С.І. СКУРАТІВСЬКИЙ, І.А. СКУРАТІВСЬКА
Відділення геодинаміки вибуху, Інститут геофізики імені С.І. Субботіна, НАН України
(Вул. Богдана Хмельницького, 63Г, Київ 03143; e-mail: skurserg@gmail.com)

УДК 517.9+532.546

РОЗВ'ЯЗКИ МОДЕЛІ ПРУЖНОГО РЕЖИМУ ФІЛЬТРАЦІЇ РІДИН ТА ГАЗІВ З ДИНАМІЧНИМ ЗАКОНОМ ФІЛЬТРАЦІЇ

У статті розробляється модель фільтрації з узагальненим законом Дарсі, який містить опис нелокальних та нелінійних ефектів. Вигляд такого закону отримано засобами релаксаційного формалізму нерівноважної термодинаміки. В рамках побудованої моделі проаналізовано вплив релаксаційних ефектів на фазову швидкість поширення малих хвильових збурень, встановлено характер нелінійних біжучих хвиль, а також досліджено властивості поліноміальних та автомодельних розв'язків.

Ключові слова: пористе середовище, узагальнений закон Дарсі, інваріантні розв'язки, релаксація.

1. Вступ

Детальний опис процесів фільтрації рідин або газів через пористі матеріали на мікрорівні на сьогоднішній день є проблематичним, навіть враховуючи можливості сучасних комп'ютерних технологій. Тому ці процеси описують в рамках континуального підходу, моделюючи такі системи суцільними середовищами з осередненими характеристиками [1–5].

У рамках механіки суцільного середовища рух слабостисливої рідини або газу у пружнодеформівному пористому середовищі (пружний режим фільтрації) описується законом збереження маси, рівнянням стану рухомої речовини та законом фільтрації. Останній закон виражає зв'язок між швидкістю фільтрації та градієнтом тиску і часто розглядається у лінійному наближенні, відомому як закон Дарсі.

Однак, на сьогодні зібрано значну кількість експериментальних свідчень відхилення від закону Дарсі [5–9], особливо стосовно нерівноважних високоінтенсивних процесів, коли спостерігається підсилення нелокальних ефектів [10, 11].

У цих дослідженнях пропонується узагальнення лінійного закону Дарсі шляхом врахування нелінійності та нерівноважності процесів фільтрації. Зазначимо, що нерівноважність пов'язана з тим, що час встановлення локальної термодинамічної рівноваги у нескінченно малому об'ємі пористого середовища співставний з характерними часовими параметрами системи, а також наявністю неоднорідностей полів (швидкостей, напружень), які характеризуються їх градієнтами [12]. Врахування таких релаксаційних процесів у моделі здійснюється в динамічному рівнянні Дарсі, вигляд якого обґрунтовується в рамках релаксаційного формалізму нерівноважної термодинаміки. Також у роботі аналізуються деякі розв'язки моделі пружного режиму фільтрації з урахуванням динамічного закону фільтрації.

2. Математична модель пружного режиму фільтрації

Коротко нагадаємо початкові положення [2–5] побудови моделі пружного режиму фільтрації. Для опису геометричних середніх характеристик пористого середовища використовується середня пористість $m = V_n/V$, де V_n – об'єм пор, V – загальний об'єм елемента порового середовища.

Зазвичай розрізняють повну та активну пористість. Активна пористість стосується лише тих пор, які входять в єдину мережу сполучених пор і можуть бути ззовні заповнені рідиною. Саме таке тлумаченння пористості використовується в теорії фільтрації.

Тоді закон збереження маси рідини густини ρ_r при фільтрації через пористий елемент має вигляд інтегрального співвідношення $\frac{\partial}{\partial t}\int_V m\rho_r dV = -\int_S \rho_r \mathbf{un} dS$, де S та V – поверхня та об'єм пористого елемента, $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до неї,

$\mathbf{u}$ – швидкість фільтрації. Використовуючи теорему Остроградського–Гауса, можна перейти до диференціальної форми закону у припущенні про довільність елементарного об'єму та неперервність полів:

$$\frac{\partial\left(m\rho\right)}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\mathbf{u} = 0. \qquad (1)$$

Швидкість фільтрації $\mathbf{u}$ слугує основною характеристикою фільтраційного руху. Проекція швидкості на нормаль $\mathbf{n}$ елементарної площадки визначається [5] таким чином: $\mathbf{u}\,\mathbf{n} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta Q}{\rho_r \Delta S}$, де ΔS – площа елементарної площадки, ΔQ – витрата рідини чи газу. Залежність між вектором швидкості фільтрації та полем тиску визначається законом фільтрації, встановлений експериментально у 1856 р. А. Дарсі, та визначається таким виразом:

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu}\nabla p, \qquad (2)$$

де k – проникність, яка не залежить від властивостей рідини, а лише від геометричних характеристик пористого середовища, вимірюється в Дарсі (1Д $= 10^{-12}$ м^2), μ – динамічна в'язкість рідини.

Закон Дарсі виконується в умовах [4, 13] (i) повільного руху рідини, коли інерційними ефектами можна знехтувати, (ii) відсутня передача імпульсу між фазами в умовах обміну масами між ними, (iii) нехтується обмін імпульсом в окремих фазах, який спричинений в'язким зсувом, (iv) гравітаційна сила вважається зовнішньою і прикладена вертикально, (v) в'язкий зсув підкоряється закону Ньютона, (vi) приймаються умови прилипання на поверхнях між рідиною і твердою фазою, (vii) тверда фаза – абсолютно тверде тіло. Зазначимо, що закон Дарсі записано для надлишкового тиску.

Щоб отримати замкнуту систему для опису фільтрації у пористому середовищі, до рівнянь (1), (2) слід приєднати рівняння стану рідини або газу, наприклад, у формі $\rho = \rho\left(p, T = \mathrm{const}\right)$.

Зокрема, одну з найпростіших моделей [5] нестаціонарної фільтрації газу (модель пружного режиму фільтрації) можна отримати, коли припустити, що стисливість рухомої речовини значно перевищує стисливість пористого середовища. Тоді зміною пористості в часі можна знехтувати, що дозволяє замість рівняння (1) отримати рівняння

$$m\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\mathbf{u} = 0. \qquad (3)$$

Враховуючи лінійне рівняння стану $\rho = p\rho_0/p_0$ та закон Дарсі (2), у одновимірному випадку можна отримати рівняння відносно тиску у формі

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{2m\mu}\frac{\partial^2(p^2)}{\partial x^2}.$$

Навіть для такого спрощеного випадку отримане рівняння є нелінійним. Звичайно, у багатьох випадках зроблені вище припущення про рух рідини чи газу виконуються достатньо добре і закону Дарсі у вигляді (2) вистачає для коректного опису характеристик потоку.

3. Узагальнення закону фільтрації Дарсі

Але, як свідчать експериментальні дані, в умовах високих швидкостей фільтрації [2, 8, 14] або навпаки досить малих, коли проявляться аномальні реологічні властивості рідин, спостерігається відхилення від співвідношення (2). Розглянемо найбільш відомі узагальнення закону Дарсі. Перш за все, згадаємо двокомпонентний закон [14]:

$$\nabla p = -\frac{\mu}{k}\mathbf{u} - \beta\frac{\rho u}{\sqrt{k}}\mathbf{u} \equiv f(u)\mathbf{u}, \qquad (4)$$

вперше запропонований Форхгеймером. У той час як відхилення від лінійного закону Дарсі спостерігаються при числах Рейнольдса порядку 0,1–1,0, двокомпонентний закон добре узгоджується з експериментальними даними при числах Рейнольдса порядку 10–100. Також одне із узагальнень рівняння (2) запропонував Brinkman [7, 15] у вигляді

$$\nabla p = -\frac{\mu}{k}\mathbf{u} + \mu'\Delta\mathbf{u},$$

де μ' є ефективною в'язкістю, яка може збігатися з в'язкістю рідини μ або бути навіть меншою. Також набув широкого використання нелінійний закон фільтрації [5, 14] вигляду

$$\mathbf{u} = -f\left(|\nabla p|\right)\nabla p, \qquad (5)$$

де $f\left(x\right)$ – деяка гладка функція.

Для двофазних течій використовується нерівноважна модель Баклея–Леверетта та модель Баренблатта [5].

Дослідження фільтрації в'язкопружних полімерних сумішей, нафти та інших неньютонових рідин показали [14], що релаксаційні ефекти можуть суттєво впливати на характеристики нестаціонарної фільтрації через пористі середовища [9]. Для вивчення впливу ефектів запізнення пропонується модифікувати класичний закон Дарсі в рамках релаксаційного формалізму нерівноважної термодинаміки [10, 11, 16]. Використовуючи операторне представлення для параметра проникності, запишемо динамічний закон Дарсі у такому вигляді:

$$u = -\hat{k}\nabla p, \tag{6}$$

де динамічний коефіцієнт проникності

$$\hat{k} = k^{\infty} + \frac{k^0 - k^{\infty}}{1 + \tau D_t},$$

k^0 та k^{∞} – рівноважний та заморожений коефіцієнти проникності, D_t – оператор диференціювання за часом, τ – час релаксації (відома [17] оцінка $\tau \sim k/(m\nu)$, де ν – кінематична в'язкість рідини).

Виконуючи формальні перетворення співвідношення (6), отримуємо таке узагальнене рівняння Дарсі:

$$\tau \left(u_t + k^{\infty}\left(\nabla p\right)_t\right) = -u - k^0 \nabla p, \tag{7}$$

яке зустрічається, наприклад, в роботах [1, 9, 16].

Аналогічний результат можна отримати іншим шляхом. Зокрема, закон Дарсі запишемо у нелокальному вигляді

$$u = -k^{\infty}\nabla p + \sigma \int\limits_{t_0}^{t} \exp\left[-\frac{t-s}{\tau}\right] \nabla p\left(x,s\right) ds, \tag{8}$$

де σ – параметр.

Диференціюючи вираз (8) та виключаючи інтегральний доданок за допомогою (8), отримуємо

$$\tau \left(u_t + k^{\infty}\left(\nabla p\right)_t\right) = -u - \left(k^{\infty} - \sigma\tau\right)\nabla p.$$

Якщо ввести позначення $k^{\infty} - \sigma\tau = k^0$, то прийдемо до рівняння (7). Вказані перетворення дозволяють визначити параметр σ у рівнянні (8) через величини k^{∞}, k^0, τ, а саме $\sigma = (k^{\infty} - k^0)/\tau$. Особливістю такого динамічного рівняння Дарсі є те, що в умовах повільних фільтраційних процесів модель зводиться до рівняння вигляду $u = -k^0\nabla p$, тоді як при швидких процесах – до $u = -k^{\infty}\nabla p$, тобто в залежності від характерної частоти процесу використовується різна проникність середовища.

Зазначимо, що подібним чином можна отримати новий клас динамічних рівнянь Дарсі, поширивши закон (7) на нелінійний випадок. З аналізу законів фільтрації (4) та (5) випливає, що їх можна записати у формі нелінійного співвідношення $\psi(u) = -k^{\infty} f(\nabla p)$, де ψ та f – нелінійні функції своїх аргументів. Релаксаційні поправки цього закону виберемо у інтегральному вигляді так, як у виразі (8):

$$\tau^{-1} \int\limits_{t_0}^{t} \exp\left\{-\frac{t-s}{\tau}\right\} \left(\varphi - \psi\right) ds + \psi =$$
$$= -k^{\infty} f + \tau^{-1} \int\limits_{t_0}^{t} \exp\left\{-\frac{t-s}{\tau}\right\} \left(k^{\infty} f - k^0 g\right) ds,$$

де φ – функція швидкості, g – функція градієнта тиску. За допомогою диференціювання за часовою змінною t, отримаємо динамічне нелінійне рівняння Дарсі:

$$\tau \left(\psi_t + k^{\infty} f_t\right) = -\varphi - k^0 g.$$

Наприклад, якщо вибрати φ, ψ, f, g у вигляді степеневих функцій, то отримаємо такий закон фільтрації

$$\tau \left[u^n + k^{\infty}\nabla p_2\right]_t = -u^{\ell} - k^0 \nabla p_1, \tag{9}$$

де $p_1 = c_1^2 \rho^s$ – рівняння стану рідини або газу при рівноважній фільтрації, $p_2 = c_2^2 \rho$ – при замороженому релаксаційному процесі. У порівнянні з виразом (7), заморожений та рівноважний закони фільтрації можуть відрізнятися не тільки коефіцієнтом проникності, а й мірою нелінійності.

Введення в рівняння Дарсі доданків з похідними за часом можна розглядати як врахування часової нелокальності у співвідношеннях між узагальненими силами (градієнт тиску) і потоками (швидкість фільтрації). У випадку, коли поле узагальнених сил швидко змінюється залежно від координати, то для застосування континуального підходу використовують просторово нелокальні моделі [10, 12, 18]. Також застосування нелокальної теорії виглядає перспективним, коли у середовищі не можна виділити достатньо однорідний елементарний об'єм, масштаб якого визначає застосовність локального закону Дарсі, як, наприклад, для фрактальних пористих матеріалів [19]. Таким чином, нелокальне узагальнення закону фільтрації запишемо у такій формі:

$$u(x,t) = -k \int R(x-z)\nabla p(z)dz,$$

де $R(\cdot)$ – деяке ядро релаксації з відповідними властивостями. Такі суттєво нелокальні моделі можна звести до диференціальних рівнянь, розкладаючи в ряд Тейлора градієнт тиску в околі точки x та виконуючи інтегрування. Отримаємо $u(x,t) = -k(I+\sigma^2\nabla^2)\nabla p$ або $(I+\sigma^2\nabla^2)^{-1}u(x,t) = -k\nabla p$. Слабко нелокальний випадок зводиться до просторово нелокального рівняння Дарсі:

$$u - \sigma^2\nabla^2 u = -k\nabla p,$$

де σ – параметр просторової нелокальності, який пов'язаний з радіусом кореляції або розміром структурного елемента середовища.

4. Частинні розв'язки моделі фільтрації з динамічним рівнянням Дарсі

Спочатку розглянемо поширення малих збурень при фільтрації рідини або газу в пружному режимі в рамках моделі з динамічним рівнянням Дарсі:

$$m\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\mathbf{u} = 0,$$

$$\tau\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} + k^\infty\frac{d\nabla p}{dt}\right) = -u - k^0\nabla p, \quad p = c^2\rho,$$

де $d(\cdot)/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u}\nabla)(\cdot)$ – субстанціональна похідна, c – швидкість звуку рухомої речовини.

У одновимірному випадку ця система зводиться до такої:

$$\begin{aligned} &m\rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ &\tau\left(u_t + uu_x + k^\infty c^2\left(\rho_{xt} + u\rho_{xx}\right)\right) = -u - k^0c^2\rho_x. \end{aligned} \tag{10}$$

Розглянемо в рамках цієї моделі поширення малих збурень вигляду

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon\rho_1, \quad u = \varepsilon u_1, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Тоді, враховуючи малість збурень, система у першому наближенні має вигляд

$$m\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0,$$

$$\tau\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + k^\infty c^2\frac{\partial^2\rho_1}{\partial x\partial t}\right) = -u_1 - k^0c^2\frac{\partial \rho_1}{\partial x}.$$

Якщо шукати розв'язок такої системи у формі

$$\rho_1 = r\exp\left(i\left(kx-\omega t\right)\right), \quad u_1 = q\exp\left(i\left(kx-\omega t\right)\right),$$

де k – хвильове число та ω – кругова частота хвилі, то з умови сумісності системи можна встановити зв'язок між k та ω у формі

$$\begin{vmatrix} m\omega & -\rho_0 k \\ k^\infty c^2\omega k\tau + k^0c^2ik & 1-i\omega\tau \end{vmatrix} = 0,$$

який називається дисперсійним співвідношенням. Обчислюючи визначник, отримуємо

$$k = k' + ik'' = \sqrt{a+ib},$$

де

$$a = \frac{m\omega^2\tau\left(k^0-k^\infty\right)}{\rho_0c^2\left(\left[k^0\right]^2 + \left[k^\infty\omega\tau\right]^2\right)},$$

$$b = \frac{m\omega\left(k^0 + k^\infty\left[\omega\tau\right]^2\right)}{\rho_0c^2\left(\left[k^0\right]^2 + \left[k^\infty\omega\tau\right]^2\right)},$$

$k'' > 0$ – коефіцієнт затухання.

Тоді

$$k' = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$$

і фазова швидкість поширення збурень

$$\upsilon_{\mathrm{ph}} = \frac{\omega}{k'}.$$

Оцінимо як впливає на фазову швидкість врахування релаксаційних процесів, тобто порівняємо $\upsilon_{\mathrm{ph}}\big|_{\tau\neq 0}$ та $\upsilon_{\mathrm{ph}}\big|_{\tau=0}$. Для визначеності приймемо, що $k^0 < k^\infty$, тобто проникність пористого середовища для високочастотних збурень вища, ніж для низькочастотних. Отже, потрібно порівняти величини $k'\big|_{\tau\neq 0}$ і $k'\big|_{\tau=0} = \sqrt{m\omega/2\rho_0c^2}$. Нерівність між цими величинами така сама, як між $\sqrt{a^2+b^2}+a$ і $m\omega/\rho_0c^2$. Оскільки $a<0$, то знак нерівності буде визначатись знаком різниці

$$b^2 - \left(\frac{m\omega}{\rho_0c^2}\right)^2 + \frac{2am\omega}{\rho_0c^2} = \frac{m^2\omega^2q(k^0-k^\infty)(k^0)^{-2}}{c^4\rho_0^2(\left[k^0\right]^2+\left[k^\infty q\right]^2)^2} \times$$
$$\times\left(k^{\infty\,2}(k^0+k^\infty)q^3 + 2k^0k^{\infty\,2}q^2 + 2k^0k^\infty q + 2k^{0\,3}\right),$$

де $q = \omega\tau > 0$. Останній вираз, очевидно, є від'ємним при $k^0 < k^\infty$ і тоді $k'\big|_{\tau\neq 0} < k'\big|_{\tau=0}$. Користуючись подібними міркуваннями можна довести, що при $k^0 > k^\infty$ отримаємо $k'\big|_{\tau\neq 0} > k'\big|_{\tau=0}$.

Таким чином, справедливим є таке **твердження**.

У випадку, коли проникність пористого середовища для високочастотних збурень є вищою, ніж проникність для низькочастотних збурень $k^0 < k^\infty$, то фазова швидкість фільтрації з релаксацією буде більшою за фазову швидкість без релаксації $\upsilon_{\rm ph}\big|_{\tau\neq 0} > \upsilon_{\rm ph}\big|_{\tau=0}$ і, навпаки, якщо виконується умова $k^0 > k^\infty$, то фазові швидкості у нерівноважному процесі перевищуватимуть ці швидкості у випадку рівноваги $\upsilon_{\rm ph}\big|_{\tau\neq 0} < \upsilon_{\rm ph}\big|_{\tau=0}$.

4.1. Хвильові розв'язки моделі нерівноважної фільтрації

Поширення хвиль у пористих середовищах у випадку нелінійного закону фільтрації (5) розглядалось у роботі [5], де встановлено поведінку тиску та швидкості фільтрації на фронті стаціонарної хвилі. Проведемо аналіз таких режимів у випадку динамічного рівняння Дарсі.

Хвильові розв'язки моделі (10) мають вигляд

$$\rho = R(\xi), \quad u = U(\xi), \quad \xi = x - st, \tag{11}$$

де s – стала швидкість хвильового фронту. Якщо підставити (11) в (10) та проінтегрувати отримане співвідношення від фону $\xi = \infty$ до поточного значення ξ, враховуючи те, що $U(\infty) = 0$, $R(\infty) = R_0$, то отримаємо квадратуру

$$RU = ms\,(R - R_0)$$

та систему ЗДР

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\xi} &= W, \\ \frac{dW}{d\xi} &= \frac{ms\left(1 - \frac{R_0}{R}\right) + k^0c^2W - \tau s\,(s-U)\,m\frac{W}{R^2}R_0}{\tau k^\infty c^2\,(s-U)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Система (12) є автономною динамічною системою та має у фазовій площині $(R; W)$ одну нетривіальну стаціонарну точку з координатами

$$Q = (R_0; 0)\,.$$

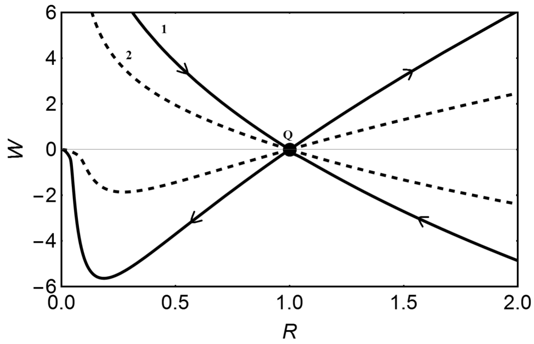

Рис. 1. Фазовий портрет динамічної системи (12). Суцільні лінії *1* – сепаратриси стаціонарної точки Q при $\tau_1 = 0{,}01$, штрихові лінії *2* – при $\tau_2 = 0{,}05$

В околі точки система (12) описується лінеаризованою системою з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix},$$

де

$$\alpha = \frac{m}{\tau G_0} > 0, \quad \beta = \frac{\theta}{\tau s} - \frac{sm}{G_0},$$

$$G_0 = k^\infty c^2 R_0, \quad \theta = k^0/k^\infty.$$

Очевидно, що власні значення цієї матриці обчислюються з умови $\lambda^2 - \beta\lambda - \alpha = 0$. Тоді $\lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{D}$, $D = \beta^2 + 4\alpha > 0$ і вони дійсні та різних знаків при всіх значеннях параметрів. Звідси випливає, що стаціонарна точка є сідловою. Єдиною траєкторією, яка входить в неї, є стійка сепаратриса (рис. 1). Дослідимо як при зміні часу релаксації поводить себе вхідна сепаратриса сідлової точки Q.

Для цього зазначимо, що через особливий вигляд матриці A кутові коефіцієнти напрямів [20], за яким траєкторії прямують до стаціонарної точки Q, дорівнюють власним значенням $\lambda_{1,2}$. Тому напрям вхідної сепаратриси визначається величиною $\lambda(\tau) = \beta - \sqrt{D}$.

Знак похідної цієї функції

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = -\frac{\theta}{\tau^2 s\sqrt{D}}\left[\sqrt{D} - \left(\beta - \frac{2ms}{G_0\theta}\right)\right]$$

залежить від знака виразу у квадратних дужках. Виконуючи ряд тотожних перетворень над цим виразом, легко переконатись, що $\mathrm{sign}(d\lambda/d\tau) = \mathrm{sign}(1-\theta)$.

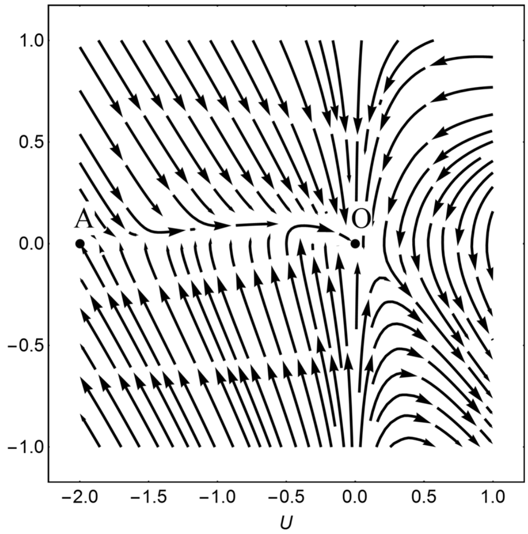

Рис. 2. Фазовий портрет динамічної системи (14) при $m = 0{,}35$, $\tau = 0{,}5$, $\theta = 2$

Отже, при $\theta < 1$ функція $\lambda(\tau)$ зростає і тоді для $\tau_2 > \tau_1$ маємо $0 > \lambda(\tau_2) > \lambda(\tau_1)$, що відповідає повороту сепаратриси проти годинникової стрілки (рис. 1). При $\theta < 1$ функція $\lambda(\tau)$ спадає і сепаратриса повертається у протилежному напрямі.

4.2. Поліноміальні розв'язки

Використовуючи метод розділення змінних, можна переконатись, що система (10) має розв'язки вигляду

$$\rho = R\,(t)\,x^2, \quad u = U\,(t)\,x. \tag{13}$$

Підставляючи (13) в (10) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримуємо нелінійну динамічну систему відносно R та U вигляду

$$m\frac{dR}{dt} + 3RU = 0,$$
$$\tau\left(\frac{dU}{dt} + U^2 + 2k^{\infty}c^2\left(\frac{dR}{dt} + UR\right)\right) = -U - 2k^0c^2R.$$

З метою зменшення кількості параметрів у системі виконаємо масштабне перетворення $R = W/2c^2k^{\infty}$, яке приводить до системи

$$\begin{aligned} &m\frac{dW}{dt} + 3WU = 0,\\ &\tau\left(\frac{dU}{dt} + U^2 + \frac{dW}{dt} + UW\right) = -U - \theta W, \end{aligned} \tag{14}$$

де $\theta = k^0/k^{\infty}$.

Отримана система має дві стаціонарні точки з координатами $A\,(-1/\tau; 0)$ та $O\,(0; 0)$ (рис. 2). У точці A власні значення матриці лінеаризованої системи $\lambda_A = \{3/m\tau; 1/\tau\}$, що вказує на сідловий характер точки. Натомість у точці O власні значення $\lambda_O = \{-1/\tau; 0\}$ і тому точка є складною. Для аналізу поведінки системи в околі початку координат побудуємо обмеження системи на центральний многовид [21]. Для цього приведемо систему (14) до канонічного вигляду за допомогою лінійного перетворення

$$\begin{pmatrix} W \\ U \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1/\tau & 0 \\ -\theta/\tau & 1 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y/\tau \end{pmatrix} + T^{-1}F\left(T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right), \tag{15}$$

де F – матриця-стовпчик правих частин системи (14). Згідно з властивостями центрального многовиду, він може мати вигляд $h(x) = dx^n + \dots$. Підставляючи $h(x)$ в друге рівняння системи (15) та аналізуючи мономи старшого степеня, отримуємо що

$$n = 2, \quad d = \frac{(3-m)(\theta-1)\theta}{2m\theta}.$$

Редукція системи (15) на центральний многовид приводить до рівняння $dx/dt = \frac{3\theta}{m\tau}x^2$.

Отже, оскільки $0 < m < 1$, то знак α залежить тільки від $(\theta-1)$. Якщо $\theta > 1$, то центральний многовид – парабола з гілками доверху, якщо $\theta < 1$, то парабола з гілками донизу (рис. 3). Якісна поведінка траєкторій в околі O визначається розв'язками редукованого рівняння і характеризує точку як стійкий вузол у лівій півплощині і сідлову – у правій.

4.3. Автомодельні розв'язки моделі фільтрації з нелінійним динамічним рівнянням Дарсі

Врахування релаксаційних процесів, як правило, звужує клас точних розв'язків моделей. Однак, у випадку моделі фільтрації з нелінійним динамічним рівнянням Дарсі вигляду (9) засобами симетрійного аналізу [22] вдається знайти автомодельні розв'язки, на відміну від моделей з рівнянням (7).

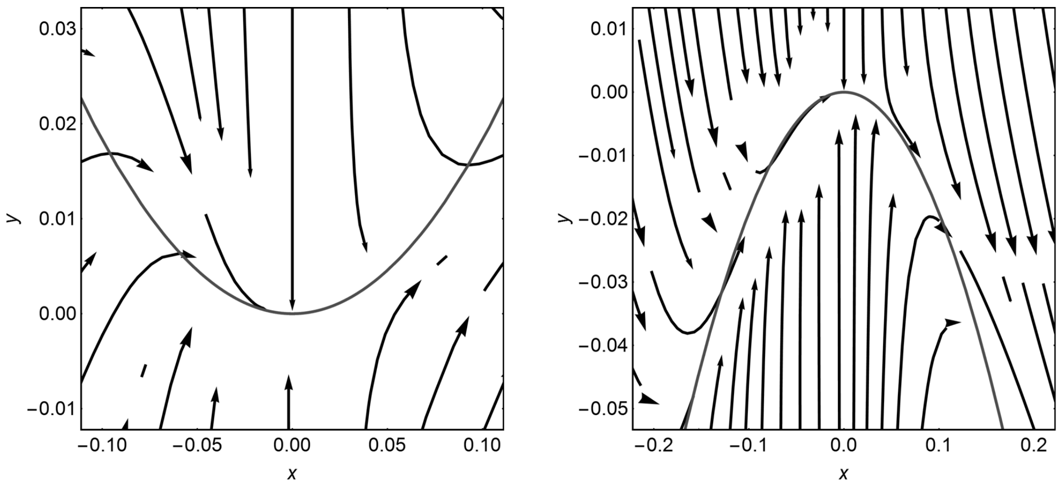

Рис. 3. Центральний многовид та структура фазової площини в околі точки O динамічної системи (15) при $\theta > 1$ (ліворуч) $\theta < 1$ (праворуч)

Аналізуючи масштабні перетворення, які допускає система

$$\begin{aligned} &m\rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ &\tau\left(u^n + k^\infty c_2^2 \rho_x\right)_t = -u^\ell - k^0 c_1^2 (\rho^s)_x, \end{aligned} \tag{16}$$

можна переконатись, що вона інваріантна відносно оператора $\hat{X}$:

$$\hat{X} = \alpha t \frac{\partial}{\partial t} + \beta x \frac{\partial}{\partial x} + r\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + su \frac{\partial}{\partial u},$$

де $\alpha = (n - \ell)s$, $\beta = (1 - \ell + n)s$, $r = n + 1$, якщо виконується додаткове співвідношення

$$n(1 - 2s) + s(\ell - 1) + 1 = 0.$$

Інваріанти оператора $\hat{X}$ визначають вигляд автомодельних розв'язків

$$\rho = R(\omega) t^{r/\alpha}, \quad u = U(\omega) t^{s/\alpha}, \quad \omega = x^\alpha t^{-\beta},$$

які зводять систему ДРЧП (16) до системи ЗДР:

$$\begin{aligned} &m\left(-\beta\omega R' + Rr\alpha\right) + \alpha\omega^{1-1/\alpha}(UR)' = 0, \\ &\tau\left(\alpha n U^{n-1} U' \omega^{1/\alpha} + \alpha k^\infty c_2^2 [\alpha\omega R'' + (\alpha - 1)R']\right) \times \\ &\times \omega^{1-2/\alpha} = -U^\ell - s\alpha k^0 c_1^2 R^{s-1} R' \omega^{1-1/\alpha}, \end{aligned}$$

де $(\cdot)' = d(\cdot)/d\omega$. Оскільки отримана система є неавтономною і нелінійною, то її дослідження є непростою і поки що невирішеною задачею. Варто звернути також увагу, що при $n = \ell$ параметр $\alpha = 0$ і система (16) не має автомодельних розв'язків зазначеного вигляду.

5. Висновки

У проведених дослідженнях у рамках релаксаційного формалізму виконано узагальнення законів фільтрації шляхом врахування нелінійних та простроово-часових нелокальних ефектів, які мають місце у нерівноважних пористих середовищах. Отримані динамічні закони фільтрації у випадку рівноважних або заморожених процесів асимптотично виходять на класичний закон Дарсі або його нелінійні модифікації. Разом із законом збереження маси та рівняннями стану рухомої речовини ці рівняння виглядають перспективними для побудови моделі пружного режиму фільтрації в умовах високих швидкостей та сильної нерегулярності пористого простору.

Релаксаційні рівняння Дарсі у лінійному випадку знайшли своє обґрунтування з позицій статистичної фізики і добре зарекомендували себе на практиці для опису фільтрації неньютонових рідин, у пористих середовищах, де значний вплив мають процеси на рівні мікропор. Ці співвідношення, отримані внаслідок лінеаризації нелінійних рівнянь Дарсі, дозволяють описати поширення малих хвильових збурень і встановити вплив релаксаційних ефектів на їх фазову швидкість поширення.

Хоча врахування нелінійності та нерівноважності ускладнило аналітичні дослідження моделей фільтрації, усе ж вдається проаналізувати ряд найпростіших розв'язків. Зокрема, модель фільтрації має розв'язки у вигляді нелінійних хвиль, які поширюються зі сталою швидкістю, поліноміальні та автомодельні розв'язки. На основі прийомів якісного аналізу нелінійних динамічних систем встановлено структуру фазових просторів редукованих систем, їх залежність від часу релаксації та співвідношення рівноважного та замороженого параметрів проникності.

Запропоновані моделі та отримані розв'язки можуть бути корисними для дослідження характеристик полів потоків флюїдів у гірських породах, що є важливим для розробки технологій видобутку вуглеводнів [2, 14].

Автори висловлюють вдячність канд.фіз.-мат. наук Микуляку Сергію за корисні поради при обговоренні результатів роботи. Робота частково виконана в рамках НДР 0117U000249.

1. U. Hornung. *Homogenization and porous media* (Springer, 1997).
2. В.Н. Николаевский, К.С. Басниев, А.Т. Горбунов и др. *Механика насыщенных пористых сред* (Недра, 1970).
3. Ю.П. Желтов. *Механика нефтегазоносного пласта* (Недра, 1975).
4. М.Г. Алишаев. *Моделирование и расчёт в прикладной механике и добыче нефти* (АЛЕФ, 2015).
5. Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик. *Движение жидкостей и газов в природных пластах* (Недра, 1984).
6. М.М. Хасанов, Г.Т. Булгакова. *Нелинейные и неравновесные еффекты в реологически сложных средах* (Институт компьютерных исследований, 2003).
7. C.H. Brinkman. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Appl. Sci. Res.* **A1**, 27 (1947).
8. S.M. Hassanizadeh, W.G. Gray. High velocity flow in porous media. *Transport in porous media* **2**, 521 (1987).
9. М.Г. Алишаев, А.Х. Мирзаджанзаде. К учету явлений запаздывания в теории фильтрации. *Изв. в.уч.зав., Нефть и газ*, **6**, 71 (1975).
10. V. A. Danylenko, T. B. Danevych, O. S. Makarenko *et al. Self-Organization in Nonlocal Non-Equilibrium Media* (Subbotin in-t of geophysics NASU, 2011) [ISBN: 978-966-02-6088-7].
11. O.S. Makarenko. Model equations and formation of structures in media with memory. *УФЖ* **57** (4), 408 (2012).
12. A. Cemal Eringen. Vistas of nonlocal continuum physics *Int. J. Eng. Sci.* **30** (10), 1551 (1992).
13. R. Helmig. *Multiphase flow and transport processes in the subsurface* (Springer, 1997).
14. Б.А. Сулейманов. *Особенности фильтрации гетерогенных систем* (Институт компьютерных исследований, 2006).
15. D.A. Nield. The limitations of the Brinkman-Forchheimer equation in modeling flow in a saturated porous medium and at an interface. *Int. J. Heat and Fluid Flow* **12**, No. 3, 269 (1991).
16. Ю.А. Буевич, Г.П. Ясников. Релаксационные методы в исследованиях процессов переноса. *Инж.-физ.ж.* **XLIV**, № 3, 489 (1983).
17. G. Rehbinder. Measurement of the relaxation time in Darcy flow. *Transport in Porous Media* **8**, 263 (1992).
18. A. Cemal Eringen. *Nonlocal Continuum Field Theories* (Springer, 2002).
19. X. Hu, J. H. Cushman. Nonequilibrium statistical mechanical derivation of a nonlocal Darcy's law for unsaturated/saturated flow. *Stochast. Hydrol. Hydraul.* **8**, 109 (1994).
20. Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости* (Наука, 1976).
21. J. Guckenheimer, Ph. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields* (Springer, 1983) [ISBN: 978-1-4612-1140-2].
22. В.И. Лагно, С.В. Спичак, В.И. Стогний. *Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа* (Институт компьютерных исследований, 2004) [ISBN: 5-93972-338-1].

Одержано 26.01.18

S.I. Skurativskyi, I.A. Skurativska

SOLUTIONS OF THE MODEL OF LIQUID AND GAS FILTRATION IN THE ELASTIC MODE WITH DYNAMIC FILTRATION LAW

S u m m a r y

A filtration model with the generalized Darcy's law making allowance for nonlocal and nonlinear effects has been developed. The expression for the law was derived within the relaxation formalizm of nonequilibrium thermodynamics. The developed model is applied to analyze the influence of relaxation effects on the phase velocity of small wave-like perturbations. The character of nonlinear traveling waves is determined. The properties of polynomial and self-similar solutions are analyzed.