

В.М. РИЛЮК,<sup>1</sup> В.А. НАСТАСЮК<sup>2</sup><sup>1</sup> Одеська державна академія будівництва та архітектури  
(Вул. Дідріхсона, 4, Одеса 65029; e-mail: rvtcom@onu.edu.ua)<sup>2</sup> Південноукраїнський національний педагогічний університет ім. К.Д. Ушинського  
(Вул. Старопортофранківська, 26, Одеса 65020)

## ІОНІЗАЦІЯ АТОМІВ У ПОЛІ СИЛЬНОГО ЛАЗЕРНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ ТА МЕТОД УЯВНОГО ЧАСУ

УДК 535.215.1

*Розглянуто феномен нелінійної релятивістської іонізації, спричиненої потужним лінійно поляризованим полем лазера. За допомогою релятивістської версії методу уявного часу розраховано ймовірність тунелювання електрона, енергія зв'язку якого може бути порядку енергії спокою, крізь потенціальний бар'єр під дією поля сильної електромагнітної хвилі. Окрім експоненційного множника розраховано також кулонівський та передекспоненційний фактори з урахуванням спіну електрона та ймовірності іонізації. Отримано прості аналітичні формули для імпульсних розподілів релятивістських фотоелектронів. Показано, що релятивістські ефекти приводять до появи ненульової (дрейфової) швидкості електрона після виходу з-під бар'єра. На нерелятивістській границі отримано відому експоненту Келдиша, а також формулу Ландау–Ліфшица для іонізації основного стану атома водню.*

*Ключові слова:* релятивістська тунельна та багатотонна іонізація, метод уявного часу, параметр Келдиша.

### 1. Вступ

Дослідженням іонізації атомів та іонів під дією інтенсивного лазерного випромінювання присвячена численна література [1–6]. Теорія цих процесів почалася з класичної роботи Келдиша [7], в якій було показано, що тунельний ефект у змінному електричному полі й багатотонна іонізація атомів є граничними випадками процесу нелінійної фотоіонізації, характер перебігу якого суттєво залежить від значення параметра адіабатності Келдиша  $\gamma$ . Цей параметр визначається відношенням частоти лазерного випромінювання  $\omega$  до частоти тунелювання  $\omega_t$  електрона крізь потенціальний бар'єр:

$$\gamma = \frac{\omega}{\omega_t} = \frac{\sqrt{2m|E_0|\omega}}{eF}, \quad (1)$$

де  $E_0$  – потенціал іонізації атомного рівня,  $F$  – величина амплітуди електромагнітного поля лазера. Тунельна іонізація атомних станів має місце при  $\gamma \ll 1$ , а у разі  $\gamma \gg 1$  процес є багатотонним. У роботах [1–7] використовувалося нерелятивістське наближення, що справедливо

для валентних електронів у всіх атомах від водню до урану. На сьогоднішній день, завдяки успіхам лазерної фізики та технології, суттєво збільшено інтенсивність лазерних імпульсів аж до  $I \sim 10^{22}$  Вт/см<sup>2</sup> [8] і розширено діапазон їхніх параметрів (отримано фемтосекундні й ультракороткі – аттосекундні імпульси [9, 10]). В електромагнітних полях такої інтенсивності пондеромоторна енергія  $E_p = e^2 F^2 / (4m\omega^2)$  електрона, емітованого після іонізації може бути порядку енергії спокою  $mc^2$ . Крім того, настільки інтенсивні лазерні поля з перевищенням атомного поля  $F_H = 5,14 \cdot 10^9$  В/см на кілька порядків, здатні утворювати багатозарядні іони з  $Z \sim 40$ –60, для яких енергія зв'язку основного рівня також порівняна з енергією спокою електрона. На разі підбар'єрний рух електрона в процесі іонізації вже не можна вважати нерелятивістським і потрібна модифікація теорії Келдиша [7, 11–13]. Основними релятивістськими ефектами в кінцевому стані є [14–18]: 1) релятивістський розподіл енергії та 2) зсув кутового розподілу емітованих електронів у напрямку поширення впадного лазерного променя.

Процес релятивістської іонізації у схрещених електричному і магнітному полях розглядався в

[19, 20]. Отримані результати застосовані до іонізації лише в разі дуже потужних лазерних полів, коли параметр  $\varepsilon = eF/\omega mc \gg 1$ . Зі збільшенням частоти  $\omega$  лазерного світла (особливо для чутливого рентгенівського лазера) стають потрібними дуже високі інтенсивності, аби задовольнити цю вимогу. Отже, необхідно взагалити результат [19, 20] на випадок ненульових частот. У цьому дописі маємо на меті з особливої точки зору розглянути ефекти, пов'язані з релятивістськими швидкостями у кінцевих станах, і/або з низько розташованими початковими станами. Ми зосередимось на процесі нелінійної іонізації сильно зв'язаного електрона з енергією зв'язку  $E_b$  порядку енергії спокою. Вимога, яку тут потрібно виконати, є оберненою стосовно випадку чисто класичної іонізації,  $F \ll F_b$ . На додачу маємо ще квазікласичну умову  $\hbar\omega \ll E_b$ . Жодних обмежень на параметр  $\varepsilon$  не накладається. Таким чином, покриваються обидва режими: релятивістське тунелювання та багатифотонна іонізація. Застосуємо релятивістську версію методу "уявного часу" [20, 21]. Як узагальнення квазікласичного ВКБ-наближення на випадок змінних у часі полів, цей метод описує тунельний перехід електрона від зв'язаного стану до континууму за допомогою класичних рівнянь руху, але з уявним часом.

## 2. Релятивістська класична дія та метод уявного часу

Уявна частина урізаної класичної дії  $S_f$ , розрахованої вздовж подібних траєкторій, визначає з експоненціальною точністю ймовірність переходу зі зв'язаного стану з енергією  $E_0$  до континууму:

$$W_0 \propto \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \operatorname{Im} (S_f(t_0) + E_0 t_0) \right\}, \quad (2)$$

де  $E_0 = mc^2 - E_b$ ,  $S_f$  – класична релятивістська дія для електрона із зарядом  $e$ , що рухається в полі плоскої електромагнітної хвилі з векторним потенціалом  $\mathbf{A}(t - x/c)$ . Тут і надалі  $\mathbf{A}$  позначає двовимірний вектор у  $y-z$  площині. Дія може бути знайдена як розв'язок рівняння Гамільтона–Якобі [22]:

$$S_f(\xi; \xi_0) = mc^2 \left\{ \mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{r}}{c} - \alpha \frac{x}{c} - \frac{1 + \alpha^2 + f^2}{2\alpha} (\xi - \xi_0) + \frac{e}{mc^2 \alpha} \mathbf{f} \int_{\xi_0}^{\xi} \mathbf{A} d\xi - \frac{e^2}{2m^2 c^4 \alpha} \int_{\xi_0}^{\xi} \mathbf{A}^2 d\xi \right\}, \quad (3)$$

де  $\alpha$  і  $\mathbf{f} = (a_1, a_2)$  – константи,  $\mathbf{r} = (y, z)$ ;  $\xi_0$  – початкове значення змінної  $\xi = t - x/c$ .

У рамках звичайного методу Гамільтона–Якобі, взявши похідні від дії  $S_f$  по  $a_1$ ,  $a_2$  і  $\alpha$ , та прирівнявши їх до нових сталих  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  і  $\beta_3$ , отримаємо траєкторію електрона під дією хвильового поля. Для поля гармонічної, плоскої, лінійно поляризованої хвилі напруженістю  $\mathbf{E} = F e_y \cos \omega \xi$  рух електрона у лабораторній системі координат задається виразами

$$\begin{aligned} \alpha^2 (t + x/c) - \beta^2 \xi + \frac{2\varepsilon}{\omega} a_1 \cos \omega \xi + \frac{\varepsilon^2}{4\omega} \sin 2\omega \xi &= \beta_3, \\ v_x &= c \frac{f(\xi) - 1}{f(\xi) + 1}, \quad y = \beta_1 + \frac{ca_1}{\alpha} \xi - \frac{c\varepsilon}{\alpha\omega} \cos \omega \xi, \\ v_y &= \frac{2c}{\alpha(1+f(\xi))} [a_1 + \varepsilon \sin \omega \xi], \quad z = \beta_2 + \frac{ca_2}{\alpha} \xi, \\ v_z &= \frac{2c}{\alpha(1+f(\xi))} a_2, \\ f(\xi) &= \frac{\delta^2}{\alpha^2} + \frac{2\varepsilon}{\alpha^2} a_1 \sin \omega \xi + \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \sin^2 \omega \xi, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\beta_1, \beta_2$  і  $\beta_3$  разом із  $a_1, a_2$  і  $\alpha$  мають бути знайдені з початкових умов для положення та швидкості. Надалі введемо позначення  $\beta^2 = 1 + a_1^2 + a_2^2 + \varepsilon^2/2$ ,  $\delta^2 = 1 + a_1^2 + a_2^2$ . Комплексний початковий момент часу  $t_0$  визначається з класичної точки повороту на комплексній напівплощині:

$$E_f(t_0) = mc^2 \left\{ \frac{1 + \alpha^2 + f^2}{2\alpha} - \frac{e}{mc^2 \alpha} \mathbf{f} \mathbf{A}(t_0) + \frac{e^2}{2m^2 c^4 \alpha} \mathbf{A}^2(t_0) \right\} = E_0. \quad (5)$$

Мінімізація уявної частини дії приводить до таких граничних умов [3, 21]:

$$\mathbf{r}(t_0) = 0, \quad \operatorname{Im} \mathbf{r}(t_0) = 0. \quad (6)$$

Перша умова відповідає початку руху електрона під бар'єром у момент часу  $t_0$ , а друга умова означає, що наймовірніша (екстремальна) траєкторія при  $t = 0$  стає дійсною, і надалі описує рух електрона на нескінченність уже в класично дозволеній області.

Шукаючи простих аналітичних результатів, розглянемо випадок лінійно поляризованого лазерного світла. Тоді, мінімізуючи дію, з рівнянь (5) і (6)

отримуємо  $f = 0$ . Надалі виведемо систему нелінійних рівнянь для визначення комплексного початкового часу  $t_0$  і сталої  $\alpha$ :

$$t_0 = i\tau_0 = -\frac{i}{\omega} \operatorname{arcsinh} \left( \eta \sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon_0} \right),$$

$$\alpha^2 = 1 + \frac{1}{2\eta^2} \left[ 1 - \frac{\eta \sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon_0}}{\operatorname{arcsinh} \left( \eta \sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon_0} \right)} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{1 + \eta^2 (1 + \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon_0)} \right] \quad (7)$$

з безрозмірною початковою енергією  $\varepsilon_0 = E_0/mc^2$  та релятивістським адиабатним параметром  $\eta = \varepsilon^{-1} = \omega mc/eF$ . Підставляючи величини  $t_0$  і  $\alpha$  у дію кінцевого стану, отримуємо ймовірність релятивістської квазікласичної іонізації в полі лінійно поляризованого світла лазера. З експоненційною точністю:

$$W_0 \propto \exp \left\{ -\frac{2E_b}{\hbar\omega} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2\gamma^2\alpha} + \frac{mc^2 (1 - \alpha)^2}{E_b 2\alpha} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \times \operatorname{arcsinh} \gamma(\alpha) \right) - \frac{1}{2\gamma^2\alpha} \gamma(\alpha) \sqrt{1 + \gamma^2(\alpha)} \right] \right\}, \quad (8)$$

де  $\alpha$  береться як розв'язок рівняння (7). Тут і надалі  $\gamma = \sqrt{2mE_b\omega/eF}$  – нерелятивістський параметр Келдиша, відповідний до енергії зв'язку  $E_b$  і  $\alpha$ -залежний адиабатний параметр  $\gamma(\alpha) = \eta \sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon_0}$ . Рівняння (8) – найбільш загальний вираз для швидкості іонізації в квазікласичному режимі та для напруженості поля меншої, ніж надбар'єрний поріг. Воно описує обидві, як тунельну, так і багатофотонну іонізацію, і є релятивістським узагальненням відомого результату Келдиша [7].

Розглянемо тепер деякі обмежувальні випадки. Поблизу границі тунельної іонізації  $\eta \ll 1$  поновлюємо статичний результат [19, 20] з частотною поправкою:

$$W_0 \propto \exp \left\{ -\frac{F_s}{F} \Phi \right\},$$

$$\Phi = \frac{2\sqrt{3} (1 - \alpha_0^2)^{3/2}}{\alpha_0} - \frac{3\sqrt{3} (1 - \alpha_0^2)^{5/2}}{5\alpha_0} \eta^2 + O(\eta^4), \quad (9)$$

де  $F_s = m^2 c^3 / e\hbar = 1,32 \cdot 10^{16}$  В/см – поле Швінгера квантової електродинаміки [23] і  $\alpha_0 = (\varepsilon_0 + \sqrt{\varepsilon_0^2 + 8})/4$ . У нерелятивістському режимі,  $\varepsilon_b = E_b/mc^2 \ll 1$ , параметр  $\alpha_0 = 1 - \varepsilon_b/3 + \varepsilon_b^2/27$  та ймовірність нерелятивістської тунельної іонізації,

з першою релятивістською та частотною поправками включно, записується як

$$W_0 \propto \exp \left\{ -\frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m} E_b^{3/2}}{e\hbar F} \left[ 1 - \frac{\gamma^2}{10} - \frac{E_b}{12mc^2} \left( 1 - \frac{13}{30} \gamma^2 \right) \right] \right\}. \quad (10)$$

Тут перші два члени в дужках описують швидкість звичайної нерелятивістської іонізації включно з першою частотною поправкою [15]; наступні два доданки є першою релятивістською поправкою. З (9) випливає, що врахування релятивістських ефектів збільшує швидкість іонізації порівняно з нерелятивістським випадком. Проте, навіть для енергії зв'язку порядку енергії спокою електрона релятивістська поправка під експонентою досить мала. Поблизу “вакуумної” границі  $\varepsilon_0 = -1$  (тобто для рівня, який опустився до границі нижнього континууму, що відповідає критичному зарядові ядра  $Z_{cr} = 173$ ) рівняння (9) переходить у  $W_0 \propto \exp \{ -9F_s/2F(1 - 9\eta^2/40) \}$ . Найбільше відхилення в аргументі експоненти від формули Келдиша сягає 18%. Тут “вакуумну” границю не слід плутати з народженням пар у вакуумі. Відомо, що у плоскій хвилі нелінійні вакуумні явища відсутні [23]. У протилежність до того ми маємо справу з іонізацією атома, який покоїться в лабораторній системі координат. Також зауважимо, що задіяно одночастинкове наближення. Отже, процес виникнення пар залишається поза нашим розглядом.

Перейдемо тепер до багатофотонної границі  $\eta \gg 1$ . Наразі параметр  $\alpha = 1 - \varepsilon_b/2 \ln 2\gamma$  та ймовірність релятивістської іонізації записується як

$$W_0 \propto \exp \left\{ -\frac{2E_b}{\hbar\omega} \left[ \ln 2\gamma - \frac{1}{2} - \frac{E_b}{8mc^2 \ln 2\gamma} \right] \right\}. \quad (11)$$

Як і раніше, перші два члени в дужках відбивають нерелятивістський результат [7]. Релятивістські ефекти, що збільшують ймовірність іонізації, зосереджені в третьому доданку.

Вище було показано, що в релятивістській теорії має місце збільшення швидкості іонізації, як для великих, так і для малих  $\eta$ . Це можна порівняти з результатами Кроуфорда і Райса. У своїх чисельних розрахунках вони також знайшли збільшення швидкості іонізації в полі хвилі, поляризованої по колу для  $\eta \gg 1$ , але при  $\eta \ll 1$  їхні результати показують суттєве зниження ймовірності

іонізації [14]. Для випадку лінійно поляризованого світла було показано [17], що швидкість іонізації гаситься релятивістськими ефектами. Проте, Кроуфорд і Райс досліджували надбар'єрну іонізацію водневого атома в наближенні сильного поля. У протилежність до цього ми проаналізували підбар'єрну іонізацію з сильно зв'язаного електронного рівня, що дає збільшення швидкості іонізації. Це збільшення пов'язане з меншим початковим часом  $t_0$ . Як результат, підбар'єрна комплексна траєкторія стає коротшою і швидкість іонізації збільшується порівняно з нерелятивістською теорією. На рис. 1 показано швидкість релятивістської іонізації (8) та результат розрахунку за нерелятивістською формулою Келдиша залежно від енергії зв'язку  $\varepsilon_b$ . Рис. 1 має розглядатися лише як ілюстрація ефекту збільшення для двох значень параметра  $\eta < 1$  і  $\eta > 1$ , використані при розрахунках частота і параметри інтенсивності експериментаторам досі недоступні.

Перемикання з багатопотонного режиму на тунельний зі збільшенням напруженості поля може бути досліджено поблизу нерелятивістської границі  $\varepsilon_b \ll 1$ . Тут, у першому порядку по  $\varepsilon_b$ , при  $\alpha = 1 - (\varepsilon_b/2\gamma^2)[(\gamma/\operatorname{arcsinh}\gamma)\sqrt{1+\gamma^2} - 1]$  ймовірність іонізації оцінюється як

$$W_0 \propto \exp\left\{-\frac{2E_b}{\hbar\omega}f(\gamma)\right\},$$

$$f(\gamma) = \operatorname{arcsinh}\gamma + \frac{1}{2\gamma^2}\left[\operatorname{arcsinh}\gamma - \gamma\sqrt{1+\gamma^2}\right] - \varepsilon_b \frac{\gamma^4 + \gamma^2 - 2\gamma\sqrt{1+\gamma^2}\operatorname{arcsinh}\gamma + \operatorname{arcsinh}^2\gamma}{8\gamma^4\operatorname{arcsinh}\gamma}. \quad (12)$$

Доданки в  $f(\gamma)$ , які не зникають при  $\varepsilon_b \rightarrow 0$  репрезентують швидкість нерелятивістської квазікласичної іонізації Келдиша [7], а член, пропорційний  $\varepsilon_b$ , є першою релятивістською поправкою до формули Келдиша. Рівняння (12) справедливе в усій області зміни  $\gamma$ , тобто як у багатопотонному режимі  $\gamma > 1$ , так і на тунельній границі  $\gamma < 1$ . Для малого адиабатного параметра  $\gamma \rightarrow 0$  воно збігається з рівнянням (10), у разі великих  $\gamma \rightarrow \infty$  переходить у рівняння (11). Зауважимо, що рівняння (12) дуже акуратно поновлює повну релятивістську формулу (8) для  $E_b < mc^2$ .

Розглянемо тепер зміни в енергетичному спектрі, спричинені релятивістськими ефектами. У нерелятивістській теорії та у разі лінійної поляризації наймовірніше значення електронного ім-

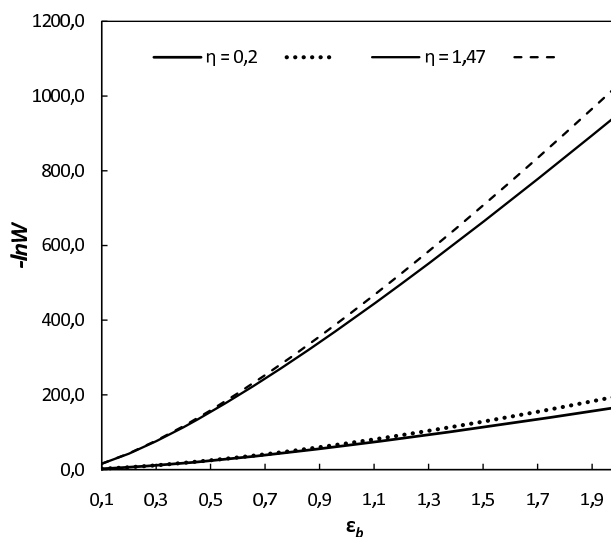


Рис. 1. Абсолютне значення логарифма швидкості іонізації залежно від енергії зв'язку  $\varepsilon_b = E_b/mc^2$ . Суцільна лінія показує релятивістську швидкість (8); пунктирна лінія – нерелятивістська швидкість за Келдишем (формула (12) без релятивістської поправки):  $\omega = 100$ ;  $I = 8,5 \cdot 10^7$  (у а. о.)

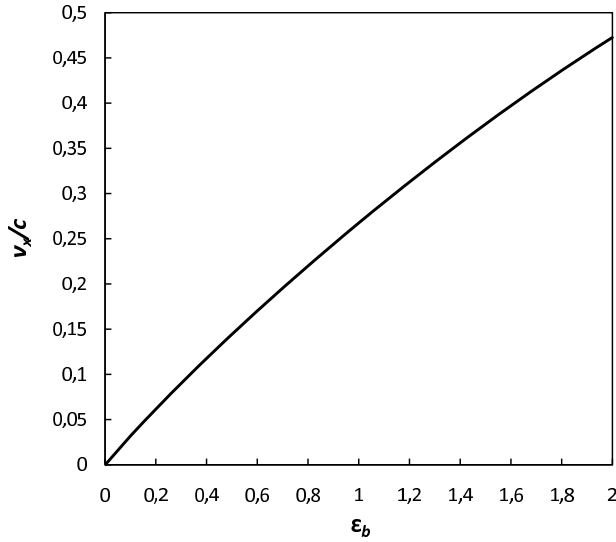
пульсу в момент вильоту,  $t = 0$ , є нуль. Електрони емітуються переважно в напрямку поляризації лазерного променя. У релятивістській теорії, застосованій у цій роботі, ми можемо в рівнянні (4) покласти  $a_1 = a_2 = 0$ . Тоді матимемо для наймовірнішої швидкості вильоту в лабораторній системі координат:

$$v_x = c \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}, \quad v_y = v_z = 0, \quad (13)$$

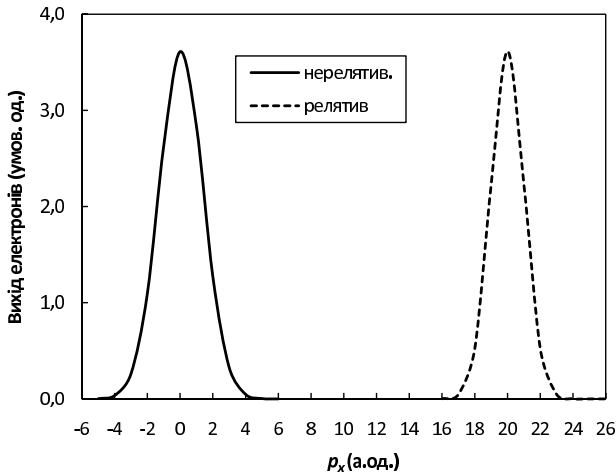
де за  $\alpha$  потрібно взяти розв'язок другого рівняння з (7). На статичній границі  $\omega \rightarrow 0$  поновлюється результат роботи [20].

З цих рівнянь випливає, що сильнозв'язаний електрон емітується вздовж напрямку поширення лазерного променя, тобто перпендикулярно напрямкові поляризації. Для нерелятивістського початкового стану,  $\varepsilon_b \ll 1$ , середня швидкість вильоту  $v_x = c\varepsilon_b/3$  вздовж поширення променя є малою. Тим не менш, вона здається більш чутливою мірою релятивістських ефектів у початковому стані. Залежність  $x$ -компоненти емісійної швидкості  $v_x/c$  від енергії зв'язку початкового рівня показана на рис. 2.

Енергетичний спектр електрона піддається впливу релятивістських ефектів і в кінцевому стані також. Покладемо  $a_1 = p_{y,0}/mc$ ,  $a_2 = p_{z,0}/mc$



**Рис. 2.**  $x$ -компонента емісійної швидкості  $v_x/c$  залежно від енергії зв'язку початкового рівня  $\varepsilon_b = E_b/mc^2$ . Емісійна швидкість у нерелятивістській теорії дорівнює нулю:  $\omega = 100$ ;  $I = 8,5 \cdot 10^7$  (у а. о.)



**Рис. 3.** Спектр проекції імпульсу електронів на напрямок поширення променя за формулою (14). Напруженість поля  $I = 2,5 \cdot 10^{10}$  В/см

і  $\alpha = (-p_{x,0} + \sqrt{1 + p_{x,0}^2 + p_{y,0}^2 + p_{z,0}^2})/mc$  та обмежимо розрахунки тунельним режимом  $\gamma \ll 1$ . Вважаючи релятивістські ефекти в початковому стані слабкими,  $\varepsilon_b \ll 1$  і  $p_{y,0}, p_{z,0} \ll mc$ , можна отримати

$$W_p = W_0 \exp \left\{ -\frac{\gamma}{m\hbar\omega} \left[ (p_{x,0} - \langle p_{x,0} \rangle)^2 + p_{z,0}^2 \right] \right\} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{p_{y,0}^2}{m\hbar\omega} \left( \frac{\gamma^2}{3} + \frac{p_{y,0}^2}{4m^2c^2} \right) \gamma \right\}, \quad (14)$$

де  $W_0$  – повна швидкість іонізації (10) у слабо релятивістському тунельному режимі. У цій формулі перша експонента описує розподіл імпульсу в площині, перпендикулярній осі поляризації. У слабо релятивістському режимі має місце лише один релятивістський ефект: поява середнього імпульсу  $\langle p_{x,0} \rangle = E_b/3c$  в момент вильоту. Ненульова середня швидкість вильоту вздовж вектора поширення порушує симетрію в  $(x, z)$ -площині, що має місце й у нерелятивістській теорії. Перший член у другій експоненті (14) визначає спектр нерелятивістської енергії для низькоенергетичних електронів, які рухаються вздовж осі поляризації, в той час, як другий (релятивістський) член стає важливим для великих енергій  $p_{y,0}^2 > 4\gamma^2 m^2 c^2 / 3$ . Тільки в разі малого адиабатного параметра  $\gamma \leq 1$  умова високих енергій не суперечить умові  $p_{y,0} < mc$ . Зауважимо, що другий член під другою експонентою узгоджується з відповідним доданком у Крайнова [15, 16]. Спектр проекції імпульсу електронів на напрямок поширення променя показано на рис. 3.

### 3. Кулонівська поправка

Досі ми нехтували кулонівською взаємодією вильотного електрона з атомним кістяком, а тому отримані вище формули відносяться до випадку іонізації негативних іонів (типу  $H^-$ ,  $Na^-$  тощо). У разі іонізації нейтральних атомів та позитивних іонів кулонівська взаємодія виниклого електрона з атомним (іонним) залишком має бути взята до уваги. З цією метою застосуємо квазікласичну теорію збурень, аби розрахувати поправку до класичної дії  $\delta S = Z \int_d t/r(t)$ . Проте, оскільки цей інтеграл розходиться при  $r \rightarrow 0$ , використаємо процедуру зшивки з асимптотою хвильової функції вільного атома  $\chi_k(r) \simeq \exp \{ -[(kr) - \eta \ln(kr) + O(1)] \}$  (див. деталі в [13]). Це наближення дає кулонівський фактор  $Q(z_0)$  [3]:

$$Q(z_0) = 2\lambda z_0 \exp \{ J(z_0) \},$$

$$J(z_0) = \int_0^1 \left[ \frac{\gamma z_0}{|r([1-s]z_0)|} - \frac{1}{s} \right] ds \quad (15)$$

у виразі для ймовірності тунельної іонізації  $W$  [20]:

$$W = \omega_b C_{\kappa l}^2 S_{\pm} P_0(\tau_0) Q^{2n^*}(\tau_0) W_0, \quad (16)$$

де  $z_0 = \omega\tau_0$ ,  $\mathbf{r}$  – траєкторія (4) при підбар’єрному русі електрона, відповідна уявному часу (7),  $\omega_b = E_b/\hbar = 0,776(1 - \varepsilon_0) \cdot 10^{21} \text{ c}^{-1}$  – частота, яка відповідає енергії зв’язку рівня, а  $W_0$  визначається формулою (8);  $n^* = Z\tilde{\alpha}\varepsilon_0/\sqrt{1 - \varepsilon_0^2}$  – релятивістський аналог параметра Зоммерфельда ( $Z$  – заряд атомного кістяка,  $\tilde{\alpha} = e^2/\hbar c = 1/137$ ). Параметр  $n^*$ , як правило, близький до одиниці (для атома водню  $n^* = 1$ ). Крім того,  $C_{kl}$  – асимптотичний коефіцієнт в атомній хвильовій функції на нескінченності. Зокрема,  $C_{kl} = 1$  для  $1s$  стану атома водню [12],  $P_0$  і  $S_{\pm}$  – передекспоненційний та спіновий фактори, котрі також можуть бути визначені в рамках методу уявного часу. Збираючи всі множники разом, після досить громіздких розрахунків отримуємо таку формулу для ймовірності іонізації релятивістського  $s$ -рівня в адіабатному наближенні:

$$W = \omega_b C_{kl}^2 E^{3/2-2n^*} S_{\pm} P W_0, \quad (17)$$

де

$$E = (1 + \zeta^2)F/(3\sqrt{3}\zeta^3 F_s);$$

$$S_{\pm} = \exp \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}\zeta}{\sqrt{1 + \zeta^2}} \left( 1 - \frac{\mu}{\mu_B} \right) \right\}; \quad (18)$$

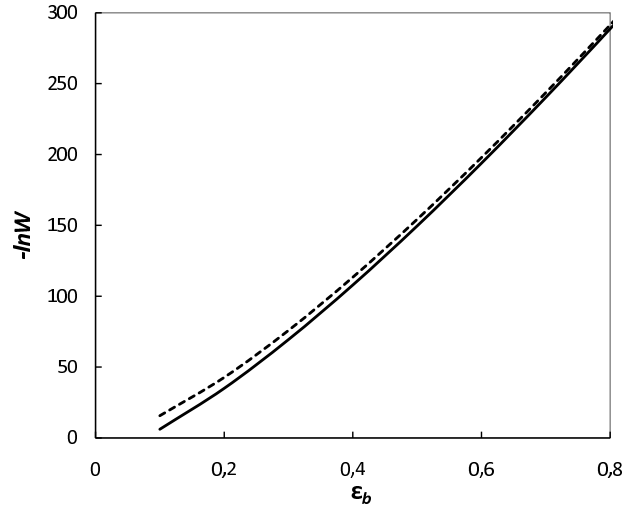
$\pm$  відповідають проекціям спіну  $s_z = \pm\hbar/2$  на напрямок магнітного поля хвилі (припускаємо, що магнітне поле хвилі напрямлене вздовж осі  $z$ ), а тому стани з різними  $s_z$  мають різну швидкість іонізації,

$$\zeta = \left[ 1 + \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \varepsilon_0 - \sqrt{8 + \varepsilon_0^2} \right) \right]^{1/2},$$

і для основного рівня  $1s_{1/2}$  воднеподібного атома із зарядом  $Z = 60$ , маємо [24]  $\mu = 0,933\mu_B$ ,  $\mu_B = e\hbar/2mc$  – магнетон Бора. У (18) враховано поворот спіну в зовнішньому електромагнітному полі, який визначає рівняння Баргмана–Мишеля–Телегді [25], а також розщеплення початкового рівня магнітним полем хвилі. Фактор  $P$  виражається формулою

$$P = \frac{\sqrt{3}(1 + \varepsilon_0)}{\sqrt{\pi(1 - \zeta^4/9)}} \left[ 2 \left( 1 - \frac{\zeta^2}{3} \right) \right]^{2n^*} \times$$

$$\times \exp \left( 6Z\tilde{\alpha} \arcsin \frac{\zeta}{\sqrt{3}} \right). \quad (19)$$



**Рис. 4.** Логаритм ймовірності іонізації за формулою (17) (суцільна лінія) порівняно з келдишевською формулою (12) без релятивістської поправки (пунктирна лінія),  $\eta = 1,47$ . Урахування кулонівської взаємодії збільшує ймовірність іонізації

На нерелятивістській границі з (17) отримуємо відому формулу Ландау–Ліфшица [26]:

$$W_H = 8|E_H| \frac{F_H}{F} \exp \left\{ -\frac{2F_H}{3F} \right\} \quad (20)$$

для ймовірності іонізації основного стану атома водню ( $E_H = 13,6 \text{ eV}$ ). На рис. 4 продемонстровано результат урахування кулонівської взаємодії.

#### 4. Висновки

На основі рівняння Гамільтона–Якобі отримані класична дія й траєкторії релятивістського руху електрона в полі лінійно-поляризованої електромагнітної хвилі. За допомогою методу уявного часу досліджено підбар’єрний рух електрона та отримано прості формули для ймовірності іонізації атомного рівня в полі сильного лазерного випромінювання, енергія якого є порівняною з енергією спокою. Наведені в цій роботі вирази для ймовірності іонізації охоплюють широку область зміни адіабатного параметра Келдиша від багатотонної іонізації аж до тунельного режиму й на нерелятивістській границі збігаються із відомими співвідношеннями інших авторів. Досліджено також імпульсний розподіл вільотних електронів і, зокрема, показано, що в релятивістському

випадку електрон після виходу з-під бар'єра може мати ненульову дрейфову швидкість. А на адіабатній границі врахована кулонівська взаємодія релятивістського електрона з атомним кістяком і його вплив на ймовірність іонізації. На нерелятивістській границі отримано формулу Ландау–Ліфшица для ймовірності іонізації основного стану атома водню. Наведено вираз для спінової релятивістської поправки.

Результати статті можуть бути також використані у фізиці ядра та квантовій хромодинаміці.

1. T.-M. Yan and D. Bauer, *Phys. Rev. A* **86**, 053403 (2012).
2. K. Krajewska, I.I. Fabrikant, and A.F. Starace, *Phys. Rev. A* **86**, 053410 (2012).
3. V.M. Rylyuk, *Phys. Rev. A* **86**, 013402 (2012).
4. H.R. Reiss, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 143003 (2009).
5. С. В. Попруженко, В. Д. Мур, В. С. Попов, Д. Бауэр, *ЖЭТФ* **135**, 1092 (2009).
6. M.V. Frolov, N.L. Manakov, and A.F. Starace, *Phys. Rev. A* **78**, 063418 (2008).
7. Л. В. Келдыш, *ЖЭТФ* **47**, 1945 (1964).
8. S.-W. Bahk, P. Rousseau, T.A. Planchon *et al.*, *Opt. Lett.* **29**, 2837 (2004), *Appl. Phys. B* **80**, 823 (2005); **81**, 727 (2005).
9. S.V. Bulanov, F. Califano, G.I. Dudnikova *et al.*, *Rev. Plasma Phys.* **22**, 227 (2001).
10. T. Tajima and G. Mourou, *Phys. Rev. Spec. Top. – Ac.* **5**, 031301 (2002).
11. А.И. Никишов, В.И. Ритус, *ЖЭТФ* **50**, 255 (1966).
12. А.М. Переломов, В.С. Попов, М.В. Терентьев, *ЖЭТФ* **50**, 1393 (1966); **51**, 309 (1966).
13. А.М. Переломов, В.С. Попов, *ЖЭТФ* **52**, 514 (1967).
14. D.P. Crawford and H.R. Reiss, *Phys. Rev. A* **50**, 1844 (1994).
15. Н.Б. Делоне, В.П. Крайнов, *УФН* **168**, 531 (1998).
16. V.P. Krainov, *Opt. Express* **2**, 268 (1998).
17. D.P. Crawford and H.R. Reiss, *Opt. Express* **2**, 289 (1998).
18. V.P. Krainov, *J. Phys. B* **32**, 1607 (1999).
19. В.С. Попов, В.Д. Мур, Б.М. Карнаков, *Письма в ЖЭТФ* **66**, 213 (1997).
20. В.Д. Мур, Б.М. Карнаков, В.С. Попов, *ЖЭТФ* **114**, 798 (1998).
21. В.С. Попов, В.П. Кузнецов, А.М. Переломов, *ЖЭТФ* **53**, 331 (1967).
22. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория поля* (Физматгиз, Москва, 1973).
23. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951).
24. G. Breit, *Nature* **122**, 649 (1928).
25. В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Квантовая электродинамика* (Физматгиз, Москва, 1989).
26. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика* (Физматгиз, Москва, 1974).

Одержано 12.04.13

*В.М. Рильюк, В.А. Настасюк*

ИОНИЗАЦИЯ АТОМОВ  
В ПОЛЕ СИЛЬНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ  
И МЕТОД МНИМОГО ВРЕМЕНИ

Резюме

На основе уравнения Гамильтона–Якоби исследовано явление релятивистской ионизации в поле сильной электромагнитной волны. Метод мнимого времени, используемый в данной работе, позволил описать релятивистское подбарьерное движение электрона и получить простые формулы для вероятности ионизации, справедливые как для многофотонной ионизации, так и для туннельного режима. Показано, что релятивистский электрон после выхода из-под барьера имеет ненулевую дрейфовую скорость в направлении распространения лазерного луча. Учтены также спиновая релятивистская поправка и кулоновское взаимодействие электрона с атомным остовом и в нерелятивистском пределе получена известная формула Ландау–Лифшица для вероятности ионизации основного состояния атома водорода.

*V.M. Rylyuk, V.A. Nastasyuk*

IONIZATION OF ATOMS  
IN A STRONG LASER RADIATION FIELD  
AND THE IMAGINARY TIME METHOD

Summary

The phenomenon of nonlinear relativistic ionization induced by a strong electromagnetic wave has been considered. The relativistic variant of the imaginary time method was used to calculate the probability for an electron with an energy of the order of its rest energy to tunnel through a potential barrier under the action of a strong electromagnetic wave. Besides the exponential factor, the Coulomb and pre-exponential ones were also obtained taking into account the electron spin and the ionization probability. Simple analytical formulas for the momentum distributions of relativistic photo-electrons were derived. The relativistic effects were shown to result in a non-zero drift velocity of electron when it quits the barrier. In the non-relativistic limit, the well-known Keldysh exponent and the Landau–Lifschitz formula for the ionization probability of hydrogen atom in the ground state were obtained.