Український математичний вісник
Том 15 **(2018)**, № 4, 536 – 542

Обыкновенные дифференциальные уравнения со степенными пограничными слоями

Асан С. Омуралиев, Элла Д. Абылаева

(*Представлена Ф. Абдуллаевым*)

Аннотация. Построена регуляризованная асимптотика решения задачи Коши для систем сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, что в таких задачах, наряду с другими погранслоями возникает и степенной пограничный слой.

2010 MSC. 34E10, 34D15.

Ключевые слова и фразы. Сингулярно возмущенные задачи, степенной пограничный слой, параболический пограничный слой, угловой пограничный слой, регуляризованная асимптотика.

1. Введение

Метод регуляризации для сингулярно возмущенных задач С. А. Ломова [1], первоначально был разработан для уравнений порядок которого, при стремлении малого параметра к нулю, не понижается, но приобретает ту или иную особенность [2]. Метод позволяет построить регуляризованную асимптотику решения [1]. Затем этот метод обобщен на различные классы сингулярно возмущенных уравнений в различных постановках, библиографию работ посвященных построению регуляризованных асимптотик и опубликованные в последние годы, можно найти в [3]. Задачи со степенным погранслоем, т.е. задачи, где при стремлении малого параметра к нулю порядок уравнения не понижается, а приобретает ту или иную особенность, с различных позиций изучены в работах [2–6]. В работе [4] построена асимптотика решений краевых и начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром. Там же приводятся примеры задач для уравнений в частных производных, при решении которых возникает явление степенного пограничного

Статья поступила в редакцию 02.10.2018

слоя. Более основательные результаты по степенным пограничным слоям для обыкновенных дифференциальных уравнений содержатся в работе [3], где, методом регуляризации для сингулярно возмущенных задач, построена регуляризованная асимптотика. В работах [5,6] алгебраическим методом изучены сингулярно возмущенные начальные и краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями различных типов и построены асимптотики решения содержащие степенные пограничные слои.

В данной работе, продолжая исследования [4], методом регуляризации для сингулярно возмущенных задач, изучается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром, вырожденные уравнения которых, при стремлении малого параметра к нулю, имеют регулярную особенность.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(\varepsilon+t)u'(t,\varepsilon)=A(t)u(t,\varepsilon)+f(t),\quad t\in(0,1],$$
$$u(t,\varepsilon)\big|_{t=0}=u^0. \tag{2.1}$$

Здесь строится регуляризованная асимптотика решения содержащая степенную погранслойную функцию:

$$\Pi_\varepsilon(t)=\left(\frac{\varepsilon}{t+\varepsilon}\right)^\lambda,\quad \lambda>0. \tag{2.2}$$

где $\varepsilon>0$ – малый параметр, обозначим через $\{b_j(t)\}$ собственные векторы соответствующие собственным значениям $\{\lambda_j\,(t)\}\,,\,j=1,2,...,n$ матрицы простой структуктуры $A\,(t)$ размера $n\times n$. Эта задача решается при следующих предположениях:

1. $\forall t\in[0,1]\quad A(t)\in C^\infty\left([0,1],\mathbb{C}^{n^2}\right),\quad f(t)\in C^\infty\left([0,1]\,,\mathbb{C}^n\right)$
2. $Re\,\lambda_j\,(0)\ <\ 0,\ \lambda_j\,(t)\ \neq\ 0,\quad \lambda_j\,(t)\ \neq\ \lambda_i\,(t)\,,\ \forall t\ \in\ [0,1]\,,\quad i\neq j,\quad i,j=\overline{1,n}.$

3. Регуляризация задачи

Следуя работе [1], введём регуляризирующие переменные

$$\tau_j=\lambda_j(0)ln\left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\equiv\theta_j(t,\varepsilon),\quad j=\overline{1,n},\quad z=ln\left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)$$

и расширенную функцию $\tilde{u}(M,\varepsilon)$, для которой получим регулярную по ε задачу

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u}(M,\varepsilon) \equiv (\varepsilon+t)\partial_t \tilde{u}(M,\varepsilon) + D_\lambda \tilde{u}(M,\varepsilon) - A(t)\tilde{u}(M,\varepsilon)$$

$$+\partial_z \tilde{u}(M,\varepsilon) = f(t), \quad \tilde{u}(M,\varepsilon)\big|_{t=\tau=0} = u^0, \tag{3.1}$$

где

$$D_\lambda \equiv \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(0)\partial_{\tau_j}, \quad M=(t,\tau,z), \quad \tau=(\tau_1,\tau_2,...,\tau_n).$$

Если мы найдем решение $\widetilde{u}(M,\varepsilon)$ расширенной задачи (3.1), то сужение его при $\mu=\theta(t,\varepsilon)$, $\theta(t,\varepsilon)=\big(\theta_1(t,\varepsilon),\theta_2(t,\varepsilon),...,\theta_n(t,\varepsilon),\ln\big(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\big)\big)$, $\mu=(\tau,z)$ будет решением задачи (2.1), ибо

$$\Big(\tilde{L}_\varepsilon \widetilde{u}(M,\varepsilon)\Big)\big|_{\mu=\theta(t,\varepsilon)} \equiv L_\varepsilon u(x,y,t,\varepsilon). \tag{3.2}$$

Решение задачи (3.1) будем определять в виде ряда

$$\widetilde{u}(M,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(M). \tag{3.3}$$

Для коэффициентов этого разложения, на основании задачи (3.1), получим следующие итерационные задачи:

$$T_0 u_0(M) \equiv t\partial_t u_0(M) + \partial_z u_0(M) + D_\lambda u_0(M) - A(t)v_0(t) = f(t), \tag{3.4}$$

$$T_0 u_k(M) = -\partial u_{k-1}(M), \quad u_0(M)|_{t=\tau=z=0} = u^0, \; u_k(M)|_{t=\tau=z=0} = 0.$$

4. Решение итерационных задач

Введем класс функций в котором будут решаться итерационные задачи:

$$U = \Big\{ u_k(M) : u_k(M) = < \upsilon_k(t), b(t) > + < \omega^k(t)\exp\big(\tau\big), b(t) >$$

$$+z < \big[c^k(t) + \Lambda(\gamma^k \upsilon_k(t))\big]\exp(\tau), b(t) >, \; c^k(t), \omega^k(t) \in C^\infty([0,1],\mathbb{C}^{n^2}),$$

$$\upsilon_k(t) \in C^\infty([0,1],\mathbb{C}^n)\},$$

$$< \Lambda(\gamma^k \upsilon_k(t))\exp(\tau), b(t) >= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^k \upsilon_{k,i}(t)\exp(\tau_i) b_i(t),$$

$$< \upsilon_k(t), b(t) >= \sum_{i=1}^{n} \upsilon_{k,i}(t) b_i(t),$$

$$< c^k(t)\exp(\tau), b(t) >= \sum_{i,j=1}^{n} c^k_{i,j}(t)\exp(\tau_j) b_i(t).$$

Займемся решением итерационных задач (3.4). В общем виде итерационные задачи запишем следующим образом:

$$T_0 u(M) = H(M), \quad u(M)\big|_{t=\tau=0} = u^0 \tag{4.1}$$

Theorem 4.1. *Пусть выполнены условия 1)–2) и $H(M) \in U$. Тогда задача* (1.6) *однозначна разрешима в классе функций U.*

Доказательство. Подставим функцию $u^k(M) \in U$ в задачу (1.6) и учитывая, что $H(M) =< h(t)+[P^1(t)+zP^2(t)]\exp(\mu), b(t) >$, положим

$$D^1 \upsilon_k(t) = h(t), \quad h(t) = (h_1(t), h_2(t), ..., h_n(t)),$$

$$D^1 \equiv t[\partial_t + A^T(t)] - \Lambda(t), \quad \Lambda(t) = diag\big(\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_n(t)\big), \tag{4.2}$$

$$D^3\omega^k(t) + c^k(t) + \Lambda(\gamma^k \upsilon_k(t)) = P^1(t), \quad D^3 c^k(t) + \Lambda(\gamma^k D^3 \upsilon_k(t)) = P^2(t),$$

$$D^3 Y \equiv t\big[\partial_t Y + A^T(t) Y\big] + Y\Lambda(0) - \Lambda(t) Y = 0,$$

$$A(t) = (\alpha_{i,j}(t)), \quad \alpha_{i,j}(t) = (b'_i(t), b^*_j(t)),$$

где $b^*_i(t)$ – собственные векторы матрицы сопряженной к $A(t)$.

При выполнении условий 1), 2) первое уравнение из (4.2) имеет единственное решение удовлетворяющее условию $||\upsilon_k(0)|| < \infty$.(см. [2, 3, 7]).

Разрешимость второго и третьего уравнений из (4.2) обеспечиваются выбором $\overline{\overline{\omega^k(t)}}, \overline{c^k(t)}, \overline{\overline{c^k(t)}}$. Здесь и далее через $\overline{c(t)}$, $\overline{\overline{c(t)}}$ обозначаем матрицы соответственно с ненулевыми диагональными и нулевыми диагональными элементами , т.е. $c(t) = (c_{i,j}(t))$, $\overline{c(t)} = c(t) - \overline{\overline{c(t)}}$.

Теорема доказана. □

Используя теорему 4.1 последовательно определим решения итерационных задач. Уравнение (3.4) при $k = 0$ имеет решение из U и его решение представимо в виде

$$u_0(M) =< \upsilon_0(t), b(t) > \tag{4.3}$$

$$+ < \omega^0(t)\exp\big(\tau\big), b(t) > +z < \big[c^0(t) + \Lambda(\gamma^0 \upsilon_0(t))\big]\exp(\tau), b(t) >,$$

если функции $\upsilon_0(t),\ \omega^0(t),\ c^0(t)$ определяются из задач

$$D^1\upsilon_0(t) = f(t), \quad D^3\omega^0(t) + c^0(t) + \Lambda(\gamma^0\upsilon_0(t)) = 0,$$

$$\overline{\overline{\omega^0(t)\Lambda(0) - \Lambda(t)\omega^0(t)}}|_{t=0} = -\overline{\overline{c^0(x,t)}},$$

$$\overline{\omega^0(t)}|_{t=0} = E[u^0 - \upsilon_0(0)], \quad \overline{c^0(t)}|_{t=0} = -\Lambda(\gamma^0\upsilon_0(t))|_{t=0},$$

$$E = diag(1,1,...,1), \ D^3c^0(t) + \Lambda(\gamma^0 D^3\upsilon_0(t)) = 0,$$

$$\overline{\overline{c^0(t)\Lambda(0) - \Lambda(t)c^0(t)}}|_{t=0} = 0, \ \Lambda(\gamma^0 D^3\upsilon_0(t))|_{t=0} = 0, \ \gamma^0 = 0.$$

Из этих задач определим $c^0(t) = 0,\ \overline{\omega^0(t)} \neq 0,\ \upsilon_0(t) \neq 0$.

Далее продолжив этот процесс мы можем найти все коэффициенты частичной суммы разложения (3.3).

Вернемся к исходной задаче (2.1). При ее регуляризации было использовано свойство (2.2), которое является необходимым условием регуляризации [1] задачи (2.1). Оно было использовано при переходе от задачи (2.1) к задаче (3.1). Можно показать, что сужение частичной суммы ряда (3.3)

$$u_{\varepsilon,N}(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k\sum_{i=1}^{n}\left\{\upsilon_{k,i}(t) + \sum_{j=1}^{n}\left[\omega_{i,j}^k(t)\right.\right. \tag{4.4}$$

$$\left.\left. + \ln\left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left(c_{i,j}^k(t) + \gamma_j^k\upsilon_{k,j}(t)\right)\right]\left(\frac{\varepsilon}{t+\varepsilon}\right)^{-\lambda_j(0)}\right\} b_i(t)$$

является формальным асимптотическим решением задачи (2.1).

5. Оценка остаточного члена

Произведем в задаче (3.1) сужение посредством регуляризующих функций, т.е. положим в обеих частях уравнения $\mu = \theta(x,\varepsilon)$. Далее, учитывая тождество (3.2), для остаточного члена

$$R_{\varepsilon,N}(t) \equiv R_{\varepsilon,N}(t,\theta(t,\varepsilon)) = u(t,\varepsilon) - u_{\varepsilon,N}(t,\varepsilon)$$

получим задачу

$$L_\varepsilon R_{\varepsilon,N}(t) = \varepsilon^{N+1}g_N(t,\theta(t,\varepsilon),\varepsilon), \quad R_{\varepsilon,N}(t)|_{t=0} = 0.$$

В силу наших построений и сделанных предположений функция $g_N(t, \theta(t, \varepsilon), \varepsilon)$ равномерно ограничена по ε и непрерывна по t в изучаемой области для любого номера $N = 0, 1, 2, ...$

Theorem 5.1. *Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет место оценка*

$$\|u(t, \varepsilon) - u_{\varepsilon,N}(t, \varepsilon)\| < c\varepsilon^{N+1}$$

$N = 0, 1, 2, \dots$ *т.е. разложение* (3.3) *является асимптотическим решением задачи* (2.1) *при* $\varepsilon \to +0$ *и это разложение единственно в классе* U.

Заключение

Рассмотрения системы обыкновенных дифференциальных уравнений диктуется тем, что наш подход упрощает структуру асимптотического решения чем в [3], а именно, вводя две регуляризующих переменных упрощена структура асимптотического решения. Класс функций (1.27) введенный в [3] содержит полином по степеням $ln(1 + \tau), \tau = \frac{t}{\epsilon}$, тогда так класс функций U введенный нами не содержит такого полинома.

Литература

[1] С. А. Ломов, *Введение в общую теорию сингулярно возмущенных*, Наука, 1981.

[2] С. А. Ломов, *О модельном уравнении Лайтхилла* // Сборник научных трудов, (1964), No. 54, 74–83.

[3] С. А. Ломов, И. С. Ломов, *Основы математической теории пограничного слоя*, МГУ, Москва, 1981.

[4] С. А. Ломов, *Степенной пограничный слой в задачах с сингулярным возмущением* // Изв. АН СССР. Сер. математ., (1966), No. 30(3), 525–572.

[5] Ю. А. Коняев, *Построение точного решения некоторых сингулярно возмущенных задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений со степенным пограничным слоем* // Матем. заметки , (2006), No. 79(6), 950–954.

[6] Ю. А. Коняев, *Сингулярно возмущенные задачи с двойной особенностью* // Матем. заметки , (1997), No. 62(4), 494–501.

[7] В. П. Глушко, *Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения*, Воронеж, 1982.

Сведения об авторах

Асан Сыдыгалиевич Омуралиев
Кыргызско–Турецкий университет "Манас", Бишкек, Кыргызстан
E-Mail: asan.omuraliev@mail.ru

Элла Дайырбековна Абылаева
Кыргызско–Турецкий университет "Манас", Бишкек, Кыргызстан
E-Mail: abylaeva.ella@gmail.com