Український математичний вісник
Том 14 **(2017)**, № 1, 135 – 148

Поперечники некоторых классов функций, определенных при помощи обобщенных модулей непрерывности ω_γ в пространстве L_2

Сергей Б. Вакарчук

(*Представлена С. Я. Махно*)

Аннотация. Вычислены точные значения ряда поперечников классов функций H^{ω_γ} и $W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma, \Phi)$, заданных при помощи обобщенного модуля непрерывности ω_γ и мажоранты Φ, удовлетворяющей определенному условию. Также на указанных классах найдены точные значения коэффициентов Фурье.

2010 MSC. 41A10, 41A46, 42A10, 42A16, 42A24.

Ключевые слова и фразы. Наилучшее полиномиальное приближение, обобщенный модуль непрерывности, ряд Фурье, коэффициенты Фурье, n-поперечник.

1. Введение

Данная статья является логическим продолжением цикла публикаций автора [1–3] и посвящена вычислению в пространстве L_2 ряда n-поперечников классов (ψ, β)-дифференцируемых функций, определенных при помощи обобщенных модулей непрерывности и их мажорант. Её также можно рассматривать, но на ином качественном уровне, как распространение одного результата ученика А. В. Ефимова Ю. И. Григоряна на общий случай (см. теорему 2 и следствие 1 из неё, приведенные в [4]) . Следует отметить, что в отличие от большинства ранее известных результатов, связанных с вычислением точных значений n-поперечников классов функций в L_2 (см., например, [5]– [16]), в рассматриваемой ситуации на мажоранту налагаются менее обременительные условия. Также отметим, что вопросы обобщения понятия модуля непрерывности были рассмотрены в середине

Статья поступила в редакцию 25.11.2016

семидесятых годов прошлого столетия Х. Шапиро и Дж. Боманом. Впоследствие указанная тематика нашла своё продолжение в работах А. И. Козко, А. В. Рождественского, С. Н. Васильева, А. Г. Бабенко и других [1].

Напомним необходимые в дальнейшем понятия и определения. Под L_2 понимаем пространство измеримых по Лебегу 2π-периодических функций с конечной нормой

$$\|f\| = \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Символом G обозначим класс непрерывных на всей вещественной оси $\mathbb{R}$ четных неотрицательных и ограниченных функций γ, которые почти всюду отличны от нуля и такие, что $\gamma(0) = 0$. Произвольной функции $f \in L_2$ поставим в соответствие её разложение в ряд Фурье $S(f)$

$$f(x) \sim S(f,x) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j(f)\cos(jx) + b_j(f)\sin(jx)), \qquad (1.1)$$

где $a_j(f), j \in \mathbb{Z}_+$; $b_j(f), j \in \mathbb{N}$, есть коэффициенты Фурье, и запишем для f обобщенный модуль непрерывности [1]

$$\omega_\gamma(f,t) := \sup \left\{ \left(\sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^2(f)\gamma(jh) \right)^{1/2} : 0 < h \leqslant t \right\}, t > 0. \qquad (1.2)$$

В формуле (1.2) функция γ принадлежит классу G, $\rho_j^2(f) := a_j^2(f) + b_j^2(f)$, $j \in \mathbb{N}$. В частности, при $\gamma := \gamma_{1,k}$, где $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_{1,k}(x) := 2^k(1-\cos x)^k$, из (1.2) получаем обычный модуль непрерывности k-го порядка $\omega_k(f,t)$. Если же $\gamma := \gamma_{1,\alpha}$, где $\alpha > 0$, $\gamma_{1,\alpha}(x) := 2^\alpha(1-\cos x)^\alpha$, то из (1.2) имеем модуль непрерывности $\omega_\alpha(f,t)$ дробного порядка α [2]. Если же, например, $\gamma := \gamma_{2,k}$, где $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_{2,k}(x) := (1-\operatorname{sinc}(x))^{2k}$, $\operatorname{sinc}(x) := \{\sin(x)/x$, если $x \neq 0$; 1, если $x = 0\}$, то из формулы (1.2) получаем модуль непрерывности k-порядка $\widetilde{\omega}_k(f,t)$, порожденный функцией В. А. Стеклова

$$S_h(f,x) := \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} f(\tau)d\tau, \quad h > 0,$$

которая используется вместо обычного оператора сдвига $T_h f(x) := f(x+h), h \in \mathbb{R}$ [1].

Для произвольной функции $\gamma \in G$ полагаем

$$\gamma(t_*) := \sup\{\gamma(x) : x \in \mathbb{R}_+\}, \tag{1.3}$$

где $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x < \infty\}$. Очевидно, что значение t_* зависит от функции γ. Если верхняя грань в формуле (1.3) достигается в конечном или бесконечном множестве точек, то в качестве t_* берем точку, имеющую наименьшую абсциссу.

Будем говорить, что функция $\gamma \in G$ удовлетворяет *свойству A*, если на отрезке $[0, t_*]$ она монотонно возрастает [1]. Данному свойству удовлетворяют, например, функции $\gamma := \gamma_{1,\alpha}$, где $t_* = \pi$, $\alpha \in (0, \infty)$, и $\gamma := \gamma_{2,k}$, где t_* – наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = x$ $(4,49 < t_* < 4,51)$, $k \in \mathbb{N}$ (см., например, [1]).

2. Некоторые сведения о классах (ψ, β)–дифференцируемых функций

Классификация периодических функций на основе преобразований их рядов Фурье с помощью мультипликаторов и сдвигов по аргументу охватывает широкий спектр функций, включая гладкие, бесконечно дифференцируемые (в том числе целые и аналитические) функции, а также функции с расходящимися рядами Фурье. Такая классификация была реализована А.И.Степанцом [17, 18], а её идея возникла под влиянием работ Б. Надя, С. М. Никольского, В. К. Дзядыка, Н. П. Корнечука, С. Б. Стечкина и других.

Пусть f есть суммируемая 2π-периодическая функция, которой соответствует её разложение (1.1) в ряд Фурье, и пусть ψ является сужением на множество $\mathbb{N}$ произвольной вещественной функции, определенной на множестве $[1, \infty)$ и такой, что $\psi(j) \neq 0$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Под $\beta \in (-\infty, \infty)$ понимаем произвольное фиксированное число. Если ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(j)} (a_j(f) \cos(jx + \beta\pi/2) + b_j(f) \sin(jx + \beta\pi/2))$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой 2π-периодической функции, то, следуя А. И. Степанцу [17], данную функцию будем называть (ψ, β)–производной функции f и обозначать символом f_β^ψ. Через L_β^ψ обозначим множество всех 2π-периодических суммируемых функций, имеющих (ψ, β)-производные. При этом коэффициенты Фурье функций f и f_β^ψ связаны следующими соотношениями:

$$\begin{cases} a_j(f)=\psi(j)\left(a_j(f_\beta^\psi)\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)-b_j(f_\beta^\psi)\sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\right), \\ b_j(f)=\psi(j)\left(a_j(f_\beta^\psi)\sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)+b_j(f_\beta^\psi)\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\right),\ j\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Напомним, что в случае $\psi(j)=j^{-r}$, где $r>0$, а $\beta\in\mathbb{R}$, получаем (r,β)-производную в смысле Вейля – Надя, т.е. $f_\beta^\psi=f_\beta^{(r)}$. Если же, кроме того, $\beta=r$, где $r\in\mathbb{N}$, то указанная производная будет обыкновенной производной r-го порядка функции f.

Если функция f принадлежит множеству L_β^ψ и при этом её (ψ,β)-производная f_β^ψ является элементом некоторого подмножества $\mathfrak{N}$ 2π-периодических суммируемых функций, то говорят, что f принадлежит классу $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$. В дальнейшем под $\mathfrak{N}$ будем подразумевать L_2 и вместо символа $L_\beta^\psi L_2$ будем использовать обозначение $L_{\beta,2}^\psi$.

Символом $\mathfrak{M}$ обозначим класс непрерывных на множестве $[1,\infty)$ функций, которые положительны, выпуклы вниз и стремятся к нулю при $x\to\infty$, т.е. $\mathfrak{M}:=\{\psi\in C([1,\infty)):\psi(x)>0\ \forall x\in[1,\infty),\ \psi(x_1)-2\psi((x_1+x_2)/2)+\psi(x_2)\geqslant 0\ \forall x_1,x_2\in[1,\infty),\ \lim\limits_{x\to\infty}\psi(x)=0\}$.

Также будем полагать, что последовательности $\{\psi(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$, участвующие в определении (ψ,β)-производных, являются сужениями на $\mathbb{N}$ значений функций ψ из класса $\mathfrak{M}$ (см., например, [18, глава III, §12, п.12.1]). При этом, как отмечалось в [1], $L_{\beta,2}^\psi\subset L_2$.

3. Вычисление в L_2 поперечников классов функций, определенных при помощи характеристики гладкости ω_γ

Известно, что величина наилучшего полиномиального приближения функции $f\in L_2$ подпространством $\mathfrak{N}_{2n-1}^T$ тригонометрических полиномов порядка, не превосходящего $n-1$, равна

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)&=\inf\{\|f-T_{n-1}\|:T_{n-1}\in\mathfrak{N}_{2n-1}^T\} \\ &=\|f-S_{n-1}(f)\|=\left\{\sum_{j=n}^{\infty}\rho_j^2(f)\right\}^{1/2}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $S_{n-1}(f)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f. Для класса функций $\mathcal{K}\subset L_2$ полагаем $E_{n-1}(\mathcal{K})=\sup\{E_{n-1}(f):f\in\mathcal{K}\}$.

Пусть $\Phi(t), t \geqslant 0$ — непрерывная возрастающая функция, такая, что $\Phi(0) = 0$. Всюду далее её будем называть мажорантой. Символом $W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma, \Phi)$, где $\gamma \in G$, обозначим класс функций $f \in L^{\psi}_{\beta,2}$, для которых при любом $0 < t \leqslant t_*$ имеет место неравенство $\omega_\gamma(f^{\psi}_{\beta}, t) \leqslant \Phi(t)$.

Пусть $\mathbb{B}$ является единичным шаром в L_2, $\mathcal{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество функций из L_2, $\Lambda_n \subset L_2$ — n-мерное подпространство, $\Lambda^n \subset L_2$ — подпространство коразмерности n; $V : L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, $V^{\perp} : L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(\mathcal{M}; L_2) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0 : \ \varepsilon\mathbb{B} \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathcal{M}\right\} : \ \Lambda_{n+1} \subset L_2\right\},$$

$$d_n(\mathcal{M}; L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - \varphi\| : \varphi \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathcal{M}\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$\delta_n(\mathcal{M}; L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - Vf\| : f \in \mathcal{M}\right\} : VL_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$d^n(\mathcal{M}; L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\| : f \in \mathcal{M} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_2\right\},$$

$$\Pi_n(\mathcal{M}; L_2) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f - V^{\perp}f\| : f \in \mathcal{M}\Big\} : V^{\perp}L_2 \subset \Lambda_n\Big\} : \Lambda_n \subset L_2\Big\}$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским и проекционным n-поперечниками множества $\mathcal{M}$ в пространстве L_2. Так как L_2 есть гильбертово пространство, то перечисленные экстремальные характеристики связаны следующими соотношениями:

$$b_n(\mathcal{M}; L_2) \leqslant d^n(\mathcal{M}; L_2) = d_n(\mathcal{M}; L_2) = \delta_n(\mathcal{M}; L_2) = \Pi_n(\mathcal{M}; L_2). \tag{3.2}$$

Теорема 1. *Пусть функция $\gamma \in G$ удовлетворяет свойству A; Φ — произвольная мажоранта; $p_m(\cdot)$, $m \in \mathbb{N}$, — любой из рассмотренных выше m-поперечников; функция ψ принадлежит классу $\mathfrak{M}$; $\beta \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$. Тогда имеют место следующие соотношения:*

$$\begin{aligned}&\psi(n)\inf\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : 0 < t \leqslant t_*/n\} \leqslant p_{2n}(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma, \Phi); L_2)\\ &\leqslant p_{2n-1}(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma, \Phi); L_2) \leqslant E_{n-1}(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma, \Phi))\\ &\leqslant \psi(n)\limsup\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : t \to 0+\}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть f — произвольная функция из $L^{\psi}_{\beta,2}$. Используя формулы (2.1), получаем

$$\rho_j(f) = \psi(j)\rho_j(f^{\psi}_{\beta}), \ j \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Тогда на основании формул (3.1) и (3.4) запишем оценку сверху

$$E_{n-1}(f) = \left\{ \sum_{j=n}^{\infty} \psi^2(j)\rho_j^2(f_\beta^\psi) \right\}^{1/2} \leqslant \psi(n) \left\{ \sum_{j=n}^{\infty} \rho_j^2(f_\beta^\psi) \right\}^{1/2}$$
$$= \psi(n) E_{n-1}(f_\beta^\psi). \tag{3.5}$$

Очевидно, что для произвольного значения $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $k_\varepsilon = k(\varepsilon, f_\beta^\psi) \in \mathbb{N}$, для которого будет выполняться неравенство

$$E_{n-1}^2(f_\beta^\psi) \leqslant \sum_{j=n}^{k_\varepsilon} \rho_j^2(f_\beta^\psi) + \varepsilon. \tag{3.6}$$

Произвольным образом выберем число $\tau_\varepsilon \in (0, t_*/k_\varepsilon]$, где величина t_* определяется для функции γ согласно формуле (1.3). Используя далее определение (1.2) характеристики гладкости ω_γ и учитывая, что на отрезке $[0, t_*]$ функция γ монотонно возрастает, запишем

$$\sum_{j=n}^{k_\varepsilon} \rho_j^2(f_\beta^\psi) \leqslant \frac{1}{\gamma(n\tau_\varepsilon)} \sum_{j=n}^{k_\varepsilon} \rho_j^2(f_\beta^\psi)\gamma(j\tau_\varepsilon) \leqslant \frac{\omega_\gamma^2(f_\beta^\psi, \tau_\varepsilon)}{\gamma(n\tau_\varepsilon)} \ . \tag{3.7}$$

Из соотношений (3.5)–(3.7) для $f \in L_{\beta,2}^\psi$ получаем

$$E_{n-1}^2(f) \leqslant \psi^2(n) \sup\{\omega_\gamma^2(f_\beta^\psi, t)/\gamma(nt) : 0 < t \leqslant t_*/k_\varepsilon\} + \varepsilon\psi^2(n). \tag{3.8}$$

Когда $\varepsilon \to 0+$, то в силу формул (3.1) и (3.6) имеем $k_\varepsilon \to \infty$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0+$ в правой части неравенства (3.8) и учитывая только что сказанное, для произвольной функции $f \in W_{\beta,2}^\psi(\omega_\gamma, \Phi)$ запишем оценку сверху её наилучшего полиномиального приближения

$$E_{n-1}(f) \leqslant \psi(n) \limsup\{\omega_\gamma(f_\beta^\psi, t)/\sqrt{\gamma(nt)} : t \to 0+\}$$

$$\leqslant \psi(n) \limsup\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : t \to 0+\}.$$

Используя последнее неравенство и соотношение (3.2), получаем оценки сверху рассматриваемых экстремальных характеристик класса $W_{\beta,2}^\psi(\omega_\gamma, \Phi)$

$$p_{2n}(W_{\beta,2}^\psi(\omega_\gamma, \Phi); L_2) \leqslant p_{2n-1}(W_{\beta,2}^\psi(\omega_\gamma, \Phi); L_2) \leqslant d_{2n-1}(W_{\beta,2}^\psi(\omega_\gamma, \Phi); L_2)$$

$$\leqslant E_{n-1}(W_{\beta,2}^\psi(\omega_\gamma, \Phi)) \leqslant \psi(n) \limsup\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : t \to 0+\}. \tag{3.9}$$

Для получения оценок снизу экстремальных характеристик класса $W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma, \Phi)$ рассмотрим в L_2 шар

$$\widetilde{\mathbb{B}}_{2n+1} := \mathfrak{N}^T_{2n+1} \cap \rho\mathbb{B} = \{T_n \in \mathfrak{N}^T_{2n+1} : \|T_n\| \leqslant \rho\},$$

где

$$\rho := \psi(n) \inf\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : 0 < t \leqslant t_*/n\}. \tag{3.10}$$

Покажем, что определенный указанным образом шар $\widetilde{\mathbb{B}}_{2n+1}$ принадлежит классу $W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma, \Phi)$. Для этого рассмотрим два случая, а именно, когда $0 < \tau \leqslant t_*/n$ и когда $t_*/n \leqslant \tau \leqslant t_*$.

Если, например, $0 < \tau \leqslant t_*/n$, то используя формулы (1.2), (3.4) и (3.10), для произвольного полинома $T_n \in \widetilde{\mathbb{B}}_{2n+1}$ запишем

$$\omega_\gamma((T_n)^{\psi}_{\beta}, \tau) = \sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{n} \rho_j^2((T_n)^{\psi}_{\beta})\gamma(jh)\right)^{1/2} : 0 < h \leqslant \tau\right\}$$

$$\leqslant \sqrt{\gamma(n\tau)}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\psi^2(j)}\rho_j^2(T_n)\right)^{1/2} \leqslant \frac{\sqrt{\gamma(n\tau)}}{\psi(n)}\|T_n\| \leqslant \frac{\sqrt{\gamma(n\tau)}}{\psi(n)}\rho$$

$$= \sqrt{\gamma(n\tau)} \inf\left\{\frac{\Phi(t)}{\sqrt{\gamma(nt)}} : 0 < t \leqslant t_*/n\right\}. \tag{3.11}$$

Полагая в правой части соотношения (3.11) $t := \tau$, имеем

$$\omega_\gamma((T_n)^{\psi}_{\beta}, \tau) \leqslant \Phi(\tau).$$

Пусть теперь $t_*/n \leqslant \tau \leqslant t_*$. Учитывая, что функция γ принадлежит классу G и удовлетворяет свойству A, для произвольного полинома $T_n \in \widetilde{\mathbb{B}}_{2n+1}$ запишем

$$\omega_\gamma((T_n)^{\psi}_{\beta}), \tau) = \sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{n} \rho_j^2((T_n)^{\psi}_{\beta})\gamma(jh)\right)^{1/2} : 0 < h \leqslant \tau\right\}$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{\gamma(t_*)}}{\psi(n)}\ \|T_n\| \leqslant \frac{\sqrt{\gamma(t_*)}}{\psi(n)}\ \rho = \sqrt{\gamma(t_*)}\ \inf\left\{\frac{\Phi(t)}{\sqrt{\gamma(nt)}} : 0 < t \leqslant t_*/n\right\}. \tag{3.12}$$

Полагая в правой части соотношения (3.12) $t := t_*/n$, получаем

$$\omega_\gamma((T_n)^{\psi}_{\beta}), \tau) \leqslant \Phi(t_*/n) \leqslant \Phi(\tau).$$

Следовательно, $\widetilde{\mathbb{B}}_{2n+1} \subset W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma, \Phi)$.

Используя определение бернштейновского поперечника и соотношение (3.2), запишем оценки снизу

$$E_{n-1}(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma, \Phi)) \geqslant p_{2n-1}(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma, \Phi); L_2) \geqslant p_{2n}(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma, \Phi); L_2)$$

$$\geqslant b_{2n}(\widetilde{\mathbb{B}}_{2n+1}; L_2) \geqslant \rho = \psi(n) \inf\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : 0 < t \leqslant t_*/n\}. \quad (3.13)$$

Требуемые неравенства (3.3) вытекают из формул (3.9) и (3.13). Теорема 1 доказана. $\square$

Символом $H_2^{\omega_\gamma}(\Phi)$, где Φ — мажоранта, а $\gamma \in G$, обозначим класс функций $f \in L_2$, для которых $\omega_\gamma(f, t) \leqslant \Phi(t)$ при любых $0 < t \leqslant t_*$.

Следствие 1. *Пусть функция γ принадлежит классу G и удовлетворяет свойству A; Φ — мажоранта; $p_m(\cdot)$, $m \in \mathbb{N}$, — любой из рассмотренных ранее m-поперечников; $n \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы следующие неравенства:*

$$\inf\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : 0 < t \leqslant t_*/n\} \leqslant p_{2n}(H_2^{\omega_\gamma}(\Phi); L_2)$$

$$\leqslant p_{2n-1}(H_2^{\omega_\gamma}(\Phi); L_2) \leqslant E_{n-1}(H_2^{\omega_\gamma}(\Phi)) \leqslant \limsup\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : t \to 0+\}.$$

Доказательство данного следствия не приводится, поскольку оно в общих чертах повторяет доказательство теоремы 1.

Следствие 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и мажоранта Φ удовлетворяет соотношению*

$$\inf\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : 0 < t \leqslant t_*/n\} = \limsup\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : t \to 0+\}. \quad (3.14)$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$p_{2n}(H_2^{\omega_\gamma}(\Phi); L_2) = p_{2n-1}(H_2^{\omega_\gamma}(\Phi); L_2) = E_{n-1}(H_2^{\omega_\gamma}(\Phi))$$

$$= \inf\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : 0 < t \leqslant t_*/n\}, \quad (3.15)$$

$$p_{2n}(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma, \Phi); L_2) = p_{2n-1}(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma, \Phi); L_2) = E_{n-1}(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma, \Phi))$$

$$= \psi(n) \inf\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : 0 < t \leqslant t_*/n\}. \quad (3.16)$$

4. Вычисление модулей коэффициентов Фурье на классах функций $W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\Phi)$ и $H_2^{\omega_\gamma}(\Phi)$

Вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций действительного переменного в разное время рассматривали, например, А. В. Ефимов, А. Ф. Тиман, Н. П. Корнейчук, В. И. Бердышев, С. Милорадович, С. А. Теляковский, А. И. Степанец и многие другие. С нашей точки зрения подобная задача представляет определенный интерес и в рассматриваемом здесь случае.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда для коэффициентов Фурье* $a_n(\cdot)$ *и* $b_n(\cdot)$, *где* $n\in\mathbb{N}$, *на классах* $H_2^{\omega_\gamma}(\Phi)$ *и* $W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\Phi)$ *выполняются неравенства*

$$\inf\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)}:0<t\leqslant t_*/n\}\leqslant \begin{matrix}\sup\{|a_n(f)|:f\in H_2^{\omega_\gamma}(\Phi)\}\\ \sup\{|b_n(f)|:f\in H_2^{\omega_\gamma}(\Phi)\}\end{matrix}$$

$$\leqslant \limsup\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)}:t\to 0+\} \tag{4.1}$$

и

$$\psi(n)\inf\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)}:0<t\leqslant t_*/n\}\leqslant \begin{matrix}\sup\{|a_n(f)|:f\in W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\Phi)\}\\ \sup\{|b_n(f)|:f\in W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\Phi)\}\end{matrix}$$

$$\leqslant \psi(n)\limsup\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)}:t\to 0+\} \tag{4.2}$$

соответственно.

Доказательство. Не уменьшая общности, докажем неравенство (4.1) для коэффициентов Фурье $a_n(\cdot)$, $n\in\mathbb{N}$. Пусть f — произвольная функция из класса $H_2^{\omega_\gamma}(\Phi)$. Поскольку

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}(f(x)-S_{n-1}(f,x))\cos nx dx,$$

где $S_{n-1}(f)$ — частная сумма ряда Фурье функции f порядка n–1, то используя неравенство Буняковского–Шварца и соотношение (3.1), получаем

$$|a_n(f)|\leqslant\|f-S_{n-1}(f)\|=E_{n-1}(f). \tag{4.3}$$

Используя следствие 1 и формулу (4.3), запишем оценку сверху

$$\sup\{|a_n(f)|:f\in H_2^{\omega_\gamma}(\Phi)\}\leqslant E_{n-1}(H_2^{\omega_\gamma}(\Phi))$$

$$\leqslant \limsup\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : t \to 0+\}. \tag{4.4}$$

Для получения оценки снизу рассматриваемой экстремальной характеристики покажем, что функция $f_0(x) := \widetilde{\rho}\cos(nx)$, где

$$\widetilde{\rho} := \inf\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : 0 < t \leqslant t_*/n\}$$

принадлежит классу $H_2^{\omega_\gamma}(\Phi)$. Для этого, как и в пункте 3, рассмотрим два случая. Пусть сперва $0 < \tau \leqslant t_*/n$. Тогда в силу (1.2) имеем

$$\omega_\gamma(f_0,\tau) = \widetilde{\rho}\ \sup\{\sqrt{\gamma(nh)} : 0 < h \leqslant \tau\}$$
$$\leqslant \sqrt{\gamma(n\tau)}\ \inf\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : 0 < t \leqslant t_*/n\}\ .$$

Полагая в правой части данного соотношения $t := \tau$, получаем

$$\omega_\gamma(f_0,\tau) \leqslant \Phi(\tau).$$

Если же $t_*/n \leqslant \tau \leqslant t_*$, то

$$\omega_\gamma(f_0,\tau) \leqslant \sqrt{\gamma(t_*)}\ \inf\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : 0 < t \leqslant t_*/n\} \leqslant \Phi(t_*/n) \leqslant \Phi(\tau).$$

Следовательно, $f_0 \in H_2^{\omega_\gamma}(\Phi)$. Тогда

$$\begin{aligned}\sup\{|a_n(f)| : f \in H_2^{\omega_\gamma}(\Phi)\} \geqslant |a_n(f_0)| = \widetilde{\rho}\\ = \inf\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : 0 < t \leqslant t_*/n\}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Неравенство (4.1) следует из соотношений (4.4) и (4.5).

Покажем справедливость двойного неравенства (4.2), рассмотрев для этого, не уменьшая общности, коэффициенты Фурье $b_n(\cdot)$, $n \in \mathbb{N}$. По аналогии с доказательством первой части данной теоремы получаем оценку сверху

$$\sup\{|b_n(f)| : f \in W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\Phi)\} \leqslant E_{n-1}(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\Phi))$$
$$\leqslant \psi(n)\limsup\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : t \to 0+\}, \tag{4.6}$$

используя для этой цели формулу (3.3).

Для нахождения оценки снизу экстремальной характеристики, расположенной в левой части соотношения (4.6), рассмотрим функцию $f_1(x) := \rho\sin(nx)$, где величина ρ определяется формулой (3.10). Очевидно, что функция f_1 принадлежит шару $\widetilde{B}_{2n+1}$, рассмотренному в ходе доказательства теоремы 1, а значит f_1 также принадлежит и классу $W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\Phi)$. Следовательно,

$$\sup\{|b_n(f)| : f \in W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\Phi)\} \geqslant |b_n(f_1)| = \rho$$
$$= \psi(n)\limsup\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : t \to 0+\}. \tag{4.7}$$

Требуемое двойное неравенство (4.2) для $b_n(\cdot)$ следует из формул (4.6) и (4.7). Теорема 2 доказана. $\square$

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и имеет место* (3.14). *Тогда справедливы следующие равенства:*

$$\sup\{|a_n(f)| : f \in H_2^{\omega_\gamma}(\Phi)\} = \sup\{|b_n(f)| : f \in H_2^{\omega_\gamma}(\Phi)\}$$
$$= \inf\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : 0 < t \leqslant t_*/n\}, \tag{4.8}$$
$$\sup\{|a_n(f)| : f \in W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma, \Phi)\} = \sup\{|b_n(f)| : f \in W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma, \Phi)\}$$
$$= \psi(n) \inf\{\Phi(t)/\sqrt{\gamma(nt)} : 0 < t \leqslant t_*/n\}. \tag{4.9}$$

5. Некоторые примеры конкретизации полученных результатов

Проанализируем полученные нами результаты, предварительно отметив, что их целесообразно рассматривать как своеобразное обобщение и распространение результатов Ю. И. Григоряна [4] из частной ситуации, когда $\gamma := \gamma_{1,1}(x) = 2(1 - \cos x)$; $p_m(\cdot)$ есть колмогоровский m-поперечник $d_m(\cdot)$; классом функций является множество H^ω, где ω — обычный модуль непрерывности первого порядка в L_2, т.е. $\omega := \omega_1 = \omega_{\gamma_{1,1}}$, на случай классов (ψ, β)-дифференцируемых функций, определенных при помощи обобщенной характеристики гладкости ω_γ, для которой функция γ принадлежит классу G и удовлетворяет свойству A.

Пусть $\gamma := \gamma_{1,\alpha}(x) = 2^\alpha(1 - \cos x)^\alpha$, $\alpha \in (0, \infty)$, т.е. $\omega_{\gamma_{1,\alpha}}$ есть модуль непрерывности ω_α дробного порядка α, а мажоранта $\Phi := \widetilde{\Phi}_\alpha$, где $\widetilde{\Phi}_\alpha(t) := t^\alpha$. Отметим, что $\gamma_{1,\alpha} \in G$, удовлетворяет свойству A и $t_* = \pi$. Несложно проверить, что в данном случае

$$\inf\left\{\frac{1}{n^\alpha \operatorname{sinc}^\alpha(nt/2)} : 0 < t \leqslant \frac{\pi}{n}\right\} = \limsup\left\{\frac{1}{n^\alpha \operatorname{sinc}^\alpha(nt/2)} : t \to 0+\right\}$$
$$= \frac{1}{n^\alpha}.$$

Тогда согласно формулам (3.15), (4.8) и (3.16), (4.9) получаем соответственно

$$p_{2n}(H_2^{\omega_\alpha}(\widetilde{\Phi}_\alpha); L_2) = p_{2n-1}(H_2^{\omega_\alpha}(\widetilde{\Phi}_\alpha); L_2) = E_{n-1}(H_2^{\omega_\alpha}(\widetilde{\Phi}_\alpha)) = \frac{1}{n^\alpha},$$

$$\sup\{|a_n(f)| : f \in H_2^{\omega_\alpha}(\widetilde{\Phi}_\alpha)\} = \sup\{|b_n(f)| : f \in H_2^{\omega_\alpha}(\widetilde{\Phi}_\alpha)\} = \frac{1}{n^\alpha}$$

и

$$p_{2n}(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\alpha, \widetilde{\Phi}_\alpha); L_2) = p_{2n-1}(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\alpha, \widetilde{\Phi}_\alpha); L_2)$$
$$= E_{n-1}(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\alpha, \widetilde{\Phi}_\alpha)) = \frac{\psi(n)}{n^\alpha},$$

$$\sup\{|a_n(f)| : f \in W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\alpha, \widetilde{\Phi}_\alpha)\} = \sup\{|b_n(f)| : f \in W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\alpha, \widetilde{\Phi}_\alpha)\}$$
$$= \frac{\psi(n)}{n^\alpha}.$$

Пусть, например, мажоранта $\widehat{\Phi}_\alpha$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \pi$ совпадает с функцией $\sin^\alpha(t/2)$. В указанном случае равенство (3.14) также имеет место, поскольку

$$\inf\left\{\frac{\mathrm{sinc}^{\,\alpha}(t/2)}{(2n)^\alpha \mathrm{sinc}^{\,\alpha}(nt/2)} : 0 < t \leqslant \pi/n\right\}$$
$$= \limsup\left\{\frac{\mathrm{sinc}^{\,\alpha}(t/2)}{(2n)^\alpha \mathrm{sinc}^{\,\alpha}(nt/2)} : t \to 0+\right\} = \frac{1}{(2n)^\alpha}.$$

Тогда на основании тех же соотношений (3.15), (4.8) и (3.16), (4.9) имеем соответственно

$$p_{2n}(H_2^{\omega_\alpha}(\widehat{\Phi}_\alpha); L_2) = p_{2n-1}(H_2^{\omega_\alpha}(\widehat{\Phi}_\alpha); L_2) = E_{n-1}(H_2^{\omega_\alpha}(\widehat{\Phi}_\alpha)) = \frac{1}{(2n)^\alpha},$$

$$\sup\{|a_n(f)| : f \in H_2^{\omega_\alpha}(\widehat{\Phi}_\alpha)\} = \sup\{|b_n(f)| : f \in H_2^{\omega_\alpha}(\widehat{\Phi}_\alpha)\} = \frac{1}{(2n)^\alpha}$$

и

$$p_{2n}(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\alpha, \widehat{\Phi}_\alpha); L_2) = p_{2n-1}(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\alpha, \widehat{\Phi}_\alpha); L_2)$$
$$= E_{n-1}(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\alpha, \widehat{\Phi}_\alpha)) = \frac{\psi(n)}{(2n)^\alpha},$$

$$\sup\{|a_n(f)| : f \in W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\alpha, \widehat{\Phi}_\alpha)\} = \sup\{|b_n(f)| : f \in W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\alpha, \widehat{\Phi}_\alpha)\}$$
$$= \frac{\psi(n)}{(2n)^\alpha}.$$

Далее полагаем, что $\gamma := \gamma_{2,k}(x) = (1 - \mathrm{sinc}\,(x))^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, т.е. $\omega_{\gamma_{2,k}}$ является обобщенным модулем непрерывности k-го порядка $\widetilde{\omega}_k$, определенным при помощи функции В.А.Стеклова (см., например, [1, 12–15]), а мажоранта $\Phi := \overline{\Phi}_k$, где $\overline{\Phi}_k(t) := t^{2k}$. Поскольку и в данной ситуации равенство (3.14) также выполняется, т.е.

$$\inf\left\{\frac{t^{2k}}{(1 - \mathrm{sinc}\,(nt))^k} : 0 < t \leqslant t_*/n\right\}$$
$$= \limsup\left\{\frac{t^{2k}}{(1 - \mathrm{sinc}\,(nt))^k} : t \to 0+\right\} = \left(\frac{6}{n^2}\right)^k,$$

где константа $t_* \in (4,49; 4,51)$, то в силу указанных выше соотношений получаем соответственно

$$p_{2n}(H_2^{\widetilde{\omega}_k}(\overline{\Phi}_k); L_2) = p_{2n-1}(H_2^{\widetilde{\omega}_k}(\overline{\Phi}_k); L_2) = E_{n-1}(H_2^{\widetilde{\omega}_k}(\overline{\Phi}_k)) = \left(\frac{6}{n^2}\right)^k,$$

$$\sup\{|a_n(f)| : f \in H_2^{\widetilde{\omega}_k}(\overline{\Phi}_k)\} = \sup\{|b_n(f)| : f \in H_2^{\widetilde{\omega}_k}(\overline{\Phi}_k)\} = \left(\frac{6}{n^2}\right)^k$$

и

$$\begin{aligned} p_{2n}(W^{\psi}_{\beta,2}(\widetilde{\omega}_k, \overline{\Phi}_k); L_2) &= p_{2n-1}(W^{\psi}_{\beta,2}(\widetilde{\omega}_k, \overline{\Phi}_k); L_2) \\ &= E_{n-1}(W^{\psi}_{\beta,2}(\widetilde{\omega}_k, \overline{\Phi}_k)) = \psi(n)\left(\frac{6}{n^2}\right)^k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup\{|a_n(f)| : f \in W^{\psi}_{\beta,2}(\widetilde{\omega}_k, \overline{\Phi}_k)\} &= \sup\{|b_n(f)| : f \in W^{\psi}_{\beta,2}(\widetilde{\omega}_k, \overline{\Phi}_k)\} \\ &= \psi(n)\left(\frac{6}{n^2}\right)^k. \end{aligned}$$

В заключение отметим, что подход, предложенный в работах [1–3] к исследованию некоторых экстремальных задач теории аппроксимации функций в пространстве L_2, оказался плодотворным и позволил получить в рассматриваемом здесь случае ряд новых содержательных результатов (3.3), (3.15), (3.16), (4.1), (4.2), (4.8) и (4.9), конкретизация которых в данном пункте смогла, по нашему мнению, продемонстрировать его определенные преимущества перед ранее используемыми рассуждениями.

Литература

[1] С. Б. Вакарчук, *Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n-поперечников классов (ψ, β)-дифференцируемых функций в L_2. I* // Укр. мат. журн., **68** (2016), No. 6, 723–745.

[2] С. Б. Вакарчук, *Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n-поперечников классов (ψ, β)-дифференцируемых функций в L_2. II* // Укр. мат. журн., **68** (2016), No. 8, 1021–1036.

[3] С. Б. Вакарчук, *Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n-поперечников классов (ψ, β)-дифференцируемых функций в L_2. III* // Укр. мат. журн., **68** (2016), No. 10, 1299–1313.

[4] Ю. И. Григорян, *Поперечники некоторых множеств в функциональных пространствах* // Успехи мат. наук, **30** (1975), No. 3, 161–162.

[5] Л. В. Тайков, *Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности из L_2* // Мат. заметки, **22** (1976), No. 3, 433–438.

[6] Л. В. Тайков, *Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2* // Мат. заметки, **25** (1979), No. 2, 217–223.

[7] В. В. Шалаев, *О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков* // Укр. мат. журн., **43** (1991), No. 1, 125–129.

[8] С. Б. Вакарчук, *О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников* // Мат. заметки, **70** (2001), No. 3, 334–345.

[9] С. Б. Вакарчук, А. Н. Шитов, *Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций* // Укр. мат. журн., **56** (2004), No. 1, 1458–1466.

[10] С. Б. Вакарчук, *Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2* // Мат. заметки, **80** (2006), No. 1, 11–19.

[11] М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов, *Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников* // Мат. заметки, **90** (2011), No. 5, 761–772.

[12] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, *Точное неравенство типа Джексона - Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов* // Мат. заметки, **86** (2009), No. 3, 328–336.

[13] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, *Неравенства типа Джексона - Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2* // Мат. заметки, **92** (2012), No. 4, 497–514.

[14] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, *О наилучшем полиномиальном приближении в пространстве L_2 и поперечники некоторых классов функций* // Укр. мат. журн., **64** (2012), No. 8, 1025–1032.

[15] С. Б. Вакарчук, *Обобщенные характеристики гладкости в неравенствах типа Джексона и поперечники классов функций в L_2* // Мат. заметки, **98** (2015), No. 4, 511–529.

[16] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, *Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций* // Мат. заметки, **99** (2016), No 2, 215–238.

[17] А. И. Степанец, *Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **50** (1986), No. 1, 101–136.

[18] А. И. Степанец *Методы теории приближений. В 2-х ч. Ч. 1.*, К., Ин-т математики НАН Украины, 2002, 426 с.

Сведения об авторах

Сергей Борисович Вакарчук
Университет имени Альфреда Нобеля
Днепр, Украина
E-Mail: `sbvakarchuk@gmail.com`