Український математичний вісник
Том 14 **(2017)**, № 4, 472 – 480

К задаче об экстремальном разбиении комплексной плоскости

Ирина В. Денега, Богдан А. Клищук

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. В данной работе изучается одна из классических проблем геометрической теории функций комплексного переменного о максимуме функционала

$$[r(B_0,0)\,r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k),$$

где $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ – система точек, такая что $|a_k| = 1$, $a_0 = 0$, B_0, B_∞, $\{B_k\}_{k=1}^n$ – совокупность взаимно неналегающих областей, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $r(B,a)$ – внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$. В работе рассматривается эта задача при некоторых более слабых ограничениях на взаимное неналегание областей.

2010 MSC. 30C75.

Ключевые слова и фразы. Внутренний радиус области, непересекающиеся области, лучевые системы точек, разделяющее преобразование, квадратичный дифференциал, функция Грина.

В настоящее время задачи об экстремальном разбиении комплексной плоскости занимают значительное место в геометрической теории функций комплексного переменного и имеют богатую историю. Впервые экстремальные разбиения рассматривались при получении оценок произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей. Эта тематика восходит к статье М. А. Лаврентьева 1934 года [1] и впоследствии развивалась в работах многих авторов (см., например [2–12]). Следует отметить, что важным элементом исследования экстремальных задач являются результаты теории квадратичных дифференциалов, описывающие локальную и глобальную структуру их траекторий [2].

Статья поступила в редакцию 26.12.2017

ISSN 1810 – 3200.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множества натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ – расширенная комплексная плоскость или сфера Римана, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Пусть

$$r(B,a) = \begin{cases} \exp(\lim\limits_{z \to a}(g_B(z,a) + \log|z-a|)), & a \neq \infty \\ \exp(\lim\limits_{z \to a}(g_B(z,a) - \log|z|)), & a = \infty \end{cases}$$

– внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$, где $g_B(z,a)$ – обобщенная функция Грина области B.

Систему точек $A_n := \{a_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1,n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ назовем n-лучевой, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$ и

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < ... < \arg a_n < 2\pi.$$

Введем обозначения

$$P_k = P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}, \quad a_{n+1} := a_1,$$

$$\alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k},\ \alpha_k > 0,\ \alpha_{n+1} := \alpha_1,\ k = \overline{1,n},\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2. \qquad (1)$$

Пусть D – открытое множество в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащее лучевую систему точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$. Если $a \in D$, то обозначим через $D(a)$ связную компоненту D, содержащую точку a; $D_k(a_p)$ – связную компоненту множества $D(a_p) \cap \overline{P_k(A_n)}$, содержащую точку a_p, $p \in \{k, k+1\}$, $k = \overline{1,n}$; $D_k(0)$ – связную компоненту множества $D(0) \cap \overline{P_k(A_n)}$, содержащую точку $w = 0$; $D_k(\infty)$ – связную компоненту множества $D(\infty) \cap \overline{P_k(A_n)}$, содержащую бесконечно удаленную точку.

Внутренним радиусом $r\,(D, a_k)$ открытого множества D относительно точки a называется внутренний радиус связной компоненты множества D, содержащей точку a.

Пусть открытое множество D содержит точки $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$ и произвольную n-лучевую систему точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, тогда будем говорить, что такое множество удовлетворяет условию неналегания относительно системы точек A_n, если множества $D_k(a_k)$, $D_k(a_{k+1})$, $D_k(0)$ и $D_k(\infty)$ попарно не пересекаются для каждого $k = \overline{1,n}$.

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^n$, B_∞, B_0 – произвольный набор областей таких, что $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$. Пусть $\widetilde{D} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k \cup B_0 \cup B_\infty$. Будем говорить, что система B_∞, B_0, $\{B_k\}_{k=1}^n$ удовлетворяет условию частичного налегания относительно некоторой системы A_n, если открытое множество $\widetilde{D}$ удовлетворяет условию неналегания относительно этой же n-лучевой системы точек A_n.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу.

Задача. При всех значениях параметра $\gamma \in \mathbb{R}^+$ найти максимум функционала

$$J_n(\gamma) = [r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k), \tag{2}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ – n-лучевая система точек такая, что $|a_k| = 1$, $a_0 = 0$, B_0, B_∞, $\{B_k\}_{k=1}^n$ – совокупность областей, удовлетворяющих условию частичного налегания относительно системы A_n, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, и описать все экстремали.

При $\gamma = \frac{1}{2}$ и $n \geqslant 2$ оценка для функционала (2) для системы неналегающих областей которые расположены на единичной окружности была найдена в работе [3, с. 59]. Этот результат был усилен в работе [9, с. 267]. Некоторые частные случаи сформулированной выше задачи были также рассмотрены в работах [5, 6].

В данной работе мы рассматриваем выше сформулированную задачу при определенных ограничениях на величины α_k, $k = \overline{1, n}$. Пусть $y_0 \approx 0,884414$ – корень уравнения

$$\ln \frac{y^2}{1 - y^2} = \frac{1}{y^2}. \tag{3}$$

Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n)$, $\gamma_n = \frac{1}{4} y_0^2 n^2$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $|a_k| = 1$, $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{\gamma}$, где y_0 – корень уравнения (3), $k = \overline{1, n}$ и любого набора областей B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, удовлетворяющего условию частичного налегания относительно лучевой системы A_n, справедливо неравенство*

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{2\gamma}{n}}}{\left|1 - \frac{4\gamma}{n^2}\right|^{\frac{2\gamma}{n} + \frac{n}{2}}} \left|\frac{n - 2\sqrt{\gamma}}{n + 2\sqrt{\gamma}}\right|^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{4}$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда точки 0, ∞, a_k и области B_0, B_∞, B_k, $k = \overline{1, n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2 - 2\gamma) w^n + \gamma}{w^2 (w^n - 1)^2}\, dw^2. \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим открытое множество

$$\widetilde{D} = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \cup B_0 \cup B_\infty.$$

Очевидно, что $r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r\left(\widetilde{D}, a_k\right) = r\left(\widetilde{D}(a_k), a_k\right)$. Отсюда

$$[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)$$

$$\leqslant \left[r\left(\widetilde{D}, 0\right) r\left(\widetilde{D}, \infty\right)\right]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\left(\widetilde{D}, a_k\right).$$

Пусть $\zeta = \pi_k(w)$ обозначает ту однозначную ветвь многозначной аналитической функции $-i\left(e^{-i\arg a_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k=\overline{1,n}$, которая осуществляет однолистное и конформное отображение $\overline{P}_k$ на правую полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$. Рассмотрим систему функций

$$\zeta = \pi_k(w) = -i\left(e^{-i\arg a_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k=\overline{1,n}.$$

Пусть $\Omega_k^{(1)}$, $k=\overline{1,n}$, обозначает область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_k \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_k)$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. В свою очередь, через $\Omega_k^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$, обозначаем область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_{k+1})$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси, $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Кроме того, $\Omega_k^{(0)}$ будет обозначать область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\zeta = 0$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. Аналогично, $\Omega_k^{(\infty)}$ будет обозначать область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_\infty \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\zeta = \infty$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. Ясно, что $\pi_k(a_k) := -i$, $\pi_k(a_{k+1}) := i$, $k=\overline{1,n}$. Из определения функций π_k вытекает, что

$$|\pi_k(w) + i| \sim \frac{1}{\alpha_k}|w - a_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) - i| \sim \frac{1}{\alpha_k}|w - a_{k+1}|, \quad w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k},$$
$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to \infty, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Используя соответствующие результаты для разделяющего преобразования [3, 7], имеем неравенства

$$r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left[\alpha_k r\left(\Omega_k^{(1)}, -i\right) \cdot \alpha_{k-1} r\left(\Omega_{k-1}^{(2)}, i\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

$$r\left(B_\infty, \infty\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(\infty)}, \infty\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Условия реализации знака равенства в неравенствах (6)–(8) описаны в работе [7, с. 29]. На основании этих соотношений получаем неравенство

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)$$
$$\times \left\{\prod_{k=1}^{n} \left(r\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) r\left(\Omega_k^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\gamma\alpha_k^2} r\left(\Omega_k^{(1)}, -i\right) r\left(\Omega_k^{(2)}, i\right)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Знак равенства в последнем неравенстве достигается тогда, когда реализуется знак равенства в неравенствах (6)–(8) при всех $k = \overline{1, n}$. Далее, из последнего соотношения на основании теоремы 4.1.1 [8], следствия 4.1.3 [8] и инвариантности функционала

$$\left(\frac{r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_3, a_3\right)}{|a_1 - a_3|^2}\right)^{\gamma} \left(\frac{r\left(B_2, a_2\right) r\left(B_4, a_4\right)}{|a_2 - a_4|^2}\right),$$

имеем

$$J_n(\gamma) \leqslant 2^n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \tag{9}$$
$$\times \prod_{k=1}^{n} \left\{\left(r\left(\widetilde{\Omega}_k^{(0)}, 0\right) r\left(\widetilde{\Omega}_k^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\gamma\alpha_k^2} \frac{r\left(\widetilde{\Omega}_k^{(1)}, -i\right) r\left(\widetilde{\Omega}_k^{(2)}, i\right)}{|(-i) - i|^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где области $\widetilde{\Omega}_k^{(0)}$, $\widetilde{\Omega}_k^{(\infty)}$, $\widetilde{\Omega}_k^{(1)}$, $\widetilde{\Omega}_k^{(2)}$ и точки 0, ∞, $-i$, i, есть, соответственно, круговые области и полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{z^4 + 2\left(1 - \frac{2}{\gamma\alpha_k^2}\right) z^2 + 1}{z^2(z^2+1)^2}\, dz^2.$$

Каждое выражение, стоящее в фигурных скобках последнего неравенства, является значением функционала

$$K_\tau = \left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^{\tau^2} \cdot \frac{r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_2, a_2\right)}{|a_1 - a_2|^2}$$

на системе неналегающих областей $\{\widetilde{\Omega}_k^{(0)}, \widetilde{\Omega}_k^{(1)}, \widetilde{\Omega}_k^{(2)}, \widetilde{\Omega}_k^{(\infty)}\}$ и соответствующей системе точек $\{0, -i, i, \infty\}$ $(k = \overline{1, n})$. На основании леммы 4.1.2. [8], получаем оценку

$$K_\tau \leqslant \Phi(\tau), \quad \tau \geqslant 0,$$

где $\Phi(\tau) = \tau^{2\tau^2} \cdot |1 - \tau|^{-(1-\tau)^2} \cdot (1 + \tau)^{-(1+\tau)^2}$. Тогда

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n \left[\prod_{k=1}^{n} \left(\tau_k^{2\tau_k^2+2} \cdot |1 - \tau_k|^{-(1-\tau_k)^2} \cdot (1 + \tau_k)^{-(1+\tau_k)^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

где $\tau_k = \alpha_k \sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}$. Пусть

$$S(x) = x^{2x^2+2} \cdot |1 - x|^{-(1-x)^2} \cdot (1 + x)^{-(1+x)^2} \quad \text{и} \quad \Psi(x) = \ln(S(x)).$$

Тогда

$$\Psi'(x) = 4x \ln(x) - 2(x - 1) \ln|x - 1| - 2(x + 1) \ln(x + 1) + \frac{2}{x},$$

$$\Psi''(x) = 2 \ln \frac{x^2}{|x - 1|(x + 1)} - \frac{2}{x^2}.$$

Функция $\Psi(x)$ при $x \geqslant 0$ имеет единственную точку перегиба $y_0 \approx 0,884414$. Таким образом, получаем, что $S(x)$ – логарифмически выпуклая функция на промежутке $[0, y_0]$. Так как $x_k \in (0, y_0]$, $k = \overline{1, n}$, тогда имеет место соотношение

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln S\left(x_k\right) \leqslant \ln S\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n}\right).$$

Это равносильно тому, что

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} S\left(x_k\right)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \ln\left(S\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right).$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда

$$\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_n = \frac{2\sqrt{\gamma}}{n},$$

то есть когда $\alpha_k = \frac{2}{n}$, $k = \overline{1, n}$. В этом случае из (9) следует, что

$$J_n(\gamma) \leqslant J_n^0(\gamma)$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n \left[\left(r\left(D_0, 0\right) r\left(D_\infty, \infty\right)\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}} \cdot \frac{r\left(D_1, -i\right) r\left(D_2, i\right)}{\left|(-i) - i\right|^2}\right]^{\frac{n}{2}},$$

где D_0, D_∞, D_1, D_2, – круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{\frac{4\gamma}{n^2} z^4 + 2\left(\frac{4\gamma}{n^2} - 2\right) z^2 + \frac{4\gamma}{n^2}}{z^2(z^2+1)^2}\, dz^2. \tag{10}$$

Отсюда окончательно имеем

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n \left[S\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{n}{2}}.$$

Используя конкретное выражение для $S\,(x)$, получаем основное неравенство теоремы 1. Осуществляя в (10) замену переменной по формуле $z = -iw^{\frac{n}{2}}$, получаем квадратичный дифференциал (5). Знак равенства в неравенстве (4) проверяется непосредственно. Теорема 1 доказана. □

Из теоремы 1 для точек расположенных на единичной окружности и взаимно неналегающих областей, получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n)$, $\gamma_n \approx 0,195547n^2$. *Тогда для любых различных точек* a_k, $k = \overline{1, n}$, *единичной окружности* $|w| = 1$ *таких, что* $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{\gamma}$, *где* α_k, $k = \overline{1, n}$, *определяются равенствами* (1), $y_0 \approx 0,884414$, *и любого набора взаимно неналегающих областей* B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, *справедливо неравенство* (4). *Знак равенства в котором достигается при выполнении условий теоремы 1.*

Поскольку в работах [3, с. 59], [9, с. 267] для $n = 2$ было получено, что $\gamma_2 = 0,5$, то приведем следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть* $n = 2$, $\gamma \in (0, \gamma_2)$, $\gamma_2 \approx 0,782188$. *Тогда для любых различных точек* a_1 *и* a_2 *единичной окружности* $|w| = 1$ *таких, что* $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{\gamma}$, *где* α_k, $k \in \{1, 2\}$, *определяются равенствами*

(1), $y_0 \approx 0,884414$, *и любого набора взаимно неналегающих областей* B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k \in \{1,2\}$, *справедливо неравенство*

$$[r(B_0,0)\, r(B_\infty,\infty)]^\gamma\, r(B_1,a_1)\, r(B_2,a_2)$$

$$\leqslant [r(\Lambda_0,0)\, r(\Lambda_\infty,\infty)]^\gamma\, r(\Lambda_1,\lambda_1)\, r(\Lambda_2,\lambda_2),$$

где области Λ_0, Λ_∞, Λ_1, Λ_2, *и точки* 0, ∞, λ_1, λ_2, *есть круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^4 + (4-2\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2}\, dw^2.$$

Авторы выражают благодарность рецензенту статьи за очень внимательное прочтение работы и сделанные замечания.

Литература

[1] М. А. Лаврентьев, *К теории конформных отображений* // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР., **5** (1934), 159–245.

[2] Дж. А. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, М., Издательство иностр. лит., 1962.

[3] В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении* // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР., **168** (1988), 48–66.

[4] Г. В. Кузьмина, *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы* // Зап. научн. семин. ПОМИ., **276**, (2001), 253–275.

[5] А. К. Бахтин, И. В. Денега, *Некоторые оценки функционалов для N-лучевых систем точек* // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, **8** (2011), No. 1, 12–21.

[6] И. В. Денега, *Некоторые неравенства для внутренних радиусов частино неналегающих областей* // Доп. НАН України, (2012), No. 5, 19–22.

[7] В. Н. Дубинин, *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук., **49** (1994), No. 1 (295), 3–76.

[8] А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе* // Праці ін-ту мат-ки НАН Укр., 2008.

[9] V. N. Dubinin, *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*, Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.

[10] A. K. Bakhtin, I. V. Denega, *Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane* // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations, **62** (2012), No. 2, 83–92.

[11] I. V. Denega, Ya. V. Zabolotnii, *Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane* // Complex Variables and Elliptic Equations, **62** (2017), No. 11, 1611–1618.

[12] A. Bakhtin, L. Vygivska, I. Denega, *N-radial systems of points and problems for non-overlapping domains* // Lobachevskii Journal of Mathematics, **38** (2017), No. 2, 229–235.

Сведения об авторах

Ирина Викторовна Денега — Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
E-Mail: iradenega@gmail.com

Богдан Анатольевич Клищук — Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
E-Mail: kban1988@gmail.com