Український математичний вісник
Том 16 **(2019)**, № 1, 141 – 147

К теории квазиконформных отображений

Владимир А. Зорич

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Статья посвящена памяти профессора Богдана Боярского

Аннотация. В статье обсуждаются открытые вопросы теории квазиконформных отображений, примыкающие к области исследований профессора Боярского, памяти которого посвящён этот выпуск журнала.

1. Введение

Одним из ранних и центральных объектов исследований профессора Боярского было уравнение Бельтрами в разнообразных его проявлениях и применениях. Интерес Богдана Боярского к этой теме, по-видимому, в большой мере был стимулирован Ильёй Несторовичем Векуа. Практически одновременно появились ставшие классикой работы Альфорса [1], Векуа [2] и Боярского [3]. В книге [4] Векуа дал эффективное доказательство теоремы, которую после работы Альфорса и Берса [5] теперь часто называют, хотя и не совсем точно, измеримой теоремой Римана (Measurable Riemann Mapping Theorem). Компактное изложение теоремы с анализом голоморфной зависимости решения от параметра имеется, например, в [6].

Эта теорема, обобщающая классическую теорему Римана о конформном отображении, как известно, играет ключевую аппаратную роль почти во всех вопросах геометрической теории функций (квазиконформные отображения, теория Тайхмюллера, голоморфная динамика, собственно геометрия...).

История повторяется. И теперь, по-видимому, уже под влиянием профессора Боярского, в этот круг вопросов вошёл и тоже пошёл дальше Тадеуш Иванец, работы которого относятся и к уравнению Бельтрами, и к общим вопросам уравнений эллиптического типа, и к многомерным квазиконформным отображениям [7–9].

Статья поступила в редакцию 05.03.2019

ISSN 1810 – 3200.

Ниже я остановлюсь на некоторых вопросах, с которыми мне довелось встретится во время работы над многомерными квазиконформными отображениями, и которые, как мне кажется, пока остаются открытыми.

2. Бельтрами и Лиувилль

Классическая теорема Римана о конформном отображении областей плоскости связана с уравнением Коши–Римана. Тот же вопрос о конформном отображении области поверхности на плоскость (как и вопрос о конформно-евклидовой метрике на поверхности), как известно, приводит к уравнению Бельтрами. Нужное решение существует, что свидетельствует по крайней мере о локальной конформной гибкости (эластичности) двумерных поверхностей.

В высших размерностях ситуация меняется радикально. Например, в евклидовом пространстве, размерности выше двух, нет других конформных отображений, кроме "дробно-линейных" (композиций гомотетий, трансляций и инверсий). Это классическая теорема Лиувилля о конформной жёсткости областей пространства. Причина в том, что, в отличие от системы Коши–Римана, возникающей в двумерном случае, условие конформности отображения в высших размерностях приводит к переопределённой системе уравнений, все решения которой указаны выше.

Но у Лиувилля есть и другая классическая теорема: о постоянстве ограниченных целых функций. Она справедлива не только для голоморфных функций, но и для решений широкого класса уравнений, причём без ограничения на конечную размерность пространства. Например, такая теорема справедлива по отношению к квазиконформным отображениям евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ в себя при $n \geq 2$.

Известные мне доказательства этой теоремы для квазиконформных отображений относятся к любой, но конечной размерности. Каково доказательство в бесконечномерном случае, например, для сепарабельного Гилбертова пространства?

Замечу, что теорема Лиувилля о конформных отображениях областей пространства доказана (практически теми же аргументами) и в бесконечномерном случае [10].

Добавлю в этой связи следующее. Обобщая понятие конформного (квазиконформного) отображения областей римановых многообразий одинаковой размерности, Громов предложил считать конформным (квазиконформным) такое отображение метрических пространств, например, отображение $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad (m \geq n)$, при котором в каждой точке отображаемой области бесконечно малый шар преобразуется в образе в бесконечно малый шар (соответственно, в эллипсоид ограниченного общей константой экцентриситета) [11]. В связи с таким расширением понятий конформности и квазиконформности отображения Громов естественно ставит вопрос о том, какие факты классической теории распространяются и на эти отображения. В частности, верно ли, что если отображение $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ конформно и ограничено, то при $n \geq 2$ оно постоянно?

3. Нелинейные операторы

Для квазиконформных отображений справедлива теорема, связывающая локальную и глобальную обратимость отображения. Эта теорема может быть сформулирована следующим образом:

Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – локально обратимое квазиконформное отображение и $n > 2$, то уравнение $f(x) = y$ имеет и притом единственное решение при любой правой части $y \in \mathbb{R}^n$.

Остаётся открытым вопрос о том *верна ли такая теорема для нелинейных операторов, действующих в банаховом или гильбертовом пространстве бесконечной размерности.*

Независимо от того, насколько могут быть полезны или интересны нелинейные операторы с указанным условием их квазиконформности, сама постановка такого вопроса влечёт за собой ряд естественных вопросов, относящихся уже к теории квазиконформных отображений в конечномерном случае. Напомним следующий.

Радиус инъективности.

Мартио, Риккман и Вяйсала [12] нашли следующее красивое развитие теоремы о глобальном гомеоморфизме, обобщающее заодно на случай квазиконформных отображений близкий результат Джона [13] относящийся к квазиизометриям.

Если отображение $f : B^n \to \mathbb{R}^n$ единичного шара локально гомеоморфно и k-квазиконформно, то при $n > 2$ имеется величина $r = r(k, n)$, зависящая только от коэффициента квазиконформности отображения и размерности пространства, такая что отображение гомеоморфно в шаре $B^n(r) \subset B^n$ радиуса $r(k, n)$.

Величина $r(k, n)$ называется *радиусом инъективности* отображения.

Естественно теперь посмотреть, как зависит эта величина от n. Верно ли, что *существует функция $\rho(k) > 0$, зависящая только от коэффициента квазиконформности отображения, которая может* *служить гарантированным радиусом инъективности в пространстве $\mathbb{R}^n$ любой размерности $n > 2$?*

Теорема о радиусе инъективности, как было сказано, обобщает теорему о глобальном гомеоморфизме. Действительно, если вместо единичного шара брать шар иного радиуса, то шар инъективности отображения, очевидно, изменится пропорционально. В частности, он будет бесконечным, если исходный шар совпадает со всем пространством. Это, правда, доказывает только инъективность отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, но остальное, то есть то, что $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, уже просто.

Заметим, что для квазиизометрических отображений (когда ограничены не только отношения локальных растяжений, но и сами растяжения) существование радиуса инъективности легко доказывается для любого локально обратимого квазиизометрического отображения шара, причём сразу в произвольном банаховом пространстве любой (конечной или бесконечной) размерности. Это теорема Джона.

4. Теорема искажения

Доказательство теоремы Мартио, Риккмана и Вяйсала о радиусе инъективности опирается на экстремальное свойство кольца Тайхмюллера, а также на следующую теорему искажения для квазиконформных отображений.

Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ – гомеоморфное квазиконформное отображение области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geq 2$ в пространство $\mathbb{R}^n$, и пусть B – шар с центром o, содержащийся в области D. Если образ fB шара содержится в образе fD области D вместе с некоторым содержащим fB шаром с центром $f(o)$, то отношение $\max_{x\in\partial B}|f(x)-f(o)|/\min_{x\in\partial B}|f(x)-f(o)|$ ограничено величиной $\varepsilon = \varepsilon(k, n)$, зависящей только от коэффициента квазиконформности отображения и размерности пространства.

(Здесь, как обычно, ∂B – граница области B, то есть в данном случае это граничная сфера S шара B.)

Если мы хотим исследовать поведение радиуса инъективности в зависимости от размерности пространства (и подозреваем существование универсального радиуса, не зависящего от размерности пространства), то, учитывая доказательство теоремы Мартио, Риккман и Вяйсала, данное авторами, естественно исследовать асимптотику по размерности и модуля кольца Тайхмюллера, и величины $\varepsilon(k, n)$, фигурирующей в приведённой теореме искажения.

Асимптотику конформной ёмкости кольца Тайхмюллера найдена [14].

Как и в случае радиуса инъективности, есть основание предполагать существование *универсальной оценки* $\epsilon(k)$ *в теореме искажения, не зависящей от размерности пространства.*

Более того, некоторые общие соображения позволяют даже высказать гипотезу, что *универсальная оценка в теореме искажения реализуется в двумерном случае.*

5. Изотопия

Одним из ключевых элементов теории Тайхмюллера является теорема о существовании экстремального (наименее неконформного) квазиконформного отображения между двумя римановыми поверхностями, и описание такого отображения. Это отображение имеет постоянный коэффициент квазиконформности в любой точке. Исходным базисным элементом теоремы является известная не только Тайхмюллеру лемма Грёча о линейности экстремального квазиконформного отображения между двумя прямоугольниками с соответствием вершин.

Теорема Бельтрами с описанием зависимости нормированного решения (отображения) от параметра, полезна не только в комплексной динамике. Такая теорема позволяет деформировать (изотопировать) отображение в тождественное, причём так, что коэффициент квазиконформности отображения в каждой точке непрерывно и монотонно стремится к единице.

В пространственном случае такая изотопия возможна далеко не всегда. Но, если, например, коэффициент квазиконформности отображения имеет изолированный локальный максимум, то, всё же, отображение можно локально изотопировать так, чтобы общий коэффициент квазиконформности уменьшился. Как показывает теорема Тайхмюллера, в двумерном случае снятие “напряжений” доводится до полного постоянства коэффициента квазиконформности экстремального отображения.

6. Заключительный комментарий

Этот краткий обзор написан на основе статей [14–16], где при необходимости можно найти некоторые подробности, пояснения, а также то, что привело к самой постановке изложенных выше вопросов.

Мы оставили здесь только те из них, которые примыкают к творчеству профессора Боярского, памяти которого посвящён этот выпуск журнала.

Один из следующий выпусков журнала будет посвящён памяти Георгия Дмитриевича Суворова. Там я предполагаю изложить ещё несколько открытых вопросов, которые уже больше связаны с граничным поведением отображений, т. е. с той тематикой, которой много занимался Г. Д. Суворов.

Литература

[1] L. Ahlfors, *Conformality with respect to Riemanian metrics* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I., **206** (1955), 22.

[2] И. Н. Векуа, *Задача приведения к каноническому виду дифференциальных форм эллиптического типа и обобщённая система Коши–Римана* // ДАН СССР, **100** (1955), No. 2, 197–200.

[3] Б. В. Боярский, *Гомеоморфные решения систем Бельтрами* // ДАН СССР, **102** (1955), No. 4, 661–664.

[4] И. Н. Векуа, *Обобщённые аналитические функции*, М., Наука, 1959.

[5] L. Ahlfors, L. Bers, *Riemann's mapping theorem for variable metrics* // Ann. Math., Ser. 2, **72** (1960), No. 2, 385–404.

[6] Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, М., Мир, 1969.

[7] B. Bojarski, T. Iwaniec, *Analytical Foundations of the Theory of Quasiconformal Mappings* // Annales Acad. Sci. Fenn., (1982), 257–324.

[8] T. Iwaniec, G. Martin, *Geometric Functional Theory and Nonlinear Analysis*, Oxford University Press (2001).

[9] T. Iwaniec, G. Martin, *The Beltrami Equation*, Memoirs of the American Mathematical Society 2008.

[10] R. Nevanlinna, *On differentiable mappings* // Princeton Math. Ser. **90** (1984), 4, 571–574.

[11] M. Gromov, https://www.ihes.fr/ gromov/wp-content/uploads /2018/08/problems-sept2014-copy.pdf

[12] O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Topological and metric properties of quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I., Math. **488** (1971), 1–31.

[13] F. John, *On quasi-isimetric mappings, II* // Comm. Pure Appl. Math., **22** (1969), 41–66.

[14] В. А. Зорич, *Несколько замечаний о многомерных квазиконформных отображениях* // Матем. сб., **208** (2017), No. 3, 72–95.

[15] В. А. Зорич, *Квазиконформные отображения и асимптотическая геометрия многообразий* // Успехи матем. наук, **57** (2002), No. 3 (345), 3–28.

[16] В. А. Зорич, *К задаче изотопии квазиконформного отображения* // Труды Математического Института им. В. А. Стеклова, **298** (2017), 139–143.

Сведения об авторах

Владимир Антонович Зорич
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-Mail: `vzor@mccme.ru`