Український математичний вісник
Том 13 **(2016)**, № 1, 76 – 90

О регуляризации матричной дифференциально–алгебраической краевой задачи

Сергей М. Чуйко

(*Представлена В.Я. Гутлянским*)

Аннотация. Найдены условия регуляризации, а также конструкция обобщенного оператора Грина регуляризованной линейной матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи. Для решения задачи о регуляризации обобщенной матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи использованы оригинальные условия разрешимости, а также конструкция общего решения матричного уравнения типа Сильвестра.

Ключевые слова и фразы. Матричная краевая задача, дифференциально-алгебраические уравнения, условия регуляризации, обобщенный оператор Грина, уравнение Сильвестра.

1. Постановка задачи

Исследуем задачу о построении решений $Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b]$ обобщенного дифференциально-алгебраического матричного уравнения

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \tag{1}$$

подчиненных краевому условию

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{2}$$

Здесь

$$\mathcal{A}Z(t): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b] \to \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a;b]$$

Статья поступила в редакцию 07.03.2016
Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0115U003182).

— дифференциально-алгебраический матричный оператор, который по определению для любых скалярных функций $\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ и любых постоянных матриц $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ обеспечивает равенство

$$\mathcal{A}(\zeta'(t)\Xi_1 + \xi'(t)\Xi_2)(t) = \zeta'(t)\mathcal{A}(\Xi_1)(t) + \xi'(t)\mathcal{A}(\Xi_2)(t).$$

Аналогично матричный оператор $\mathcal{B}Z(t): \ \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[a;b] \to \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a;b]$ будем далее называть алгебраическим, если для любых непрерывных скалярных функций $\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ и любых постоянных матриц $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ имеет место равенство

$$\mathcal{B}(\zeta(t)\Xi_1 + \xi(t)\Xi_2)(t) = \zeta(t)\mathcal{B}(\Xi_1)(t) + \xi(t)\mathcal{B}(\Xi_2)(t).$$

Здесь также $F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a;b]$ — непрерывная матрица и $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — линейный ограниченный матричный функционал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}.$$

Вообще говоря, предполагаем $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta \neq \mu \neq \nu$. Обозначим $\mathbb{R}^n$ пространство действительных векторов с “кубической” нормой [1, 2]

$$||a||_{\mathbb{R}^n} := \max_{1\leq i\leq n} |a_i|, \quad a \in \mathbb{R}^n,$$

а также пространство $\mathbb{R}^{m\times n}$ пространство действительных $(m \times n)$-матриц с нормой

$$||A||_{\mathbb{R}^{m\times n}} := \max_{1\leq i\leq m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|, \quad A := \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

согласованной с “кубической” нормой в пространстве $\mathbb{R}^n$. Кроме того, обозначим $\mathbb{C}_{m\times n}[a, b]$ линейное нормированное пространство действительных $(m\times n)$-матриц $A(t)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ с нормой

$$||A(t)||_{\mathbb{C}_{m\times n}} := \max_{[a;b]} ||A(t)||_{\mathbb{R}^{m\times n}}, \quad A(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[a, b],$$

а также пространство $\mathbb{C}^1_{m\times n}[a, b]$ линейное нормированное пространство действительных $(m \times n)$-матриц $A(t)$, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ с нормой

$$||A(t)||_{\mathbb{C}^1_{m\times n}} := \max_{[a;b]} \sum_{k=0}^{1} ||A^{(k)}(t)||_{\mathbb{R}^{m\times n}}, \quad A(t) \in \mathbb{C}^1_{m\times n}[a, b].$$

Матричное дифференциально-алгебраическое уравнение (1) обобщает традиционные постановки задач, как для матричных дифференциальных уравнений [3–6], так и для дифференциально-алгебраических уравнений [7–9]. С другой стороны, матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача (1), (2) обобщает традиционные постановки нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [2, 10–12].

Определим оператор $\mathcal{M}[A] : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$, как оператор, который ставит в соответствие матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-столбец $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы A, а также обратный оператор [14–16]

$$\mathcal{M}^{-1}\Big[\mathcal{B}\Big] : \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

который ставит в соответствие вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Обозначим $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, $j = 1, 2, \ \ldots \ , \ \alpha\cdot\beta$ — естественный базис [17] пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, при этом задача о нахождении решений обобщенного дифференциально-алгебраического матричного уравнения (1) приводит к задаче о нахождении вектора $z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta}[a;b]$, компоненты которого $z_j(t)$ определяют разложение матрицы

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} z_j(t), \quad z_j(t) \in \mathbb{C}^1[a;b], \quad j = 1, 2, \ \ldots \ \alpha\cdot\beta.$$

Линейный дифференциально-алгебраический матричный оператор $\mathcal{A}Z'(t)$ по определению представим в виде

$$\mathcal{A}Z'(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \mathcal{A}\ \Xi^{(j)}(t) z'_j(t),$$

при этом

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}Z'(t)\Big] = \Omega(t)\cdot z'(t), \quad \Omega(t) := \Big[\Omega_j(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta},$$

где

$$\Omega_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{A}\ \Xi^{(j)}(t)\right], \quad j = 1, 2, \ \ldots \ , \ \alpha\cdot\beta.$$

Аналогично

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{B}Z(t)\Big] = \Theta(t)\cdot z(t), \quad \Theta(t) := \Big[\Theta_j(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta},$$

где

$$\Theta_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{B}\ \Xi^{(j)}(t)\right], \quad j = 1, 2, \ \ldots \ , \ \alpha\cdot\beta.$$

Таким образом, задача о построении решений обобщенного дифференциально-алгебраического матричного уравнения (1) приведена к задаче о нахождении решений $z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta\times 1}[a;b]$ традиционного дифференциально-алгебраического уравнения [7–9, 12, 18, 19]

$$\Omega(t)\cdot z'(t) = \Theta(t)\cdot z(t) + \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{F}(t) := \mathcal{M}\Big[F(t)\Big]. \tag{3}$$

При условии [10, 12, 19]

$$P_{\Omega^*(t)}\Theta(t) = 0, \quad P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0, \tag{4}$$

в случае

$$\Omega^+(t)\Theta(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}[a;b], \quad \Omega^+(t)\mathcal{F}(t),\ P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\varrho}[a;b] \tag{5}$$

система (3) разрешима относительно производной

$$\frac{dz}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)z + \mathfrak{F}_1(t,\varphi(t)), \quad \mathfrak{F}_1(t,\varphi(t)) := \Omega^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t).$$

Здесь $P_{\Omega^*}(t)$ — $(\gamma\cdot\delta\times\gamma\cdot\delta)$– матрица-ортопроектор: $P_{\Omega^*}(t) : \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta} \to \mathbb{N}(\Omega^*(t))$, $P_{\Omega_\varrho}(t)$ — $(\alpha\cdot\beta\times\varrho)$– матрица, составленная из ϱ линейно-независимых столбцов $(\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta)$– матрицы-ортопроектора $P_\Omega(t) : \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(\Omega(t))$. Обозначим $X(t)$ нормальную фундаментальную матрицу [2]

$$\frac{dX(t)}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)X(t), \quad X(a) = I_{\alpha\beta}$$

полученной традиционной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При условии (4), (5) система (3) имеет решение вида

$$z(t,c) = X(t)c + K\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t),$$

$$K\Big[f(s)\Big](t) := X(t)\int_a^t X^{-1}(s)f(s)ds,\ c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta},$$

которое определяет решение обобщенного матричного дифференциально-алгебраического уравнения (1)

$$Z(t,c) = W(t,c) + \mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t),\ W(t,c) := \mathcal{M}^{-1}\Big[X(t)c\Big],\ c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}, \tag{6}$$

где

$$\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{K\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t)\Big\}$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши $Z(a) = 0$ для дифференциально-алгебраической системы (1). Предположим условия

(4), (5) выполненными. Подставляя решение (6) обобщенного матричного дифференциально-алгебраичесго уравнения (1) в краевое условие (2) , приходим к задаче о нахождении решений

$$c = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} c_j \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}, \quad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \ \ldots \ , \ \alpha\cdot\beta$$

матричного уравнения [14]

$$\mathcal{L}W(\cdot, c) + \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](\cdot) = \mathfrak{A}.$$

Предположим также, что для краевой задачи (1), (2) имеет место критический случай ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$); при условиях (4), (5) краевая задача (1), (2) разрешима тогда и только тогда, когда

$$P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](\cdot)\Big\} = 0.$$

Поставим следующую задачу: можно ли в этом случае малыми возмущениями

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot, \varepsilon) := \mathcal{L}Z(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon\, \mathcal{U}Z(a, \varepsilon)\mathcal{V}, \quad \mathcal{U} \in \mathbb{R}^{\mu\times\alpha}, \quad \mathcal{V} \in \mathbb{R}^{\beta\times\nu}$$

краевого условия (2)

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot, \varepsilon) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{7}$$

привести матричную дифференциально-алгебраическую задачу (1), (7) к некритическому случаю? Здесь $P_{\mathcal{Q}^*}$ — матрица-ортопроектор $P_{\mathcal{Q}^*} : \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$, где

$$\mathcal{Q} := \Big[\mathcal{Q}_i\Big]_{i=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu\times\alpha\cdot\beta},$$

$$\mathcal{Q}_i := \mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}\mathcal{M}^{-1}\Big[X(\cdot)\Xi^{(i)}\Big]\Big\}, \quad i = 1, 2, \ \ldots \ , \ \alpha\cdot\beta.$$

Матрица $P_{\mathcal{Q}_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк ортопроектора $P_{\mathcal{Q}^*}$. Здесь $\check{\mathcal{L}}Z(\cdot, \varepsilon)$ — линейный ограниченный матричный функционал:

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot, \varepsilon) : \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a; b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu},$$

непрерывный по малому параметру ε при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Таким образом поставленная задача относится к задачам о регуляризации [1, 2, 21–23].

2. Условия регуляризации матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи

Как известно [20], любая $(m \times n)-$ матрица Q в определенном базисе может быть представлена в виде

$$Q = M \cdot J \cdot N, \quad \text{rank}\, Q := \rho; \tag{8}$$

здесь $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — невырожденные матрицы,

$$J := \begin{pmatrix} I_\rho & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Разложением (8) можно воспользоваться при решении задачи о регуляризации матричной дифференциально-алгебраической задачи (1), (7) . Возмущение матрицы $\mathcal{Q}$ будем искать в виде

$$\mathfrak{Q}(\varepsilon) := \mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R} \in \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu \times \alpha \cdot \beta}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

По определению матричная дифференциально-алгебраическая задача (1), (7) представляет некритический случай при условии $P_{\mathfrak{Q}^*}(\varepsilon) = 0$. Очевидно, это условие равносильно уравнению

$$\Big[\mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R}\Big] \cdot \Big[\mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R}\Big]^+ = I_{\mu\nu} \tag{9}$$

относительно $(\mu\nu \times \mu\nu)$-матрицы $\mathcal{R}$. Заметим, что уравнение (9) разрешимо лишь для $\mu\nu \le \alpha\beta$. Действительно, предположим уравнение (9) переопределенным: $\mu\nu > \alpha\beta$, при этом

$$\text{rank}\, \Big(\mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R}\Big)\Big(\mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R}\Big)^+ \le \text{rank}\, \Big(\mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R}\Big)$$

$$= \text{rank}\, \Big(\mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R}\Big)^+ \le \mu\nu < \gamma\delta,$$

что противоречит равенству рангов левой и правой части уравнения (9). При условии $\mu\nu \le \alpha\beta$ уравнение (9) имеет по меньшей мере одно семейство решений

$$\mathcal{R} := M \cdot \Pi_J \cdot N \in \mathbb{R}^{\gamma\delta \times \alpha\beta},$$

где $\Pi_J \in \mathbb{R}^{\gamma\delta \times \alpha\beta}$ — матрица полного ранга. Таким образом, поставленная задача о регуляризации матричной дифференциально-алгебраической задачи (1), (7) равносильна задаче о регуляризации линейного алгебраического уравнения

$$\mathcal{Q}(\varepsilon)\ c = \mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](\cdot)\Big\} \tag{10}$$

с матрицей $\mathcal{Q}(\varepsilon)$, разрешимой при условии $\mu\nu \le \alpha\beta$ в виде

$$\mathfrak{Q}(\varepsilon) := \mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R}, \quad \mathcal{R} := M \cdot \Pi_J \cdot N \in \mathbb{R}^{\mu\nu\times\alpha\beta}.$$

Действительно, в силу невырожденности матриц M и N имеет место равенство [17, 4.48]

$$\text{rank } \mathfrak{Q}(\varepsilon) = \text{rank } (J + \varepsilon\Pi_J) = \mu\nu,$$

при этом $P_{\mathfrak{Q}^*}(\varepsilon) = 0$, следовательно система (10) с матрицей $\mathfrak{Q}(\varepsilon)$ разрешима для любых правых частей. Положим для определенности, что $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{\mu\times\alpha}$ — фиксированная постоянная матрица и $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{\beta\times\nu}$ — неизвестная постоянная матрица. Заметим, что

$$\mathcal{U}Z(a,\varepsilon)\mathcal{V} = \mathcal{U}\,W(a,c)\mathcal{V} = \mathcal{U}\,\mathcal{M}^{-1}(c)\mathcal{V}, \quad c \in \mathbb{R}^{\alpha\beta};$$

здесь

$$c = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Theta^{(j)}\xi_j \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}, \quad \xi_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \ \dots\ , \ \alpha\cdot\beta,$$

где, напомним, $\Theta^{(j)}$, $j = 1, 2, \ \dots\ , \ \alpha\beta$ — естественный базис пространства $\mathbb{R}^{\alpha\beta}$. При этом

$$\mathcal{U}Z(a,\varepsilon)\mathcal{V} = \mathcal{U}\,\mathcal{M}^{-1}\left[\sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Theta^{(j)}\xi_j\right]\mathcal{V}$$

$$= \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \mathcal{U}\,\mathcal{M}^{-1}\Big(\Theta^{(j)}\Big)\mathcal{V}\xi_j = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \mathcal{U}\,\Xi^{(j)}\mathcal{V}\xi_j.$$

Таким образом,

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{U}Z(a,\varepsilon)\mathcal{V}\Big] = \Big\{\mathcal{M}\Big[\mathcal{U}\,\Xi^{(1)}\mathcal{V}\Big], \ \dots\ \mathcal{M}\Big[\mathcal{U}\,\Xi^{(\alpha\beta)}\mathcal{V}\Big]\Big\}\xi,$$

следовательно

$$\Big\{\mathcal{M}\Big[\mathcal{U}\,\Xi^{(1)}\mathcal{V}\Big], \ \dots\ , \ \mathcal{M}\Big[\mathcal{U}\,\Xi^{(\alpha\beta)}\mathcal{V}\Big]\Big\} = M\Pi_J N. \tag{11}$$

Неизвестную матрицу $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{\beta\times\nu}$ будем искать в виде

$$\mathcal{V} = \sum_{j=1}^{\beta\cdot\nu} \Lambda_j\zeta_j \in \mathbb{R}^{\beta\times\nu}, \quad \zeta_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \ \dots\ , \ \beta\cdot\nu,$$

где $\Lambda^{(j)},\ j = 1, 2,\ \dots\ ,\ \beta \cdot \nu$ — естественный базис пространства $\mathbb{R}^{\beta\times\nu}$; обозначим $(\mu\nu \times \alpha\mu)$ – матрицы

$$\Pi_i := \Big\{\mathcal{M}\Big[\mathcal{U}\,\Xi^{(i)}\Lambda_1\Big],\ \dots\ ,\ \mathcal{M}\Big[\mathcal{U}\,\Xi^{(i)}\Lambda_{\beta\nu}\Big]\Big\}, \quad i = 1, 2,\ \dots\ ,\ \alpha\beta.$$

Уравнение (11) приводит к системе

$$\mathfrak{D}\cdot\zeta = \mathcal{M}\Big(M\Pi_J N\Big), \tag{12}$$

разрешимой относительно вектора $\zeta \in \mathbb{R}^{\beta\nu}$ тогда и только тогда, когда

$$P_{\mathfrak{D}^*}\mathcal{M}\Big(M\,\Pi_J N\Big) = 0. \tag{13}$$

Здесь

$$\mathfrak{D} := \begin{pmatrix} \Pi_1\mathcal{M}\Lambda_1 & \Pi_1\mathcal{M}\Lambda_2 & \dots & \Pi_1\mathcal{M}\Lambda_{\beta\nu} \\ \Pi_2\mathcal{M}\Lambda_1 & \Pi_2\mathcal{M}\Lambda_2 & \dots & \Pi_2\mathcal{M}\Lambda_{\beta\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pi_{\alpha\beta}\mathcal{M}\Lambda_1 & \Pi_{\alpha\beta}\mathcal{M}\Lambda_2 & \dots & \Pi_{\alpha\beta}\mathcal{M}\Lambda_{\beta\nu} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\cdot\mu\cdot\nu\times\beta\cdot\nu},$$

кроме того, $P_{\mathfrak{D}^*}$ — матрица-ортопроектор:

$$P_{\mathfrak{D}^*}:\ \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\cdot\mu\cdot\nu} \to \mathbb{N}(\mathfrak{D}^*).$$

При условии (13) и только при нем система (12) определяет по меньшей мере один вектор $\zeta \in \mathbb{R}^{\beta\nu}$:

$$\zeta = \mathfrak{D}^+\cdot\mathcal{M}\Big(M\,\Pi_J N\Big),$$

который определяет матрицу

$$\mathcal{V} := \mathcal{M}^{-1}\Big[\mathfrak{D}^+\mathcal{M}\Big(M\,\Pi_J N\Big)\Big],$$

гарантирующий разрешимость задачи о регуляризации матричной дифференциально-алгебраической задачи (1), (2). Возмущение матрицы $\mathcal{Q}$:

$$\mathfrak{Q}(\varepsilon) := \mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu\times\alpha\cdot\beta}$$

при условии

$$\mathfrak{Q}^+(\varepsilon)\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \check{\mathcal{L}}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](\cdot)\Big\} \in \mathbb{C}_{\alpha\beta\times\mu\nu}[0, \varepsilon_0]$$

определяет решение

$$Z(t,\varepsilon):\ Z(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b],\quad Z(t,\cdot)\in\mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0]$$

матричной дифференциально-алгебраической задачи (1), (7) вида

$$Z(t,\varepsilon)=W(t,c_r,\varepsilon)+G\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s));\mathfrak{A}\Big](t,\varepsilon),\quad c_r\in\mathbb{R}^r, \tag{14}$$

где

$$W(t,c_r,\varepsilon):=\mathcal{M}^{-1}\Big[X(t)P_{\mathfrak{Q}_r}(\varepsilon)c_r\Big]$$

общее решение однородной части регуляризованной матричной дифференциально-алгебраической задачи (1), (7) и

$$G\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s));\mathfrak{A}\Big](t,\varepsilon):=\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t)$$

$$+\mathcal{M}^{-1}\Big\{X(t)\mathfrak{Q}^+(\varepsilon)\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A}-\check{\mathcal{L}}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](\cdot)\Big\}\Big\}$$

— обобщенный оператор Грина задачи о регуляризации матричной дифференциально-алгебраической задачи (1), (2). Матрица $P_{\mathfrak{Q}_r}(\varepsilon)$ составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\mathfrak{Q}^*(\varepsilon)}:\ \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu}\to\mathbb{N}(\mathfrak{Q}^*(\varepsilon))$. Таким образом, доказано следующее достаточное условие регуляризации матричной дифференциально-алгебраической задачи (1), (2).

Теорема 1. *В критическом случае* ($P_{\mathcal{Q}^*}\neq 0$) *при условиях* (4), (5), (13) *и*

$$\mu\nu\le\alpha\beta,\ \ \mathfrak{Q}^+(\varepsilon)\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A}-\check{\mathcal{L}}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](\cdot)\Big\}\in\mathbb{C}_{\alpha\beta\times\mu\nu}[0,\varepsilon_0]$$

задача о нахождении решения $Z(t)\in\mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b]$ *матричного дифференциально-алгебраического уравнения* (1), *удовлетворяющего краевому условию* (2), *малым возмущением*

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot,\varepsilon):=\mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\,\mathcal{U}Z(a,\varepsilon)\mathcal{M}^{-1}\Big[\mathfrak{D}^+\mathcal{M}\Big(M\Pi_J N\Big)\Big]$$

краевого условия (2) *приводится к задаче о нахождении решения*

$$Z(t,\varepsilon):\ Z(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b],\quad Z(t,\cdot)\in\mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0]$$

матричной дифференциально-алгебраической задачи (1), (7) *в некритическом* ($P_{\mathfrak{Q}^*}=0$) *случае вида* (14).

Доказанная теорема обобщает соответствующие условия регуляризации линейных нетеровых краевых задач [23] на случай матричной дифференциально-алгебраической задачи (1), (2) и могут быть использованы в теории устойчивости движения, при решении дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли [4, 5], а также при решении линейных краевых задач для матричных дифференциальных уравнений [6, 24–26].

Пример 1. Требованиям доказанной теоремы удовлетворяет матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \quad \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \tag{15}$$

где

$$\mathcal{A}Z'(t) := \int_0^1 \int_0^1 \Phi(t,u,v)\, Z'(t)\, \Psi(t,u,v)\, du\, dv,$$

$$\mathcal{B}Z(t) := \sum_{i=1}^{3} S_i(t)\, Z(t)\, R_i(t),$$

$$\Phi(t,u,v) := \begin{pmatrix} 3u & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3v \end{pmatrix}, \quad \Psi(t,u,v) := \begin{pmatrix} 4u & 0 \\ 0 & 4v \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}Z(\cdot) := \Pi_0 Z(0)\Gamma_0 + \Pi_1 Z(1)\Gamma_1,$$

$$\Pi_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \ldots\ , \ \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

естественный базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$. Поскольку

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

постольку условия (4), (5) выполнены: $P_{\Omega(t)^*\Theta(t)} = 0,\ P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0,$

$$\Omega^+(t)\Theta(t) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{6\times 6}[\mathbb{R}],$$

при этом матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача (15) представляет критический случай ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$); здесь

$$P_{\mathcal{Q}^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\rho = 2 \neq 0$, при этом произведение $P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t)$ зависит от произвольной функции $\varphi(t) \in \mathbb{C}_{2\times 1}[0;1]$; здесь

$$P_{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\Omega_\varrho}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим для определенности $\varphi(t) := 0$. Матрица

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

может быть представлена в виде (8), где

$$J := \begin{pmatrix} I_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 6}, \quad M = I_4,$$

а также

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Положим для определенности $\mathcal{U} = I_2$ и

$$\Pi_J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

при этом условия (13) и $4 = \mu\nu < \alpha\beta = 6$ выполнены; здесь

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при этом

$$\mathfrak{Q}^{+}(\varepsilon)\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A}-\check{\mathcal{L}}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](\cdot)\Big\}\in\mathbb{C}_{\alpha\beta\times\mu\nu}[0,\varepsilon_0];$$

здесь

$$\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t)=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} t^2 & 6t & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши $Z(0)=0$ для дифференциально-алгебраической системы (15). Возмущение матрицы $\mathcal{Q}$:

$$\mathfrak{Q}(\varepsilon):=\mathcal{Q}+\varepsilon\mathcal{R},\quad \mathcal{R}:=M\cdot\Pi_J\cdot N$$

определяет сомножитель

$$\mathcal{V}=\begin{pmatrix} 3 & 0\\ 0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix},$$

при этом

$$\mathfrak{Q}(\varepsilon)=\begin{pmatrix} 1+3\varepsilon & 0 & 0 & 1 & 3\varepsilon & 0\\ 0 & 3\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 3\varepsilon\\ 0 & 0 & 3\varepsilon & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\varepsilon & 0 & 0\end{pmatrix}$$

— матрица полного ранга, удовлетворяющая условию $P_{\mathfrak{Q}^*}=0$. Поскольку

$$P_{\mathfrak{Q}_r}(\varepsilon)=\begin{pmatrix} 3\left(\varepsilon+18\varepsilon^3\right) & 0\\ 0 & 3\varepsilon\left(1+6\varepsilon+18\varepsilon^2\right)\\ 0 & 1+6\varepsilon+18\varepsilon^2\\ 0 & 0\\ -(1+3\varepsilon)\left(1+18\varepsilon^2\right) & 0\\ 0 & -3\varepsilon\left(1+6\varepsilon+18\varepsilon^2\right)\end{pmatrix},$$

постольку общее решение однородной части регуляризованной матричной дифференциально-алгебраической задачи двупараметрично:

$$W(t,\varepsilon,c_r)=c_1W_1(t,\varepsilon)+c_2W_2(t,\varepsilon)\quad c_r:=\begin{pmatrix} c_1 & c_2\end{pmatrix}^*\in\mathbb{R}^2;$$

здесь

$$W_1(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} 3\,\varepsilon & 0 & -1-3\,\varepsilon\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$W_2(t,\varepsilon)=\frac{1+6\,\varepsilon+18\,\varepsilon^2}{24\,(1+18\,\varepsilon^2)}\begin{pmatrix} t\,(8+3t\,\varepsilon) & 6\,(4+3t\,\varepsilon) & -1-3\,\varepsilon\\ 72\,\varepsilon & 0 & -72\,\varepsilon\end{pmatrix}.$$

Общее решение неоднородной регуляризованной матричной дифференциально-алгебраической задачи определяет обобщенный оператор Грина задачи о регуляризации матричной дифференциально-алгебраической задачи (15):

$$G\left[\mathfrak{F}(s,\varphi(s));\mathfrak{A}\right](t)=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} t^2+\frac{24+72\,\varepsilon}{1+6\,\varepsilon(1+3\,\varepsilon)} & 6t & \frac{72\,\varepsilon}{1+6\,\varepsilon(1+3\,\varepsilon)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Литература

[1] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, М., Наука, 1991, 277 с.

[2] A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, Utrecht, Boston, VSP, 2004, 317 p.

[3] Р. Беллман, *Введение в теорию матриц*, М., Наука, 1969, 367 с.

[4] В. П. Деревенский, *Матричные уравнения Бернулли* // Известия вузов. Математика, **2** (2008), 14–23.

[5] A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya, *A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations* // Differential Equations, **37** (2001), № 4, 464–471.

[6] С. М. Чуйко, *Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения* // Динамические системы, **4 (32)** (2014), № 1-2, 101–107.

[7] S. L. Campbell, *Singular Systems of differential equations*, San Francisco–London–Melbourne, Pitman Advanced Publishing Program, 1980, 178 p.

[8] В. Ф. Чистяков, А*лгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром*, Новосибирск, Наука, 1996, 280 с.

[9] Ю. Е. Бояринцев, В. Ф. Чистяков, *Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования*, Новосибирск, Наука, 1998, 224 с.

[10] С. М. Чуйко, *Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем* // Комп. исследов. и моделирование, **5** (2013), № 5, 769–783.

[11] A. A. Boichuk, A. A. Pokutnyi, V. F. Chistyakov, *Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations* // Computational Mathematics and Mathematical Physics, **53** (2013), № 6, 777–788.

[12] S. M. Chuiko, *Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation* // Russian Mathematics, **60** (2016), 64–73.

[13] A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya, *Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type* // Ukr. Mathematical Journal,**50** (1998), № 8, 1162–1169.

[14] С. М. Чуйко, *О решении матричного уравнения Сильвестра* // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика, **19** (2014), № 1 (21), 49–57.

[15] С. М. Чуйко, *О решении матричных уравнений Ляпунова* // Вестник Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина. Серия: Математика, прикладная математика и механика, **1120** (2014), 85–94.

[16] С. М. Чуйко, *О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра* // Чебышевский сборник, **16** (2015), № 1, 52–66.

[17] В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов, Матрицы и вычисления, М., Наука, 1984, 318 с.

[18] В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова, *Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем*, Новосибирск, Наука, 2003, 317 с.

[19] С. М. Чуйко, *Нетеровы краевые задачи для вырожденных дифференциально-алгебраических систем с линейным импульсным воздействием* // Динамические системы, **4 (32)** (2014), № 1–2, 89–100.

[20] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, 3 изд., М., Изд. МЦНМО, 2009, 672 с.

[21] С. Г. Крейн, *Линейные уравнения в банаховом пространстве*, М., Наука, 1971, 104 с.

[22] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, М., Наука, 1986, 288 с.

[23] S. M. Chuiko, *On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action* // Journal of Mathematical Sciences, **197** (2014), № 1, 138–150.

[24] С. М. Чуйко, *Обобщенное матричное дифференциально алгебраическое уравнение* // Укр. математичний вісник, **12** (2015), № 1, 11–26.

[25] С. М. Чуйко, *Оператор Грина обобщенной матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи* // Сибирский матем. журнал, **56** (2015), № 4, 942–951.

[26] S. M. Chuiko, *The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem* // Siberian Mathematical Journal, **56** (2015), № 4, 752–760.

Сведения об авторах

Сергей Михайлович Чуйко

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск, Украина

E-Mail: `chujko-slav@inbox.ru`