции $\Phi'_N(x)$. Тогда

$$\int_0^t \Phi'(\xi^\varepsilon(s)) f^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s))ds = \int_0^t \Big[\Phi'(\xi^\varepsilon(s)) - \Phi'_N(\xi^\varepsilon(s))\Big] f^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s))ds$$
$$+ \int_0^t \Big[\Phi'_N(\xi^\varepsilon(s)) - (\Phi'_N)_n(\xi^\varepsilon(s))\Big] f^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s))ds$$
$$+ \int_0^t (\Phi'_N)_n(\xi^\varepsilon(s)) f^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s))ds. \tag{2.17}$$

При любом фиксированном $\theta \in \Theta$, $\widehat{\mathbf{P}}$ - предел третьего слагаемого правой части равенства (2.17) при фиксированных N, n и $\varepsilon \to 0$ согласно лемме 8 равен нулю. Поэтому его и $\widetilde{P}-$предел также равен нулю. Рассмотрим второе слагаемое в правой части (2.17).Согласно оценке Крылова [10, теорема II.4.4], [8, следствие II.3.4], получим

$$\begin{aligned} &\widetilde{E}\Big| \int_0^t \Big[\Phi'_N(\xi^\varepsilon(s)) - (\Phi'_N)_n(\xi^\varepsilon(s)))\Big] f^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s))ds\Big| \\ &\le \Lambda \mathbb{E}\bigg(\int_{-N}^N \Big|\Phi'_N(x) - (\Phi'_N)_n(x)\Big|^2 dx\bigg)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

В силу свойств усреднений при фиксированном $\theta \in \Theta$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-N}^N \Big|\Phi'_N(x) - (\Phi'_N)_n(x)\Big|^2 dx = 0. \tag{2.19}$$

Установим равномерную интегрируемость случайной величины под знаком математического ожидания в правой части формулы (2.18). Из свойств усреднений и существования всех абсолютных моментов у винеровского процесса $W(x)$, находим с некоторой постоянной Λ_N, зависящей от N,

$$\mathbb{E}\int_{-N}^N \Big|\Phi'_N(x) - (\Phi'_N)_n(x)\Big|^2 dx \le 2\mathbb{E}\int_{-N}^N |\Phi'_N|^2(x)dx$$
$$\le 2\mathbb{E}\int_{-N}^N |\Phi'|^2(x)dx \le \Lambda_N.$$

Отсюда,(2.19) и (2.18) следует, что второе слагаемое в формуле (2.17) при фиксированном N при $n \to \infty$ имеет $\widetilde{P}$-предел равный нулю равномерно по ε. Оценим первое слагаемое в (2.17). Для него

$$\int_0^t \widetilde{E}\Phi'(\xi^\varepsilon(s))I(|\xi^\varepsilon(s)| \geq N)f^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s))ds \leq$$

$$\leq \Lambda \int_0^t \widehat{\mathbf{E}}\mathbb{E}|\Phi'(\xi^\varepsilon(s)|I(|\xi^\varepsilon(s)| \geq N)ds.$$

Из определения функции $\Phi'(x)$ имеем с некоторой постоянной Λ

$$(\Phi'(x))^2 \leq \Lambda\biggl(W^2(x) + |x|^2 \sup_{z\in[0,|x|]} W^2(z)\biggr).$$

Поэтому

$$\mathbb{E}(\Phi'(x))^2 \leq \Lambda(|x| + |x|^3). \tag{2.20}$$

В силу неравенства Чебышева и оценок решений стохастических уравнений (2.6)

$$\widetilde{E}(\Phi')^2(\xi^\varepsilon(s))I(|\xi^\varepsilon(s)| \geq N) \leq \Lambda\biggl(\widehat{\mathbf{E}}(|\xi^\varepsilon(s)|^2 + |\xi^\varepsilon(s)|^6)(\widehat{\mathbf{E}}|\xi^\varepsilon(s)|^2)\biggr)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}$$
$$\leq \frac{\Lambda}{N},$$

с постоянной Λ, независящей от ε. Отсюда следует, что первое слагаемое в (2.17) стремится к нулю при $N \to \infty$ равномерно по ε. Т.о. переходя в (2.17) к пределу сначала по $\varepsilon \to 0$, затем по $n \to \infty$ и потом по $N \to \infty$, получим утверждение леммы. $\square$

3. Основной результат

Теорема 1. *Пусть выполнено одно из условий леммы 1 и условия* **(A1)**–**(A4)**. *Тогда меры, порожденные на пространстве* $\mathbb{C}[0,T]$ *функционалом* $F^\varepsilon(t,\theta,\omega)$, *слабо сходятся к мере, порожденной функционалом*

$$F(t,\theta,\omega) = \frac{c}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{L(t,y)}{a(y)}dW(y).$$

Доказательство. Все процессы определены ниже рассматриваются на пространстве $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{P})$. Применим формулу Ито к процессу $\xi^\varepsilon(t)$

и функции $\Phi^\varepsilon(x)$ из леммы 5:

$$\begin{aligned} F^\varepsilon(t) = \Phi^\varepsilon(\xi^\varepsilon(t)) - \Phi^\varepsilon(x) - \int_0^t (\Phi^\varepsilon)'(\xi^\varepsilon(s)) b^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s)) ds - \\ - \int_0^t (\Phi^\varepsilon)'(\xi^\varepsilon(s)) \sigma^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s)) dB^\varepsilon(s). \end{aligned} \tag{3.21}$$

В силу [11, теорема 2 и замечание 2] $\Phi^\varepsilon(\xi^\varepsilon(t)) \Rightarrow \Phi(\xi(t))$. Воспользуемся необходимыми и достаточными условиями сходимости $\xi^\varepsilon \Rightarrow \xi$ для одномерных стохастических уравнений работы [12, следствие 4.1, пример 4.1], в силу которых при $\varepsilon \to 0$

$$\sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t (b^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s)) - b(\xi^\varepsilon(s))) ds \right| \xrightarrow{\widehat{\mathbf{P}}} 0.$$

Далее,

$$\int_0^t (\Phi^\varepsilon)'(\xi^\varepsilon(s)) b^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s)) ds = \int_0^t \Big[(\Phi^\varepsilon)'(\xi^\varepsilon(s)) - \Phi'(\xi^\varepsilon(s)) \Big] b^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s)) ds$$
$$+ \int_0^t \Phi'(\xi^\varepsilon(s)) \Big(b^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s)) - b(\xi^\varepsilon(s) \Big) ds + \int_0^t \Phi'(\xi^\varepsilon(s)) b(\xi^\varepsilon(s)) ds. \tag{3.22}$$

Из леммы 5 и [11, теорема 2 и замечание 2] следует, что выражение в квадратных скобках в первом интеграле справа в равенстве (3.22) сходится по распределению к нулю. Из оценки леммы 5, оценки (2.20), равномерных по ε оценок (2.6), следует равномерная интегрируемость и, следовательно, сходимость

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \widetilde{E} \Big| (\Phi^\varepsilon)'(\xi^\varepsilon(s)) - \Phi'(\xi^\varepsilon(s)) \Big| = 0.$$

Т.о. $\widetilde{P}$-предел первого слагаемого в (3.22) равен нулю. В силу леммы 9 $\widetilde{P}$-предел второго слагаемого в (3.22) так же равен нулю. Учитывая это и сходимость $\Phi'(\xi^\varepsilon(s)) b(\xi^\varepsilon(s)) \Rightarrow \Phi'(\xi(s)) b(\xi(s))$ на основании [11, теорема 2 и замечание 2], из (3.22) имеем

$$\int_0^t (\Phi^\varepsilon)'(\xi^\varepsilon(s)) b^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s)) ds \Rightarrow \int_0^t \Phi'(\xi(s)) b(\xi(s)) ds.$$

Далее, т.к.$(\Phi^\varepsilon)'(x)\sigma^\varepsilon(x) \Rightarrow \Phi'(x)\sigma(x)$, то, как и выше,

$$(\Phi^\varepsilon)'(\xi^\varepsilon(t)) \sigma^\varepsilon(\xi^\varepsilon(t)) \Rightarrow \Phi'(\xi(t)) \sigma(\xi(t)).$$

Согласно [13, теорема 4.6]

$$\int_0^t (\Phi^\varepsilon)'(\xi^\varepsilon(s)) \sigma^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s)) dB^\varepsilon(s) \Rightarrow \int_0^t \Phi'(\xi(s)) \sigma(\xi(s)) dB(s).$$

Из (3.21) и отмеченных сходимостей, имеем

$$F^\varepsilon(t) \Rightarrow \Phi(\xi(t)) - \Phi(x) - \int_0^t (\Phi'(\xi(s))b(\xi(s))ds - \int_0^t \Phi'(\xi(s)\sigma(\xi(s))dB(s).$$

Утверждение теоремы следует из леммы 6.

Теорема доказана. □

4. Примеры

В рассматриваемых ниже примерах обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в интегральной форме, предполагаются выполненными условия теоремы.

1. Рассмотрим уравнение с мультипликативным неограниченным случайным возмущением

$$x^\varepsilon(t) = x + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t x^\varepsilon(s) c\left(\frac{\xi^\varepsilon(s)}{\varepsilon}\right) ds.$$

В условиях теоремы $x^\varepsilon \Rightarrow x$:

$$x(t) = x \exp\left\{\frac{c}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(t,y)}{a(y)} dW(y)\right\}.$$

Как функция аргумента t функция $L(t,y)$ является непрерывной и возрастающей [8, теорема II.2.1]. Поэтому можем рассматривать процесс $x(t)$ как решение стохастического интегро-дифференциального уравнения

$$x(t) = x + \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a(y)} \int_0^t x(s) L(ds,y) dW(y).$$

2. Рассмотрим уравнение с аддитивным неограниченным случайным возмущением

$$x^\varepsilon(t) = x + \int_0^t \lambda^\varepsilon(s) x^\varepsilon(s) ds + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t h^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s)) \int_0^s c\left(\frac{\xi^\varepsilon(v)}{\varepsilon}\right) dv ds.$$

Предположим, что существует функция $\lambda(t)$ такая, что $\int_0^t \lambda^\varepsilon(s)ds \to \int_0^t \lambda(s)ds$ для любого $t \in [0,T]$ при $\varepsilon \to 0$, функции $h^\varepsilon(x)$ ограниченны постоянной Λ и равномерно на компактах сходятся к непрерывной функции $h(x)$. Заметим, что $h^\varepsilon(\xi^\varepsilon(t)) \Rightarrow h(\xi(t))$. Действительно,

$$\widehat{\mathbf{E}}\left|h^\varepsilon(\xi^\varepsilon(t)) - h(\xi^\varepsilon(t))\right|^2 \le 2\widehat{\mathbf{E}}\left|h^\varepsilon(\xi^\varepsilon(t)) - h(\xi^\varepsilon(t))\right|^2 I\Big(|\xi^\varepsilon(t)| \le N\Big)$$

$$+ 2\widehat{\mathbf{E}}\left|h^\varepsilon(\xi^\varepsilon(t)) - h(\xi^\varepsilon(t))\right|^2 I\Big(|\xi^\varepsilon(t)| > N\Big).$$

Первое слагаемое правой части этого неравенства при $\varepsilon \to 0$ для любого конечного N сходится к нулю в силу равномерной сходимости функций на компактах. Второе слагаемое правой части неравенства может быть сделано сколь угодно малым выбором N в силу ограниченности функций, равномерной оценки (2.6) и неравенства Чебышева. Указанная сходимость следует теперь из сходимости $\xi^\varepsilon \Rightarrow \xi$ и непрерывности функции $h(x)$. Далее имеем

$$x^\varepsilon(t) = x \exp\left\{ \int_0^t \lambda^\varepsilon(s)ds \right\}$$
$$+ \int_0^t \exp\left\{ \int_s^t \lambda^\varepsilon(v)dv \right\} h^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s)) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^s c\left(\frac{\xi^\varepsilon(v)}{\varepsilon} \right) dvds \Rightarrow$$
$$x(t) = x \exp\left\{ \int_0^t \lambda(s)ds \right\}$$
$$+ \frac{c}{2} \int_0^t \exp\left\{ \int_s^t \lambda(v)dv \right\} h(\xi(s)) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(s,y)}{a(y)} dW(y)ds.$$

Процесс $x(t)$ является решением уравнения

$$x(t) = x + \int_0^t \lambda(s)x(s)ds + \frac{c}{2} \int_0^t h(\xi(s)) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(t,y)}{a(y)} dW(y)ds.$$

3. Вновь рассмотрим уравнение с аддитивным неограниченным случайным возмущением, но другого типа. Положим

$$H^\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^x h^\varepsilon(y) \int_0^y c\left(\frac{z}{\varepsilon} \right) dzdy.$$

Предположим, что $|h^\varepsilon(x)| \le \Lambda$ и существует функция $h(x)$ такая, что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^x h^\varepsilon(y)dy = \int_0^x h(y)dy.$$

Положим $U^\varepsilon(t) = H^\varepsilon(\xi^\varepsilon(t))$ и рассмотрим уравнение

$$x^\varepsilon(t) = x + \int_0^t \lambda^\varepsilon(s)x^\varepsilon(s)ds + \int_0^t U^\varepsilon(s)ds.$$

Относительно функции $\lambda^\varepsilon(t)$ сохраним предположения примера 2. Имеем

$$x^\varepsilon(t) = x \exp\left\{ \int_0^t \lambda^\varepsilon(s)ds \right\} + \int_0^t \exp\left\{ \int_s^t \lambda^\varepsilon(v)dv \right\} U^\varepsilon(s)ds$$

Для функции $f(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ и функции $k(x) \in \mathbb{VC}(\mathbb{R})$ определим функционал

$$S(f,k)(x) = \int_0^x f(y)dk(y) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}).$$

Этот функционал является непрерывным функционалом из пространства $\mathbb{C}(\mathbb{R}) \times \mathbb{VC}(\mathbb{R})$ в пространство $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ (с топологиями равномерной сходимости на компактах). Действительно, пусть последовательность $f_n(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$, последовательность $k_n(x) \in \mathbb{VC}(\mathbb{R})$ и $\mathop{\mathbf{V}}_{-N}^{N}(k_n) \leq \Lambda_N$ для некоторой постоянной Λ_N, зависящей от N. Пусть для $N < \infty$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{x\in[-N,N]} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x\in[-N,N]} |k_n(x) - k(x)| \right] = 0.$$

Тогда

$$|S(f_n,k_n)(x) - S(f,k)(x)| \leq \left| \int_0^x (f_n(y) - f(y))dk_n(y) \right|$$
$$+ \left| \int_0^x f(y)dk_n(y) - \int_0^x f(y)dk(y) \right|$$
$$\leq \Lambda \sup_{y\in[0,x]} |f_n(y) - f(y)| + \left| \int_0^x f(y)dk_n(y) - \int_0^x f(y)dk(y) \right|.$$

Здесь использована оценка интеграла Стилтьеса [14, теорема VIII.7.1]. Т.о. при $n \to \infty$ первое выражение в крайней формуле справа стремится к нулю в силу выбора последовательности $f_n(x)$, а второе слагаемое сходится к нулю равномерно по $x \in [-N,N]$ в силу теоремы Хелли см. [14, теорема VIII.7.3] и ее доказательство. Следовательно,

$$\lim_{n\to 0} \sup_{x\in[-N,N]} |S(f_n,k_n)(x) - S(f,k)(x)| = 0.$$

Выберем $k^\varepsilon(x) = \int_0^x h^\varepsilon(y)dy$, $k(x) = \int_0^x h(y)dy$. Тогда $U^\varepsilon(s) = S(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)(\xi^\varepsilon(t))$. В силу непрерывности функционала $S(f,k)(x)$ и сходимости $Y^\varepsilon \Rightarrow Y$ имеем $H^\varepsilon(x) \Rightarrow H(x) = \int_0^x h(y)W(y)dy$. Поскольку $\xi^\varepsilon \Rightarrow \xi$, то в силу [11, теорема 2 и замечание 2]

$$U^\varepsilon(s) \Rightarrow H(\xi(s)).$$

Следовательно, $x^\varepsilon \Rightarrow x$ и

$$x(t) = x \exp\left\{ \int_0^t \lambda(s)ds \right\} + \int_0^t \exp\left\{ \int_s^t \lambda(v)dv \right\} H(\xi(s))ds.$$

Т.е. предельный процесс $x(t)$ является решением уравнения

$$x(t) = x + \int_0^t \lambda(s)x(s)ds + \int_0^t H(\xi(s))ds.$$

Литература

[1] E. Pardoux, A. Piatnitski, *Homogenization of a singular random one dimension PDE* // Math. Sci. Appl., **24** (2005), 292–302.

[2] B. Iftimie, E. Pardoux, A. Piatnitski, *Homogenization of a singular random one-dimensional PDE* // Annals de l'Institut H. Poincare, **44** (2008), No. 3, 512–543.

[3] И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины*, М.: Наука, 1965.

[4] Ю. А. Давыдов, *О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными прцессами* // Теория вероятностей и ее применения, **13** (1968), No. 4, 730–737.

[5] П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, М.: Наука, 1977.

[6] Д. О. Чикин, *Функциональная предельная теорема. Мартингальный подход* // Теория вероятностей и ее применения, **24** (1989), No. 4, 731–741.

[7] N. Krylov, *On weak uniqueness for some diffusions with discontinuous coefficients* // Stochastic processes and their applications, **113** (2004), No. 1, 37–64.

[8] С. Я. Махно, *Стохастические уравнения. Предельные теоремы*, К.: Наукова Думка, 2012.

[9] С. Ватанабэ, Н. Икеда, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, М.: Наука, 1986.

[10] Н. В. Крылов, *Управляемые процессы диффузионного типа*, М.: Наука, 1977.

[11] Д. С. Сильвестров, *Условия сходимости суперпозиции случайных процессов в J-топологии* // Теория вероятностей и ее применения, **18** (1973), No. 3, 605–608.

[12] Б. И. Григелионис, К. Кубилюс, Р. А. Микулявичус, *Мартингальный подход к функциональным предельным теоремам* // Успехи математических наук, **37**(228) (1982), No. 6, 39–51.

[13] T. Kurts, P. Protter, *Weak limit theorems for stochastic integrals and stochastic differential equations* // The Annals of Probability, **19** (1991), No. 3, 1035–1070.

[14] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, М.: Наука, 1974.

Сведения об авторах

Ярослав Игоревич Грановский
Сергей Яковлевич Махно

Отделение прикладных проблем современного анализа Института математики НАН Украины
E-Mail: yarvodoley@mail.ru
smakhno@gmail.com