Український математичний вісник
Том 15 **(2018)**, № 2, 220 – 236

Диференціально-символьний метод побудови квазіполіномних розв'язків двоточкової задачі для рівняння із частинними похідними

Зіновій М. Нитребич, Володимир С. Ільків, Петро Я. Пукач, Оксана М. Маланчук

(*Представлена І. І. Скрипніком*)

Анотація. Досліджено розв'язність задачі з локальними неоднорідними двоточковими умовами за часом для однорідного диференціального рівняння другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними у випадку, коли множина нулів характеристичного визначника задачі не є порожньою та не збігається з $\mathbb{C}^s$. Доведено існування розв'язку задачі за умови, що праві частини двоточкових умов є квазіполіномами. Запропоновано диференціально-символьний метод побудови розв'язку задачі.

2010 MSC. 35G15.

Ключові слова та фрази. Квазіполіномні розв'язки, диференціально-символьний метод, характеристичний визначник задачі, двоточкові умови.

1. Вступ

Чимало фізичних, демографічних, медико-біологічних, економічних та інших процесів можна описати моделями з багатоточковими умовами за часом для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними. Задачі з такими часовими умовами мають просту інтерпретацію спостережень процесу у різні моменти часу. Наприклад, двоточкова задача

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \; x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{1.1}$$

$$U(0, x) = \varphi_1(x), \; U(h, x) = \varphi_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{1.2}$$

ISSN 1810 – 3200.

описує процес коливання безмежної мембрани, коли у два моменти часу $t = 0$ та $t = h > 0$ задано її профілі. На відміну від задачі Коші для рівняння (1.1) з нульовими початковими умовами

$$U(0, x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0, x) = 0,$$

яка має лише тривіальний розв'язок, двоточкова задача для рівняння (1.1) з нульовими двоточковими умовами

$$U(0, x) = U(h, x) = 0 \tag{1.3}$$

має нетривіальні розв'язки, наприклад, такого вигляду

$$U(t, x) = x_2 \Big\{ \sin \frac{\pi(x_1 + t)}{h} - \sin \frac{\pi(x_1 - t)}{h} \Big\}. \tag{1.4}$$

Зауважимо, що початкові умови – це умови, коли в один момент часу задаються одночасно $U(0, x)$ та $\frac{\partial U}{\partial t}(0, x)$. Якщо ж для коливного процесу буде задаватись профіль мембрани в один момент часу, а швидкість зміни її профілю в інший часовий момент (хоч і дуже близький), то одержуємо задачу для рівняння (1.1) з двоточковими умовами вигляду

$$U(0, x) = \varphi_0(x), \ \frac{\partial U}{\partial t}(h, x) = \varphi_1(x) \tag{1.5}$$

або

$$U(h, x) = \varphi_0(x), \ \frac{\partial U}{\partial t}(0, x) = \varphi_1(x). \tag{1.6}$$

Двоточкові за часом умови (1.5) та (1.6), очевидно, є частковим випадком умов вигляду

$$\begin{aligned} b_{01}U(0, x) + b_{02}\frac{\partial U}{\partial t}(0, x) = \varphi_0(x), \\ b_{11}U(h, x) + b_{12}\frac{\partial U}{\partial t}(h, x) = \varphi_1(x), \end{aligned} \tag{1.7}$$

де $b_{01}, b_{02}, b_{11}, b_{12} \in \mathbb{C}$. Умови (1.5) одержуються з (1.7) для $b_{01} = 1, b_{02} = 0, b_{11} = 0, b_{12} = 1$, а умови (1.6) для $b_{01} = 0, b_{02} = 1, b_{11} = 1, b_{12} = 0$.

Отож, дослідження розв'язності задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними з багатоточковими умовами за часом є актуальним як для побудови загальної теорії крайових задач, так і для задач практики.

Відзначимо, що задачі з багатоточковими часовими умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними узагальнюють задачі з n-точковими умовами для звичайних диференціальних рівнянь, які відомі в літературі як задачі Валле-Пуссена [1–3].

Формулювання та перші важливі результати щодо розв'язності n-точкових задач для рівняння із частинними похідними здійснено в праці [4]. Більш загальні результати, що стосуються розв'язності багатоточкових задач в обмежених областях для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними одержано у працях багатьох вчених (див. [5–8] та бібліографію в них). Виділенню класів єдиності розв'язку задач з багатоточковими умовами за часом в необмежених областях присвячені, зокрема, дослідження [9–11].

В останні роки багатоточкові умови за часом в моделюванні процесів значно узагальнюються та набувають нового сенсу. Зокрема, в умовах (1.7) замість сталих b_{01}, b_{02}, b_{11} та b_{12} можуть розглядатися довільні диференціальні поліноми за просторовими змінними. Такого вигляду крайові умови зустрічаються, наприклад, у працях [12, 13].

Зауважимо, що функція (1.4), що є нетривіальним розв'язком однорідної задачі (1.1), (1.3), є квазіполіномом. Чимало робіт вчених [14–16] присвячені побудові саме поліномних та квазіполіномних розв'язків як самих рівнянь із частинними похідними, так і крайових задач для них.

Ця праця продовжує дослідження [17–20] і присвячена узагальненню задачі (1.1), (1.7). Вивчається питання існування розв'язку задачі для рівняння другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з двоточковими умовами (1.7), у яких b_{01}, b_{02}, b_{11}, b_{12} є операторними коефіцієнтами за вектор-змінною $x \in \mathbb{R}^s$. Для побудови розв'язку задачі буде використано диференціально-символьний метод, основи якого запропоновано в [21], а також у працях [22–24] для задач з різними умовами за часовою змінною. Зауважимо, що символьне числення, яке притаманне диференціально-символьному методу, зустрічається також у працях [25, 26].

2. Формулювання задачі

В області змінних $t \in \mathbb{R}$ та $x = (x_1, ..., x_s) \in \mathbb{R}^s$, де $s \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, вивчається задача знаходження розв'язків рівняння із частинними похідними

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)U(t,x) \equiv \Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2a_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial}{\partial t} + a_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big]U(t,x) = 0, \quad (2.1)$$

що задовольняють умови у два моменти часу $t = 0$ та $t = h > 0$

$$l_k U(t,x) \equiv b_{k1}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(kh,x) + b_{k2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(kh,x) = \varphi_k(x),\ k \in \{0,1\}. \tag{2.2}$$

У рівнянні (2.1) $a_1\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)$, $a_2\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)$ – довільні диференціальні вирази скінченного або нескінченного порядку з цілими символами $a_1(\nu)$, $a_2(\nu)$ для $\nu = (\nu_1, ..., \nu_s) \in \mathbb{C}^s$. В умовах (2.2) $b_{01}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b_{02}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b_{11}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b_{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – довільні диференціальні поліноми з комплексними коефіцієнтами, символи яких $b_{01}(\nu)$, $b_{02}(\nu)$, $b_{11}(\nu)$, $b_{12}(\nu)$ для кожного вектор-параметра $\nu \in \mathbb{C}^s$ задовольняють умови

$$|b_{01}(\nu)| + |b_{02}(\nu)| > 0, \quad |b_{11}(\nu)| + |b_{12}(\nu)| > 0.$$

Функції $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ в умовах (2.2) є заданими, причому хоча б одна з них є ненульовою і належить до класу квазіполіномів, який буде введено нижче.

Введемо позначення для просторів квазіполіномів:
— $K_{\mathbb{C},P}$ – це клас квазіполіномів, який містить тривіальний квазіполіном $f(t,x) \equiv 0$, а також нетривіальні квазіполіноми вигляду

$$f(t,x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{N} f_{lj}(t,x)e^{\beta_l t + \alpha_j \cdot x},\ \ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^s,\ \ m, N \in \mathbb{N},$$

де $f_{11}(t,x), \ldots, f_{Nm}(t,x)$ – ненульові поліноми змінних t, x з комплексними коефіцієнтами, $\beta_1, \ldots, \beta_N$ – попарно різні комплексні числа, а попарно різні вектори $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1s})$, …, $\alpha_m = (\alpha_{m1}, \ldots, \alpha_{ms})$ належать до $P \subseteq \mathbb{C}^s$, $\alpha_j \cdot x = \alpha_{j1}x_1 + \cdots + \alpha_{js}x_s$, $j = \overline{1,m}$;
— K_P – це клас квазіполіномів вигляду

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(x)e^{\alpha_j \cdot x}, \quad x \in \mathbb{R}^s,\ m \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

де $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – попарно різні вектори з $P \subseteq \mathbb{C}^s$, а $Q_1(x), \ldots, Q_m(x)$ – ненульові поліноми з комплексними коефіцієнтами, а також тривіальний квазіполіном $\varphi(x) \equiv 0$.

У статті [24] доведено існування єдиного розв'язку задачі (2.1), (2.2) у класі $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s\setminus M}$, якщо $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ належать до $K_{\mathbb{C}^s\setminus M}$, де M та $C^s\setminus M$ – непорожні множини, причому

$$M = \{\nu \in \mathbb{C}^s\colon\ \ \Delta(\nu) = 0\}, \tag{2.4}$$

$$\Delta(\nu) = b_{01}(\nu)\Big\{b_{11}(\nu)\,T_1(h,\nu) + b_{12}(\nu)\,\frac{dT_1}{dt}(h,\nu)\Big\}$$
$$- b_{02}(\nu)\Big\{b_{11}(\nu)\,T_0(h,\nu) + b_{12}(\nu)\,\frac{dT_0}{dt}(h,\nu)\Big\},$$

$\{T_0(t,\nu), T_1(t,\nu)\}$ – нормальна фундаментальна в точці $t = 0$ система розв'язків звичайного диференціального рівняння

$$L\Big(\frac{d}{dt},\nu\Big)T(t,\nu) \equiv \Big[\frac{d^2}{dt^2} + 2a_1(\nu)\frac{d}{dt} + a_2(\nu)\Big]T(t,\nu) = 0. \qquad (2.5)$$

Розв'язок задачі (2.1), (2.2) при цьому для $\varphi_0(x)$ і $\varphi_1(x)$ з класу $K_{\mathbb{C}^s\setminus M}$ зображено у вигляді

$$U(t,x) = \sum_{k=0}^{1}\varphi_k\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_{k+2}(t,\nu)\,e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}, \qquad (2.6)$$

де

$$T_2(t,\nu) = e^{-a_1(\nu)(t+h)}\frac{\big(b_{11}(\nu) - a_1(\nu)b_{12}(\nu)\big)S(h-t,\nu) + b_{12}(\nu)C(h-t,\nu)}{\Delta(\nu)},$$

$$T_3(t,\nu) = e^{-a_1(\nu)t}\frac{\big(b_{01}(\nu) - a_1(\nu)b_{02}(\nu)\big)S(t,\nu) - b_{02}(\nu)C(t,\nu)}{\Delta(\nu)},$$

$$S(t,\nu) = \begin{cases} \dfrac{\sinh\big[tD(\nu)\big]}{D(\nu)}, & D(\nu) \neq 0; \\ t, & D(\nu) = 0, \end{cases} \qquad C(t,\nu) = \cosh\big[tD(\nu)\big],$$

$$D(\nu) = \sqrt{a_1^2(\nu) - a_2(\nu)}, \quad O = (0,\ldots,0).$$

Зауваження 2.1. *Функції $T_2(t,\nu)$ та $T_3(t,\nu)$ є розв'язками рівняння (2.5) і для $k, j \in \{0,1\}$ задовольняють умови*

$$l_k\Big\{T_{j+2}(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\} \equiv \Big(b_{k1}(\nu)T_{j+2}(kh,\nu) + b_{k2}(\nu)\frac{dT_{j+2}}{dt}(kh,\nu)\Big)e^{\nu\cdot x}$$
$$= \delta_{kj}e^{\nu\cdot x} = \begin{cases} e^{\nu\cdot x}, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Зауваження 2.2. *Дію квазіполіномних диференціальних виразів у формулі (2.6) розуміємо так: якщо $H(\nu,t,x)$ – деяка функція змінних t, x та вектор-параметра $\nu \in \mathbb{C}^s$ і $\varphi(x)$ – квазіполіном вигляду (2.3), то*

$$\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{H(\nu,t,x)\Big\}\Big|_{\nu=O} = \sum_{j=1}^{m}Q_j\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{H(\nu,t,x)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha_j}.$$

Отже, якщо $\varphi_0(x)$ і $\varphi_1(x)$ належать до $K_{\mathbb{C}^s\setminus M}$, то у формулі (2.6) ми не “попадатимемо” на нулі функції $\Delta(\nu)$.

Ця стаття присвячена випадку, коли праві частини $\varphi_0(x)$ та $\varphi_1(x)$ двоточкових умов (2.2) можуть належати до K_M. Буде доведено, що для цього випадку розв'язок задачі (2.1), (2.2) у класі $K_{\mathbb{C},M}$ існує. Тому буде запропоновано формулу для знаходження одного з розв'язків задачі (2.1), (2.2).

3. Основні результати

Нехай для векторів $r=(r_1,\dots,r_s)$ та $q=(q_1,\dots,q_s)$ з $\mathbb{Z}_+^s$ відношення порядку $r\ge q$ і $r\succ g$ означають, що вектор $r-q$ має невід'ємні компоненти і додатну першу ненульову компоненту відповідно; $r^q=r_1^{q_1}\cdots r_s^{q_s}$, $r!=r_1!\cdots r_s!$, $|r|=r_1+\dots+r_s$; $\xi^{(r)}(\nu)=\dfrac{\partial^{|r|}\xi(\nu)}{\partial\nu_1^{r_1}\cdots\partial\nu_s^{r_s}}$.

Теорема 3.1. *Нехай аналітичні в околі точки $\alpha\in\mathbb{C}^s$ функції $\eta\colon\mathbb{C}^s\to\mathbb{C}$ і $\zeta\colon\mathbb{C}^s\to\mathbb{C}$ мають усі нульові похідні $\eta^{(r)}(\alpha)$, $|r|<p$, і $\zeta^{(q)}(\alpha)$, $|q|<d$, а також існують ненульові похідні $\eta^{(r)}(\alpha)$, $|r|=p$, і $\zeta^{(q)}(\alpha)$, $|q|=d$, які впорядковані так, що $r^*\succ\dots\succ r_*$ та $q^*\succ\dots\succ q_*$. Тоді похідні $\xi^{(\gamma)}(\alpha)$ добутку $\xi(\nu)=\eta(\nu)\zeta(\nu)$ цих функцій є нульовими для $|\gamma|<p+q$, а для $|\gamma|=p+q$ існують ненульові похідні, причому $r^*+q^*\succ\dots\succ r_*+q_*$ і справджуються рівності*

$$\frac{\xi^{(r^*+q^*)}(\alpha)}{(r^*+q^*)!}=\frac{\eta^{(r^*)}(\alpha)}{r^*!}\cdot\frac{\zeta^{(q^*)}(\alpha)}{q^*!},\tag{3.1}$$

$$\frac{\xi^{(r_*+q_*)}(\alpha)}{(r_*+q_*)!}=\frac{\eta^{(r_*)}(\alpha)}{r_*!}\cdot\frac{\zeta^{(q_*)}(\alpha)}{q_*!}.\tag{3.2}$$

Доведення. Оскільки за умовами теореми ряди

$$\eta(\nu)=\sum_{|r|\ge p}\frac{\eta^{(r)}(\alpha)}{r!}(\nu-\alpha)^r,\qquad \zeta(\nu)=\sum_{|q|\ge d}\frac{\zeta^{(q)}(\alpha)}{q!}(\nu-\alpha)^q$$

є збіжними в околі точки α, то перемножуючи почленно отримуємо також збіжний ряд

$$\xi(\nu)=\sum_{|r|\ge p,\ |q|\ge d}\frac{\eta^{(r)}(\alpha)}{r!}\frac{\zeta^{(q)}(\alpha)}{q!}(\nu-\alpha)^{r+q}.$$

Враховуючи, що $\big((\nu-\alpha)^{r+q}\big)^{(\gamma)}\equiv 0$, якщо не виконується умова $r+q\ge\gamma$, продиференціюємо ряд почленно, тоді

$$\xi^{(\gamma)}(\nu)=\sum_{|r|\ge p,\ |q|\ge d}^{r+q\ge\gamma}\frac{(r+q)!}{(r+q-\gamma)!}\frac{\eta^{(r)}(\alpha)}{r!}\frac{\zeta^{(q)}(\alpha)}{q!}(\nu-\alpha)^{r+q-\gamma},$$

зокрема, $\xi^{(\gamma)}(\alpha) = 0$ для $|\gamma| < p + d$.

Якщо $r + q \neq \gamma$, то $(\nu - \alpha)^{r+q-\gamma}\big|_{\nu=\alpha} = 0$ для $r + q \geq \gamma$. Звідси випливає формула

$$\frac{\xi^{(\gamma)}(\alpha)}{\gamma!} = \sum_{|r|=p,\ |q|=d}^{r+q=\gamma} \frac{\eta^{(r)}(\alpha)}{r!}\frac{\zeta^{(q)}(\alpha)}{q!}.$$

Нехай $r = r^*$, $q = q^*$, $\gamma = \gamma^* = r^* + q^*$, тоді $|r^*| = p$, $|q^*| = d$, $|\gamma^*| = p + d$, а рівняння $r + q = \gamma^*$ має лише один розв'язок $(r, q) = (r^*, q^*)$. Звідси випливає формула (3.1), причому $\xi^{(r_* + q_*)}(\alpha) \neq 0$.

Формула (3.2) отримується з формули (3.1) при оберненому впорядкуванні компонент вектора ν (рівняння $r + q = \gamma_* \equiv r_* + q_*$ має також лише один розв'язок $(r, q) = (r_*, q_*)$, де $|r_*| = p$, $|q_*| = d$).

Очевидно, що

$$\begin{aligned}(r^* + q^*) - (r + q) = (r^* - r) + (q^* - q) \succ \cdots \succ (r - r_*) + (q - q_*)\\ = (r + q) - (r_* + q_*)\end{aligned}$$

для довільних пар (r, q), для яких $|r| = p$ і $|q| = d$. Теорему доведено. □

Покладаючи в теоремі 3.1 множники $\eta(\nu)$ та $\zeta(\nu)$ однаковими, тобто $\eta(\nu) = \zeta(\nu) = \Delta(\nu)$, отримуємо такий результат.

Наслідок 3.1. *Нехай аналітична в околі точки $\alpha \in \mathbb{C}^s$ функція $\Delta\colon \mathbb{C}^s \to \mathbb{C}$ має усі нульові похідні $\Delta^{(r)}(\alpha)$, $|r| < p$, а також існують ненульові похідні $\Delta^{(r)}(\alpha)$, $|r| = p$, які впорядковані так, що $r^* \succ \cdots \succ r_*$. Тоді $(\Delta^2)^{(\gamma)}(\alpha) = 0$ для $|\gamma| \leq 2p - 1$, ненульові похідні $(\Delta^2)^{(\gamma)}(\alpha)$, $|\gamma| = 2p$, впорядковуються так, що $2r^* \succ \cdots \succ 2r_*$, причому справджується рівність*

$$(\Delta^2)^{(2r^*)}(\alpha) = \frac{(2r^*)!}{(r^*!)^2}\big[\Delta^{(r*)}(\alpha)\big]^2.$$

Аналогічний результат одержуємо для похідних $(\Delta^n)^{(\gamma)}$ у точці α функції $\Delta^n(\nu)$, де $n \in \mathbb{N}$, причому $(\Delta^n)^{(\gamma)}(\alpha) = 0$ для $|\gamma| \leq np - 1$, а ненульові похідні $(\Delta^n)^{(\gamma)}(\alpha)$, $|\gamma| = np$, впорядковуються так, що $nr^* \succ \cdots \succ nr_*$, і справджується рівність

$$(\Delta^n)^{(nr^*)}(\alpha) = \frac{(nr^*)!}{(r^*!)^n}\big[\Delta^{(r^*)}(\alpha)\big]^n. \tag{3.3}$$

Нехай праві частини умов (2.2) є квазіполіномами з класу K_M, де M – множина (2.4) ($M \neq \varnothing$, $M \neq \mathbb{C}^s$), причому функції $\varphi_0(x)$

та $\varphi_1(x)$ як квазіполіноми з K_M мають такий одночленний (з однією експонентою) вигляд

$$\varphi_k(x) = Q_k(x)e^{\alpha_k \cdot x}, \quad k \in \{0,1\}, \tag{3.4}$$

де $Q_0(x), Q_1(x)$ – поліноми відповідно степенів $n_0 \in \mathbb{Z}_+^s$ та $n_1 \in \mathbb{Z}_+^s$ за сукупністю змінних, а вектори $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \ldots, \alpha_{0s})$ та $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1s})$ належать до множини M, тобто $\Delta(\alpha_0) = 0$ та $\Delta(\alpha_1) = 0$ (зокрема, $\alpha_0 = \alpha_1$).

Згідно з наслідком 3.1 позначимо через $r^* = r_0^*$ та $r^* = r_1^*$ мультиіндекси з $\mathbb{Z}_+^s$ для похідних, які відповідають нулям $\alpha = \alpha_0$ та $\alpha = \alpha_1$ функції $\Delta(\nu)$. Крім цих мультиіндексів, позначимо через q_0 та q_1 ще одні мультиіндекси з $\mathbb{Z}_+^s$:

$$q_0 = (n_0 + 1)r_0^*, \quad q_1 = (n_1 + 1)r_1^*. \tag{3.5}$$

Теорема 3.2. *Нехай в умовах* (2.2) *функції* $\varphi_0(x)$ *та* $\varphi_1(x)$ *є квазіполіномами вигляду* (3.4), *де* $\alpha_0, \alpha_1 \in M$, M *– множина* (2.4), *а мультиіндекси* q_0 *та* q_1 *визначені рівностями* (3.5). *Тоді розв'язок задачі* (2.1), (2.2) *у класі* $K_{\mathbb{C},M}$ *існує і його можна знайти за формулою*

$$U(t,x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{\left(\dfrac{\partial}{\partial\nu}\right)^{q_k} \rho_k(t,x,\nu)}{\left(\dfrac{\partial}{\partial\nu}\right)^{q_k} \left[\Delta^{n_k+1}(\nu)\right]}\Bigg|_{\nu=\alpha_k} = \sum_{k=0}^{1} \frac{\left(\dfrac{\partial}{\partial\nu}\right)^{q_k} \rho_k(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\alpha_k}}{\left(\dfrac{\Delta^{(r_k^*)}(\alpha_k)}{r_k^*\,!}\right)^{n_k+1} q_k\,!}, \tag{3.6}$$

де

$$\rho_k(t,x,\nu) = \Delta^{n_k+1}(\nu) Q_k\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_{k+2}(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}, \quad k \in \{0,1\}. \tag{3.7}$$

Доведення. Насамперед зауважимо. що функції (3.7) для кожного $\nu \in \mathbb{C}^s$ є квазіполіномами і для довільних $t \in \mathbb{R}$ і $x \in \mathbb{R}^s$ є цілими стосовно вектор-параметра $\nu \in \mathbb{C}^s$. Функції $\rho_0(t,x,\nu)$, $\rho_1(t,x,\nu)$, крім того, для кожного $\nu \in \mathbb{C}^s$ задовольняють рівняння (2.1). Дійсно, для $k \in \{0,1\}$ маємо

$$\begin{aligned} L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)\rho_k(t,x,\nu) &= \Delta^{n_k+1}(\nu) L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) Q_k\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_{k+2}(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\} \\ &= \Delta^{n_k+1}(\nu) Q_k\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big) L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big\{T_{k+2}(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\} \\ &= \Delta^{n_k+1}(\nu) Q_k\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{e^{\nu\cdot x} L\Big(\frac{d}{dt}, \nu\Big) T_{k+2}(t,\nu)\Big\} = 0. \end{aligned}$$

У вищенаведеному ланцюжку рівностей використано комутативність операцій $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$ та $\frac{\partial}{\partial \nu}$, зауваження 2.1, а також рівності

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big\{T_{k+2}(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\} = e^{\nu\cdot x} L\Big(\frac{d}{dt}, \nu\Big) T_{k+2}(t,\nu), \ \ k \in \{0,1\},$$

що випливають із такої очевидної рівності

$$A\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)e^{\nu\cdot x} = A(\nu)e^{\nu\cdot x}$$

для довільного диференціального виразу $A(\frac{\partial}{\partial x})$ з цілим символом.

Доведемо тепер, що функція $U(t,x)$ вигляду (3.6) задовольняє умови (2.1). Для $j \in \{0,1\}$ маємо

$$\begin{aligned}
l_j U(t,x) &= \sum_{k=0}^{1} \frac{\Big(\dfrac{\partial}{\partial \nu}\Big)^{q_k} l_j \rho_k(t,x,\nu)}{\Big(\dfrac{\partial}{\partial \nu}\Big)^{q_k}\big[\Delta^{n_k+1}(\nu)\big]}\Bigg|_{\nu=\alpha_k} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \frac{\Big(\dfrac{\partial}{\partial \nu}\Big)^{q_k}\Big[\Delta^{n_k+1}(\nu) Q_k\Big(\dfrac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{l_j\big(T_{k+2}(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\big)\Big\}\Big]}{\Big(\dfrac{\partial}{\partial \nu}\Big)^{q_k}\big[\Delta^{n_k+1}(\nu)\big]}\Bigg|_{\nu=\alpha_k} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \frac{\Big(\dfrac{\partial}{\partial \nu}\Big)^{q_k}\Big[\Delta^{n_k+1}(\nu) Q_k\big(\dfrac{\partial}{\partial \nu}\big)\big\{\delta_{kj}\, e^{\nu\cdot x}\big\}\Big]}{\Big(\dfrac{\partial}{\partial \nu}\Big)^{q_k}\big[\Delta^{n_k+1}(\nu)\big]}\Bigg|_{\nu=\alpha_k} \\
&= \frac{\Big(\dfrac{\partial}{\partial \nu}\Big)^{q_j}\Big[\Delta^{n_j+1}(\nu) Q_j(x) e^{\nu\cdot x}\Big]}{\Big(\dfrac{\partial}{\partial \nu}\Big)^{q_j}\big[\Delta^{n_j+1}(\nu)\big]}\Bigg|_{\nu=\alpha_j} \\
&= Q_j(x)\frac{\sum\limits_{\gamma\le q_j} C_{q_j}^{\gamma}\big(\Delta^{n_j+1}\big)^{(\gamma)}(\alpha_j) x^{q_j-\gamma} e^{\alpha_j\cdot x}}{\big(\Delta^{n_j+1}\big)^{(q_j)}(\alpha_j)} = Q_j(x)e^{\alpha_j\cdot x} = \varphi_j(x).
\end{aligned}$$

В останньому ланцюжку рівностей використано зауваження 2.1, а також властивості мультиіндексів q_0 та q_1 і r_0^* та r_1^* з теореми 3.1.

У зображенні розв'язку (3.6) задачі (2.1), (2.2) використано також формулу (3.3). □

Зауваження 3.1. *Знайдений за теоремою* 3.2 *розв'язок* (3.6) *задачі* (2.1), (2.2) *у класі* $K_{\mathbb{C},M}$ *не є єдиним, оскільки* [17] *у цьому класі існують нетривіальні розв'язки рівняння* (2.1), *що задовольняють однорідні умови*

$$l_k U(t,x) = 0, \quad k \in \{0,1\}.$$

Зауваження 3.2. *У теоремі* 3.2 *встановлено існування розв'язку задачі* (2.1), (2.2) *у класі* $K_{\mathbb{C},M}$, *якщо* $\varphi_0(x)$ *та* $\varphi_1(x)$ *мають одночленний квазіполіномний вигляд* (3.4). *Однак, якщо функції* $\varphi_0(x)$ *та* $\varphi_1(x)$ *мають вигляд* (2.3), *то за теоремою* 3.2 *можна знайти розв'язки задачі* (2.1), (2.2), *що відповідають кожній парі одночленних квазіполіномів і тоді за принципом суперпозиції сума знайдених розв'язків також буде розв'язком задачі* (2.1), (2.2). *Наприклад, якщо* $\varphi_0(x) = \cos x = \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix}$, *а* $\varphi_1(x) = \sin 2x = \frac{1}{2i}e^{2ix} - \frac{1}{2i}e^{-2ix}$, *то розв'язком задачі* (2.1), (2.2) *є сума двох розв'язків рівняння* (2.1) *з такими одночленними правими частинами в умовах* (2.2)*:*

1) $\varphi_0(x) = \dfrac{1}{2}e^{ix}$, $\varphi_1(x) = \dfrac{1}{2i}e^{2ix}$; 2) $\varphi_0(x) = \dfrac{1}{2}e^{-ix}$, $\varphi_1(x) = -\dfrac{1}{2i}e^{-2ix}$.

4. Приклади розв'язування задач

Приклад 4.1. *Знайти розв'язки двоточкової задачі*

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2 U(t,x) = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^3, \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered}\left[2\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + 1\right]U(0,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = e^{x_1 - 3x_2}, \\ U(1,x) = 1 + x_1 + 2x_2 + 3x_3, \ \ x \in \mathbb{R}^3.\end{gathered} \tag{4.2}$$

∇ Для задачі (4.1), (4.2) маємо $a_1(\nu) = \nu_3 - \nu_1\nu_2$, $a_2(\nu) = (\nu_3 - \nu_1\nu_2)^2$, $b_{01}(\nu) = 2\nu_3 - \nu_1\nu_2 + 1$, $b_{02}(\nu) = 1$, $b_{11}(\nu) = 1$, $b_{12}(\nu) = 0$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $h = 1$, $\varphi_0(x) = e^{x_1 - 3x_2}$, $\varphi_1(x) = 1 + x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

Функція $\Delta(\nu)$, множина M, а також функції $T_2(t,\nu)$ та $T_3(t,\nu)$ мають вигляд:

$$\Delta(\nu) = \nu_3 e^{-\nu_3 + \nu_1\nu_2}, \quad M = \{\nu \in \mathbb{C}^3 \colon \ \nu_3 = 0\},$$

$$T_2(t,\nu) = \frac{e^{(\nu_1\nu_2 - \nu_3)t}}{\nu_3}(1-t), \quad T_3(t,\nu) = \frac{e^{(\nu_1\nu_2 - \nu_3)(t-1)}}{\nu_3}\big[(\nu_3 + 1)t - 1\big].$$

Для квазіполінома $\varphi_0(x) = e^{x_1 - 3x_2}$ відповідно до вигляду (2.3) маємо: $\alpha_0 = (1,-3,0) \in M$, $Q_0(x) = 1$, $n_0 = 0$. Тоді $r_0^* = (0,0,1)$ і $q_0 = r_0^* = (0,0,1)$. Аналогічно для функції $\varphi_1(x) = 1 + x_1 + 2x_2 + 3x_3$ маємо: $\alpha_1 = (0,0,0) \in M$, $Q_1(x) = 1 + x_1 + 2x_2 + 3x_3$, $n_1 = 1$. Тоді $r_1^* = (0,0,1)$ і за формулою (3.5) $q_1 = (0,0,2)$.

Запишемо функції $\rho_0(t,x,\nu)$ та $\rho_1(t,x,\nu)$ вигляду (3.7):

$$\begin{aligned}\rho_0(t,x,\nu) &= \Delta(\nu)Q_0\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_2(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\\ &= \Delta(\nu)\Big\{T_2(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\} = (1-t)\,e^{(\nu_1\nu_2-\nu_3)(t+1)+\nu\cdot x},\\ \rho_1(t,x,\nu) &= \Delta^2(\nu)Q_1\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_3(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\\ &= \nu_3^2 e^{2\nu_1\nu_2-2\nu_3}\Big(1+\frac{\partial}{\partial\nu_1}+2\frac{\partial}{\partial\nu_2}+3\frac{\partial}{\partial\nu_3}\Big)\Big\{T_3(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\\ &= \Big(\nu_3(\nu_3 t+t-1)\big\{(t-1)(\nu_2+2\nu_1-3)+x_1+2x_2+3x_3+1\big\}\\ &\quad+3-3t\Big)e^{(\nu_1\nu_2-\nu_3)(t+1)+\nu\cdot x}.\end{aligned}$$

За теоремою 3.2 розв'язок задачі (4.1), (4.2) знаходимо за формулою (3.6):

$$\begin{aligned}U(t,x) &= \frac{\frac{\partial}{\partial\nu_3}\rho_0(t,x,\nu)}{\frac{\partial}{\partial\nu_3}\Delta(\nu)}\Bigg|_{\nu=(1,-3,0)} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial\nu_3^2}\rho_1(t,x,\nu)}{\frac{\partial^2}{\partial\nu_3^2}\big[\Delta^2(\nu)\big]}\Bigg|_{\nu=(0,0,0)}\\ &= (1-t)(x_3-t-1)e^{x_1-3x_2-3t}+t(x_1+2x_2+3x_3-3t+4)\\ &\quad+(t-1)(x_3-t-1)\Big(x_1+2x_2+\frac{3}{2}x_3-\frac{3}{2}t+\frac{11}{2}\Big).\end{aligned}$$

Знайдений розв'язок задачі (4.1), (4.2) згідно із зауваженням 3.1 не є єдиним у класі $K_{\mathbb{C},M}$, оскільки в цьому класі існують нетривіальні розв'язки відповідної однорідної задачі. Одним з таких нетривіальних розв'язків є, зокрема, функція вигляду $U(t,x)=(1-t)e^{2t+2x_1+x_2}$. $\triangle$

Приклад 4.2. *В області $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^2$ знайти розв'язки диференціально-функціонального рівняння*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(t,x_1,x_2)-\Big(1+\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^2U(t,x_1,x_2+2)=0, \tag{4.3}$$

що задовольняють двоточкові умови

$$\begin{aligned}\Big(1+\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)U(0,x)+\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x_1}(0,x) &= 2e^{x_2-x_1},\\ \Big(1+\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)U(h,x)+\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x_1}(h,x) &= e^{x_1}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

∇ Для задачі (4.3), (4.4) маємо $a_1(\nu)=0$, $a_2(\nu)=-(1+\nu_1)^2e^{2\nu_2}$, $b_{01}(\nu)=b_{11}(\nu)=1+\nu_1$, $b_{02}(\nu)=b_{12}(\nu)=\nu_1$, $\nu=(\nu_1,\nu_2)$, $\varphi_0(x)=$

$2e^{x_2-x_1}$, $\varphi_1(x) = e^{x_1}$. Функція $\Delta(\nu)$, множина M, а також функції $T_2(t,\nu)$ та $T_3(t,\nu)$ мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
\Delta(\nu) &= (1+\nu_1)\big[1-\nu_1^2 e^{2\nu_2}\big]e^{-\nu_2}\sinh[(1+\nu_1)e^{\nu_2}h],\\
M &= \{\nu\in\mathbb{C}^s\colon\ \Delta(\nu)=0\},\\
T_2(t,\nu) &= \frac{e^{-\nu_2}\sinh[(1+\nu_1)e^{\nu_2}(h-t)]+\nu_1\cosh[(1+\nu_1)e^{\nu_2}(h-t)]}{\Delta(\nu)},\\
T_3(t,\nu) &= \frac{e^{-\nu_2}\sinh[(1+\nu_1)e^{\nu_2}t]-\nu_1\cosh[(1+\nu_1)e^{\nu_2}t]}{\Delta(\nu)}.
\end{aligned}$$

Для квазіполінома $\varphi_0(x) = 2e^{x_2-x_1}$ відповідно до вигляду (2.3) маємо: $\alpha_0 = (-1,1)\in M$, $Q_0(x) = 2$, $n_0 = 0$. Тоді $r_0^* = (2,0)$ і $q_0 = r_0^* = (2,0)$. Аналогічно для функції $\varphi_1(x) = e^{x_1}$ маємо: $\alpha_1 = (1,0)\in M$, $Q_1(x) = 1$, $n_1 = 0$, тоді $r_1^* = (1,0)$ і $q_1 = (1,0)$.

Запишемо функції $\rho_0(t,x,\nu)$ та $\rho_1(t,x,\nu)$ вигляду (3.7):

$$\begin{aligned}
&\rho_0(t,x,\nu) = \Delta(\nu)Q_0\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\big\{T_2(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\big\}\\
&= 2\Big[e^{-\nu_2}\sinh[(1+\nu_1)e^{\nu_2}(h-t)]+\nu_1\cosh[(1+\nu_1)e^{\nu_2}(h-t)]\Big]e^{\nu\cdot x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_1(t,x,\nu) &= \Delta(\nu)Q_1\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\big\{T_3(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\big\}\\
&= \Big[e^{-\nu_2}\sinh[(1+\nu_1)e^{\nu_2}t]-\nu_1\cosh[(1+\nu_1)e^{\nu_2}t]\Big]e^{\nu\cdot x}.
\end{aligned}$$

За теоремою 3.2 розв'язок задачі (4.3), (4.4) знаходимо за формулою (3.6):

$$\begin{aligned}
U(t,x) &= \frac{\frac{\partial^2}{\partial\nu_1^2}\rho_0(t,x,\nu)}{\frac{\partial^2}{\partial\nu_1^2}\Delta(\nu)}\Bigg|_{\nu=(-1,1)} + \frac{\frac{\partial}{\partial\nu_1}\rho_1(t,x,\nu)}{\frac{\partial}{\partial\nu_1}\Delta(\nu)}\Bigg|_{\nu=(1,0)}\\
&= \frac{-e^2(h-t)^2+2x_1(h-t+1)-x_1^2}{h(1-e^2)}\,e^{x_2-x_1}\\
&\quad+\frac{(x_1-t)\sinh[2t]+(t-1-x_1)\cosh[2t]}{-4\sinh[2h]}\,e^{x_1}.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що знайдений розв'язок задачі (4.3), (4.4) у класі $K_{\mathbb{C},M}$ не є єдиним, оскільки відповідна однорідна задача у вказаному класі квазіполіномів має нетривіальні розв'язки, наприклад, вигляду $U(t,x) = e^{-2t+x_1}$, $U(t,x) = e^{-x_1}\varphi(x_2)$, $U(t,x) = (t+x_1)e^{-x_1}\varphi(x_2)$ (φ – довільна неперервна функція), які в сумі зі знайденим розв'язком також будуть розв'язками задачі (4.3), (4.4). $\triangle$

Зауваження 4.1. *Якщо* $\varphi_0 \in K_{\mathbb{C}^s\setminus M}$, *а* $\varphi_1 \in K_M$ *і має вигляд* (2.3) *для* $k=1$, *то розв'язок задачі* (2.1), (2.2) *у класі* $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s}$ *існує і може бути знайдений за формулою*

$$U(t,x) = \varphi_0\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_2(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O} + \frac{\Big(\dfrac{\partial}{\partial\nu}\Big)^{q_1}\rho_1(t,x,\nu)}{\Big(\dfrac{\partial}{\partial\nu}\Big)^{q_1}\big[\Delta^{n_1+1}(\nu)\big]}\Bigg|_{\nu=\alpha_1}. \quad (4.5)$$

Аналогічно, якщо $\varphi_0 \in K_M$ *і має вигляд* (2.3) *для* $k=0$, *а* $\varphi_1 \in K_{\mathbb{C}^s\setminus M}$, *то розв'язок задачі* (2.1), (2.2) *в класі* $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s}$ *існує і його можна знайти за формулою*

$$U(t,x) = \frac{\Big(\dfrac{\partial}{\partial\nu}\Big)^{q_0}\rho_0(t,x,\nu)}{\Big(\dfrac{\partial}{\partial\nu}\Big)^{q_0}\big[\Delta^{n_0+1}(\nu)\big]}\Bigg|_{\nu=\alpha_0} + \varphi_1\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_3(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}.$$

Приклад 4.3. *Знайти в області* $(t,x) \in \mathbb{R}^3$ *розв'язки* $U = U(t,x)$ *двоточкової задачі*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\frac{\partial U}{\partial t} + \Big(1 - \frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}\Big)U = 0, \quad (4.6)$$

$$\Big(1+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Big)U(0,x)+\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = x_1x_2, \quad \Big(1+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Big)U(1,x)+\frac{\partial U}{\partial t}(1,x) = 0. \quad (4.7)$$

∇ Маємо $a_1(\nu)=1$, $a_2(\nu) = 1-\nu_1^2\nu_2^2$, $b_{01}(\nu) = 1+\nu_1^2$, $b_{02}(\nu) = b_{12}(\nu) = 1$, $b_{02}(\nu) = 1+\nu_2^2$, $s=2$, $h=1$, $\varphi_0(x) = x_1x_2$, $\varphi_1(x) = 0$.

Функція $\Delta(\nu)$, множина M, а також функції $T_2(t,\nu)$ та $T_3(t,\nu)$ мають вигляд:

$$\Delta(\nu) = e^{-1}\big(\nu_1^2-\nu_2^2\big)\cosh[\nu_1\nu_2], \quad M = \big\{(\nu_1,\nu_2)\in\mathbb{C}^2\colon\ \Delta(\nu)=0\big\},$$

$$T_2(t,\nu) = \frac{\frac{\nu_2}{\nu_1}\sinh[\nu_1\nu_2(1-t)] + \cosh[\nu_1\nu_2(1-t)]}{\Delta(\nu)}\, e^{-(t+1)},$$

$$T_3(t,\nu) = \frac{\frac{\nu_1}{\nu_2}\sinh[\nu_1\nu_2 t] - \cosh[\nu_1\nu_2 t]}{\Delta(\nu)}\, e^{-t}.$$

Для квазіполінома $\varphi_0(x) = x_1x_2$ відповідно до вигляду (2.3) $\alpha_0 = (0,0)\in M$, $Q_0(x) = x_1x_2$, $n_0 = 2$. Тоді $r_0^* = (2,0)$ і згідно з формулою (3.5) $q_0 = (6,0)$.

Запишемо функцію $\rho_0(t,x,\nu)$ вигляду (3.7):

$$\rho_0(t,x,\nu) = \Delta^3(\nu) Q_0\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_2(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}$$

$$= \Delta^3(\nu)e^{-t-1}\frac{\partial^2}{\partial\nu_1\partial\nu_2}\left\{\frac{\frac{\nu_2}{\nu_1}\sinh[\nu_1\nu_2(1-t)] + \cosh[\nu_1\nu_2(1-t)]}{\Delta(\nu)}\, e^{\nu\cdot x}\right\}.$$

Відповідно до зауваження 4.1 знайдемо розв'язок задачі (4.6), (4.7) за формулою (4.5):

$$U(t,x) = \frac{\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^{q_0}\rho_0(t,x,\nu)}{\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^{q_0}\big[\Delta^{n_0+1}(\nu)\big]}\Bigg|_{\nu=\alpha_0} = \frac{\Big(\frac{\partial}{\partial\nu_1}\Big)^{6}\rho_0(t,x,\nu)}{\Big(\frac{\partial}{\partial\nu_1}\Big)^{6}\big[\Delta^{3}(\nu)\big]}\Bigg|_{\nu=(0,0)}.$$

Значення похідної $\Big(\frac{\partial}{\partial\nu_1}\Big)^{6}\rho_0(t,x,\nu)$ при $\nu=(0,0)$ завдяки тому, що функція $\rho_0(t,x,\nu)$ за вектор-параметром ν є цілою, обчислимо так:

$$\Big(\frac{\partial}{\partial\nu_1}\Big)^{6}\rho_0(t,x,\nu)\Big|_{\nu=O} = \Big(\frac{\partial}{\partial\nu_1}\Big)^{6}\rho_0(t,x,\nu_1,0)\Big|_{\nu_1=0}.$$

Оскільки

$$\rho_0(t,x,\nu_1,0) = x_2\,\nu_1^3\,e^{-t+\nu_1x_1-3},$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial\nu_1}\Big)^{6}\big[\Delta^3(\nu)\big]\Bigg|_{\nu=(0,0)} = \frac{6\,!}{(2\,!)^3}\big[\Delta^{(2,0)}(0,0)\big]^3 = 720\,e^{-3},$$

то

$$U(t,x) = \frac{\Big(\frac{\partial}{\partial\nu_1}\Big)^{6}\rho_0(t,x,\nu)}{\Big(\frac{\partial}{\partial\nu_1}\Big)^{6}\big[\Delta^{3}(\nu)\big]}\Bigg|_{\nu=(0,0)} = \frac{1}{6}\,x_2\,x_1^3\,e^{-t}. \qquad (4.8)$$

Знайдений розв'язок (4.8) задачі (4.6), (4.7) не є єдиним у класі $K_{\mathbb{C},M}$, оскільки відповідна однорідна задача у цьому класі має нетривіальні розв'язки, наприклад, $U(t,x)=x_1e^{-t}$, $U(t,x)=x_2e^{-t}$, $U(t,x)=x_1x_2e^{-t}$. △

Висновки

Досліджено розв'язність задачі для однорідного диференціального рівняння (2.1) із частинними похідними другого порядку за часовою змінною та скінченного або нескінченного порядку за просторовими змінними з неоднорідними двоточковими умовами за часом (2.2) у випадку, коли множина нулів характеристичного визначника задачі (2.1), (2.2) не є порожньою і не збігається з $\mathbb{C}^s$. Доведено існування розв'язку задачі та вказано формулу (3.6) для його побудови, якщо праві частини двоточкових умов є квазіполіномами. Подано приклади застосування запропонованого диференціально-символьного методу до конкретних двоточкових задач (приклади 4.1, 4.2 та 4.3).

Література

[1] Ch. J. Vallee-Poussin, *Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equations d'ordre n* // Journ. Math. de pura et appl., **9** (1929), No. 8, 125–144.

[2] M. Picone, *Sui valori eccezionali di un parametro do cui dipend un equazione differentiale lineare ordinaria del secondo ordine*, Pisa, 1909.

[3] Я. Д. Тамаркин, *О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды*, Пг., 1917.

[4] Б. Й. Пташник, *Задача типу Валле-Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами* // ДАН УРСР, (1966), No. 10, 1254–1257.

[5] Б. И. Пташник, *Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными*, К.: Наук. думка, 1984.

[6] Б. Й. Пташник, І. Я. Кміть, В. С. Ільків, В. М. Поліщук, *Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними*, К.: Наук. думка, 2002.

[7] Б. Й. Пташник, М. М. Симотюк, *Багатоточкова задача з кратними вузлами для диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами* // Укр. мат. журн., **55** (2003), No. 3, 400–413.

[8] T. Kiguradze, *The Vallee-Poussin problem for higher order nonlinear hyperbolic equations* // Computers and Mathematics with Applications, **59** (2010), Iss. 2, 994-1002.

[9] В. М. Борок, *Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое* // ДАН СССР, **183** (1968), No. 5, 995–998.

[10] В. М. Борок, М. А. Перельман, *О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое* // Известия вузов, Математика, **8** (1973), 29–34.

[11] І. Л. Віленць, *Класи единості розв'язку загальної крайової задачі в шарі для систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних* // ДАН УРСР, Сер. А, **3** (1974), 195–197.

[12] Л. В. Фардигола, *Корректные задачи в слое с дифференциальными операторами в краевом условии* // Укр. матем. журн., **44** (1992), No. 8, 1083–1090.

[13] Л. В. Фардигола, *Нелокальные двухточечные краевые задачи в слое с дифференциальным оператором в краевом условии* // Укр. матем. журн., **47** (1995), No. 8, 1122–1128.

[14] W. K. Hayman, Z. G. Shanidze, *Polynomial solutions of partial differential equations* // Methods and Applications of Analysis, **6** (1999), No. 1, 97–108.

[15] G. N. Hile, A. Stanoyevitch, *Heat polynomial analogous for equations with higher order time derivatives* // J. Math. Anal. Appl., **295** (2004), 595–610.

[16] P. Pedersen, *A basis for polynomial solutions for systems of linear constant coefficient PDE's* // Adv. Math., **117** (1996), 157–163.

[17] O. Malanchuk, Z. Nytrebych, *Homogeneous two-point problem for PDE of the second order in time variable and infinite order in spatial variables* // Open Math., (2017), No. 15, 101–110.

[18] Z. Nytrebych, O. Malanchuk, V. Il'kiv, P. Pukach, *Homogeneous problem with two-point in time conditions for some equations of mathematical physics* // Azerb. J. of Math., **7** (2017), No. 2, 176–191.

[19] Z. Nytrebych, V. Il'kiv, P. Pukach, O. Malanchuk, *On Nontrivial Solutions of Homogeneous Dirichlet Problem for Partial Differential Equations in a Layer* // Krag. J. of Math., **42** (2018), No. 2, 193–207.

[20] Z. Nytrebych, O. Malanchuk, V. Il'kiv, P. Pukach, *On the solvability of two-point in time problem for PDE* // Italian J. of Pure and Appl. Math., (2017), No. 38, 715–726.

[21] П. І. Каленюк, З. М. Нитребич, *Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод*, Львів: Вид-во Нац. ун-ту „Львівська політехніка", 2002.

[22] P. I. Kalenyuk, I. V. Kohut, Z. M. Nytrebych, *Problem with integral condition for partial differential equation of the first order with respect to time* // J. Math. Sci., **181** (2012), Iss. 3, 293–304.

[23] Z. M. Nitrebich, *An operator method of solving the Cauchy problem for a homogeneous system of partial differential equations* // J. Math. Sci., **81** (1996), Iss. 6, 3034–3038.

[24] Z. Nytrebych, O. Malanchuk, *The differential-symbol method of solving the two-point problem with respect to time for a partial differential equation* // J. Math. Sci., **224** (2017), Iss. 4, 541–554.

[25] A. Kampf, D. M. Jackson, A. H. Morales, *New Dirac delta function based methods with applications to perturbative expansions in quantum* // J. Phys. Math. Theor., **47** (2014), No. 41, 415204.

[26] A. Kampf, D. M. Jackson, A. H. Morales, *How to (Parth–) Integrate by Differentiating* // J. Phys.: Conf. Ser., **626** (2015), No. 626012015.

Відомості про авторів

Зіновій Миколайович Нитребич	Національний університет “Львівська політехніка” Львів, Україна *E-Mail:* `znytrebych@gmail.com`
Володимир Степанович Ільків	Національний університет “Львівська політехніка” Львів, Україна *E-Mail:* `iilkiv@i.ua`
Петро Ярославович Пукач	Національний університет “Львівська політехніка” Львів, Україна *E-Mail:* `ppukach@gmail.com`
Оксана Михайлівна Маланчук	Львівський національний медичний університет ім. Д. Галицького Львів, Україна *E-Mail:* `Oksana.Malan@gmail.com`